

Modèles hydrauliques fluviaux

par **Gérard NICOLLET**

Ingénieur Civil des Mines

Docteur-Ingénieur

Chef adjoint du Laboratoire National d'Hydraulique

et **Gérard LABADIE**

Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées

Chef du Groupe Hydraulique fluviale au Laboratoire National d'Hydraulique

1. Modèles physiques	C 184 - 3
1.1 Définitions	— 3
1.1.1 Distinction entre modèles à fonds fixes et modèles à fonds mobiles.....	— 3
1.1.2 Bref rappel des principes de la similitude	— 3
1.2 Modèles à fonds fixes	— 4
1.2.1 Similitude des écoulements en rivière et en canal à surface libre	— 4
1.2.2 Modèles de structures hydrauliques.....	— 4
1.2.3 Mise en œuvre des modèles physiques	— 6
1.3 Modèles à fonds mobiles.....	— 6
1.3.1 Rappels sur le transport solide par charriage	— 6
1.3.2 Similitude du transport par charriage.....	— 8
1.3.3 Mise en œuvre des modèles sédimentologiques	— 9
1.3.4 Exemples d'application	— 10
2. Modèles mathématiques	— 10
2.1 Ce qu'est un modèle mathématique	— 10
2.2 Principes des modèles mathématiques.....	— 11
2.2.1 Modèles bidimensionnels horizontaux.....	— 11
2.2.2 Modèles monodimensionnels	— 12
2.2.3 Modèles hydrologiques	— 15
2.2.4 Modèles d'évolution du lit	— 15
2.3 Exemples	— 16
2.3.1 Régulation du plan d'eau d'une retenue	— 16
2.3.2 Protection contre les crues	— 16
2.3.3 Évolution du lit	— 16
2.3.4 Pile de pont dans un lit de rivière.....	— 16
2.4 Mise en œuvre des modèles.....	— 16
3. Conclusion	— 20
Pour en savoir plus	Doc. C 184

Les modèles hydrauliques sont de puissants outils d'étude pour la construction et l'exploitation des aménagements fluviaux. Sans prétendre à l'exhaustivité, citons un certain nombre de telles études :

- évolution morphologique d'un cours d'eau, correction de rivière, implantation et stabilité de seuils, protection de berges ;
- impact d'ouvrages divers implantés dans le lit mineur ou le lit majeur (ponts, remblais de voie routière ou de chemin de fer, plate-forme d'équipement industriel) : cet impact concerne l'exhaussement des niveaux de crue qu'il faut

minimiser par des travaux compensatoires, mais aussi la modification du transport solide contre laquelle il importe également de se prémunir (protections en enrochements pour éviter les érosions, par exemple) ;

— définition d'ouvrages de protection contre les crues (endiguements, barrages écrêteurs, etc.) ;

— barrages : les études concernent les phases de chantier (dérivation provisoire et coupure de la rivière) et la mise au point des ouvrages définitifs ; outre le dessin de la forme des évacuateurs de crue qui, pour les aménagements de haute et moyenne chute, présentent une grande variété (seuils déversants, puits, pertuis), il faut dimensionner la vidange de fond, des cuillères ou bassins pour assurer une bonne dissipation de l'énergie, et calibrer les vannes qui équipent ces ouvrages ; pour un aménagement hydroélectrique, il faut ajouter l'étude de la prise d'eau de l'usine et de sa restitution, ainsi que d'éventuels dessableurs, cheminées d'équilibre, etc. ; enfin, l'établissement de plans d'alerte nécessite la détermination des zones submergées en cas de rupture du barrage ;

— mise au point de consignes de crue et de régulation des plans d'eau de retenue de barrages ;

— canaux : étude des régimes de fonctionnement et notamment des transitoires dus au déclenchement d'usines ou stations de pompage qui provoquent la propagation d'intumescences ;

— navigation : étude des conditions de navigation, de dispositifs tels que panneaux de fonds permettant le creusement et l'entretien des chenaux, conception d'ouvrages (portes, organes de remplissage d'écluses, etc.) ;

— prises et rejets de diverses installations industrielles, notamment les centrales thermiques ou nucléaires ;

— pollution ou transport d'effluent.

On voit que les problèmes posés sont très variés. Ils sont, de plus, complexes puisque mettant en jeu des écoulements à surface libre, tridimensionnels et turbulents. Leur résolution se fait donc au prix d'une schématisation de la réalité appelée **modèle**. Ce terme s'applique, en fait, à deux outils distincts et reçoit donc deux qualificatifs : **modèles physiques** et **modèles mathématiques**. Dans les premiers, on reproduit le lit des cours d'eau et les écoulements naturels à échelle réduite en s'appuyant sur la théorie de la similitude ; dans les seconds, c'est un système d'équations qui traduit les phénomènes physiques.

Soulignons que, dans les deux cas, l'emploi d'un modèle implique des approximations :

— sur la représentation de la géométrie de l'écoulement, qui est **discretisée** par des feuilards métalliques représentant des profils ou des lignes de niveaux pour les modèles physiques et par des **maillages** formant une partition des domaines de calcul pour les modèles mathématiques ;

— sur les phénomènes physiques pris en compte : certaines simplifications sont consenties dans les équations (ainsi, la pression est supposée hydrostatique), tandis que l'on introduit dans les modèles physiques des erreurs, par exemple sur les courants secondaires, lorsque l'on distord les échelles verticale et horizontale ;

— sur la restitution des résultats, par les erreurs dues aux appareils de mesure comme par celles dues aux schémas de résolution numériques et à la précision des ordinateurs.

1. Modèles physiques

1.1 Définitions

1.1.1 Distinction entre modèles à fonds fixes et modèles à fonds mobiles

L'impossibilité de calculer des écoulements dans les géométries très complexes correspondant aux cas pratiques a conduit les ingénieurs à étudier *en petit* les phénomènes. Les premiers modèles dont la relation nous soit parvenue remontent aux environs de 1885. Paradoxalement c'est le type de modèle le plus élaboré, le plus délicat à exploiter, qui a été d'abord envisagé : modèle de l'estuaire de la Mersey par Osborne Reynolds en Grande-Bretagne, modèle de l'estuaire de la Seine par Vernon-Harcourt en France ; il s'agissait de modèles à fonds mobiles sur lesquels on regardait le déplacement des sédiments sous l'effet des courants.

Les modèles hydrauliques se sont multipliés dans tous les pays à partir du début du 20^e siècle, et principalement les modèles à fonds fixes utilisés en particulier pour mettre au point des structures hydrauliques, les études portant sur l'écoulement de l'unique phase liquide.

1.1.2 Bref rappel des principes de la similitude

On trouvera dans [1] les principes généraux de la similitude et l'on se bornera ici à un bref rappel concernant l'hydraulique.

Soient deux systèmes, l'un appelé **prototype** indiqué p , l'autre appelé **modèle** indiqué m qui sont en **similitude géométrique**, le facteur d'échelle étant L .

Ces systèmes seront en **similitude dynamique** s'il existe un facteur d'échelle défini et constant F permettant de passer des forces d'un système à celles de l'autre système.

Il est possible de montrer que deux systèmes en similitude géométrique et dynamique sont *ipso facto* en **similitude cinématique**, c'est-à-dire que toutes les vitesses et accélérations en des points homologues sont dans un rapport donné constant.

L'établissement des lois de similitude peut se faire soit à partir des équations du mouvement, soit à partir des relations de définition des forces. C'est cette dernière approche qui est rappelée ici.

Les forces en jeu sont la pesanteur, la viscosité, l'inertie et la turbulence. Si l'on considère par exemple la force de pesanteur :

$$F_{P_p} = M_p g_p \text{ sur le prototype}$$

$$F_{P_m} = M_m g_m \text{ sur le modèle}$$

sachant que la masse M a la même dimension que ρL^3 , l'échelle des forces de pesanteur sera :

$$\frac{F_{P_p}}{F_{P_m}} = \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{L_p}{L_m} \right)^3 \frac{g_p}{g_m}$$

soit

$$\hat{F}_P = \hat{\rho} \hat{L}^3 \hat{g}$$

Pour les diverses forces, les expressions sont rassemblées dans le tableau suivant :

Forces	Définition	Échelle
Pesanteur	$F_p = Mg$	$\hat{F}_P = \hat{\rho} \hat{L}^3 \hat{g}$
Inertie	$F_I = M\gamma$	$\hat{F}_I = \hat{\rho} \hat{L}^4 \hat{T}^{-2}$
Viscosité	$F_V = \mu S \frac{dV}{dn}$	$\hat{F}_V = \hat{\mu} \hat{L}^2 \hat{T}^{-1}$
Turbulence	$F_T = \rho S u' v'$	$\hat{F}_T = \hat{\rho} \hat{L}^4 \hat{T}^{-2} = \hat{F}_I$

La similitude dynamique sera réalisée si l'on peut définir un rapport de similitude \hat{F} tel que $\hat{F} = \hat{F}_P = \hat{F}_I = \hat{F}_V$.

Si, comme il est usuel, on travaille avec le même fluide (l'eau) dans le même champ de pesanteur $\hat{\mu} = \hat{\rho} = \hat{g} = 1$, les relations deviennent :

$$\hat{L}^3 = \hat{L}^4 \hat{T}^{-2} = \hat{L}^2 \hat{T}^{-1}$$

système qui n'admet que la solution triviale $\hat{L} = \hat{T} = 1$, ce qui signifie que pour une échelle géométrique $\hat{L} \neq 1$ il y a impossibilité de réaliser la similitude dynamique de façon exacte. Heureusement, dans la pratique, toutes les forces n'ont pas la même importance. En particulier, dans le cas des écoulements à surface libre, il est possible de négliger les forces de viscosité devant les forces d'inertie et de turbulence : c'est la similitude de Froude dans laquelle on exprime que $\hat{F}_I = \hat{F}_P$, soit :

$$\hat{L}^2 \hat{T}^{-2} = \hat{L} \hat{g}$$

qui peut s'écrire $\hat{V}^2 = \hat{L} \hat{g}$ sachant que $\hat{V} = \hat{L} \hat{T}^{-1}$

ou encore :

$$\frac{\hat{V}}{\sqrt{\hat{L} \hat{g}}} = 1$$

Ce rapport $Fr = V/\sqrt{Lg}$ est un invariant de la similitude (nombre de Froude). Dans la pratique, la loi de similitude de Froude se traduit par $\hat{V} = \hat{L}^{1/2}$ et l'on en déduit également $\hat{T} = \hat{L}^{1/2}$.

Remarque : à l'opposé des écoulements à surface libre, les écoulements en charge ne dépendent pratiquement pas des forces de pesanteur et l'on ne considère alors que les forces d'inertie et de viscosité, d'où l'invariant :

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \text{ (nombre de Reynolds)}$$

La loi de similitude de Reynolds se traduit par $\hat{V} = \hat{L}^{-1}$ d'où $\hat{T} = \hat{L}^2$, mais dans la pratique, on a souvent affaire à des écoulements turbulents rugueux sur le prototype et il suffit alors de respecter un critère moins contraignant, c'est-à-dire que l'écoulement sur le modèle est de même type ([§ 1.2.2.4](#)).

1.2 Modèles à fonds fixes

1.2.1 Similitude des écoulements en rivière et en canal à surface libre

1.2.1.1 Modèles en similitude géométrique

Toutes les grandeurs géométriques, longueur L et hauteur H , sont réduites dans le même rapport et l'on suit la loi de similitude de Froude : $\hat{V} = \hat{L}^{1/2} = \hat{H}^{1/2}$.

Cela signifie que l'échelle des pentes $\hat{J} = \hat{L}/\hat{H} = 1$, donc en particulier la pente des lignes d'eau est la même sur le modèle qu'en nature. Le modèle est complètement déterminé par la loi de Froude et la seule donnée de \hat{L} , avec comme échelles dérivées :

$$\hat{T} = \hat{L}^{1/2} \quad \text{et} \quad \hat{Q} = \hat{V}\hat{L}\hat{H} = \hat{L}^{5/2}$$

Il reste à vérifier que les forces de frottement sur le modèle sont représentées à la même échelle que les forces d'inertie malgré le non-respect de la représentation homologue des forces de viscosité.

Si l'on considère une rivière de largeur suffisamment grande vis-à-vis du tirant d'eau h , le rayon hydraulique R_H peut être confondu avec h et l'écoulement peut être considéré comme filaire. La loi de perte de charge habituellement utilisée est la loi empirique de Strickler :

$$V = Kh^{2/3} J^{1/2} \quad (1)$$

avec $K = 26/d^{1/6}$ coefficient de rugosité de Strickler,

d taille des aspérités représentatives de la nature du lit.

En rapprochant la loi de Strickler de la loi universelle de perte de charge de Darcy-Weisbach :

$$V = \sqrt{8ghJ/\lambda} \quad (2)$$

on obtient le coefficient adimensionnel de perte de charge λ en fonction de la rugosité relative h/d :

$$1/\sqrt{\lambda} = 2,935 (h/d)^{1/6} \quad (3)$$

valable pour $5 < h/d < 500$, ce qui représente la majorité des cas de rivières (mis à part les estuaires et les très grandes rivières coulant sur des sédiments très fins). Cette expression montre que le coefficient de perte de charge λ sera correctement représenté à la condition que le rapport h/d soit conservé, c'est-à-dire que les aspérités du lit soient reproduites à l'échelle géométrique. Or ce raisonnement repose sur l'hypothèse qu'on a le même régime d'écoulement sur le modèle qu'en nature, c'est-à-dire que l'écoulement peut être considéré comme turbulent rugueux sur le modèle. Cela se traduit dans la pratique par une condition sur le nombre de Reynolds de l'écoulement sur le modèle : $Re = Vh/v > 1\ 000$ environ.

Si le respect de ce critère conduit à un modèle de dimensions excessives, la solution couramment adoptée consiste à utiliser des échelles différentes selon l'horizontale et selon la verticale ; c'est la distorsion.

1.2.1.2 Modèles distordus

Du point de vue géométrique, il y a similitude suivie d'une affinité selon la verticale : on considère l'échelle en plan \hat{L} (ou échelle des longueurs), l'échelle des hauteurs \hat{H} et leur rapport $\Delta = \hat{H}/\hat{L}$ appelé coefficient de distorsion (avec cette définition $\Delta \leq 1$).

Les vitesses sont rapportées aux profondeurs d'eau, et en respectant la loi de Froude : $\hat{V} = \hat{H}^{1/2}$.

Les échelles déduites sont l'échelle des temps hydrauliques $\hat{T} = \hat{L}\hat{V}^{-1} = \hat{L}\hat{H}^{-1/2}$ et l'échelle des débits $\hat{Q} = \hat{V}\hat{L}\hat{H} = \hat{L}\hat{H}^{3/2}$.

L'échelle des pentes, $\hat{J} = \hat{H}/\hat{L} = \Delta$ coefficient de distorsion, montre à l'évidence que les pentes des lignes d'eau seront augmentées sur le modèle.

Si l'on poursuit les raisonnements dans l'hypothèse d'un écoulement filaire (donc avec $R_H \approx h$), le rapprochement des expressions (2) et (3) du paragraphe précédent donne la loi de perte de charge :

$$V = 2,935 (h/d)^{1/6} \sqrt{8ghJ}$$

d'où, en échelles :

$$\hat{V} = (\hat{H}/\hat{d})^{1/6} \hat{H} \hat{L}^{-1/2}$$

Avec, de plus, la loi de Froude $\hat{V} = \hat{H}^{1/2}$, on obtient finalement l'échelle des aspérités \hat{d} par :

$$\hat{d}/\hat{H} = (\hat{H}/\hat{L})^3 = \Delta^3$$

ou encore :

$$\hat{d} = \hat{H}^4 \hat{L}^{-3} \quad (4)$$

ce qui signifie que, sur le modèle, la taille des éléments de rugosité est exagérée selon le cube de la distorsion. Plus le modèle est distordu, plus les aspérités sont grossies. Cela montre l'importance particulière de l'étalement de la rugosité sur ce type de modèle.

La distorsion est assez largement utilisée, car elle permet d'accroître le nombre de Reynolds de l'écoulement (en particulier dans les zones à faible profondeur et à faible vitesse comme les champs d'inondation), d'améliorer la précision des mesures et, également, de raccourcir la durée des essais (voir l'expression de \hat{T}).

À l'opposé, la distorsion présente l'inconvénient de modifier le profil de vitesse sur la verticale, exagérant les courants secondaires dans les courbes et derrière les singularités du lit (épis par exemple) ; pour cela, on se limite habituellement à $1/\Delta < 3$ ou 4.

1.2.1.3 Exemples de modèles de rivière à fonds fixes

Soit un bief de rivière de 2 km de longueur caractérisé par les valeurs moyennes suivantes : $h_p \approx 2$ m, $V_p \approx 30$ cm/s et $d_p \approx 40$ mm, d'où un coefficient de rugosité de Strickler $K_p \approx 45$ MKS. Une contrainte est que le modèle ne doit pas dépasser une longueur de 20 m pour être construit au laboratoire, d'où une échelle en plan d'au plus $\hat{L} = 100$.

■ Cas non distordu : $\hat{L} = \hat{H} = 100$, d'où $\hat{V} = 10$ et $\hat{K} = \hat{H}^{-1/6} = 0,464$.

Les valeurs moyennes modèle des paramètres sont : $h_m = 2$ cm, $V_m = 3$ cm/s, $K_m = 97$ et $Re_m = 600$. On tombe ainsi sur l'impossibilité théorique d'un écoulement à trop faible nombre de Reynolds ($Re_p = 600\ 000$, soit un écoulement pleinement turbulent) et, de plus, sur l'impossibilité pratique de réaliser une rugosité aussi faible ($K_m = 100$ correspond à l'état de surface d'une plaque de verre !).

■ Cas distordu : $\hat{L} = 100$; si l'on choisit par exemple $\hat{H} = 25$, soit $\Delta = 1/4$, on en déduit : $\hat{K} = \hat{L}^{1/2}\hat{H}^{-2/3} = 1,17$, d'où des valeurs moyennes $h_m = 8$ cm, $V_m = 6$ cm/s, $K_m \approx 38,5$ et $Re_m = 4\ 800$, ce qui est parfaitement compatible avec les divers critères.

1.2.2 Modèles de structures hydrauliques

1.2.2.1 Exemples de structures et identification des problèmes

Le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [2].

Les modèles de structures hydrauliques sont probablement le type le plus courant de modèle physique : relativement bon marché, de mise en œuvre et d'interprétation des résultats faciles. Les

structures étudiées et les phénomènes en jeu sont extrêmement variés, mais bien souvent on rencontre des composantes verticales de la vitesse suffisamment significatives pour que l'on ne puisse envisager d'accepter une distorsion géométrique. Les écoulements étant gouvernés essentiellement par les phénomènes de gravité, on suit la loi de similitude de Froude avec des échelles L relativement petites, souvent comprises entre 10 et 60, ce qui élimine les risques d'effet d'échelle et donne une bonne précision aux mesures. La perte de charge linéaire par frottement n'étant pas prépondérante dans ce type d'ouvrages locaux, la rugosité des parois est d'assez peu d'importance et l'on ne réalise pas d'étalement du modèle que l'on construit le plus lisse possible.

■ **Ouvrages hydrauliques de basse chute** : les problèmes généraux d'implantation sont généralement étudiés sur un modèle d'ensemble de l'aménagement, distordu ou non, à une échelle en plan de l'ordre de 100. Un ou plusieurs modèles de détail, non distordus à une échelle en plan comprise entre 25 et 60, sont utilisés pour la mise au point précise des prises ou rejets d'eau (le problème des vortex sera envisagé au paragraphe suivant).

■ **Évacuateurs de crues** : ces ouvrages de types très variés sont mis au point sur modèle non distordu pour optimiser les structures destinées à dissiper l'énergie (le problème de l'aération de l'écoulement sera traité au paragraphe suivant).

■ **Écoulements internes aux ouvrages** : on les rencontre dans de nombreuses structures telles que les écluses, les stations de pompage, les réfrigérants, les stations de traitement d'eau. Il convient souvent d'éviter les vortex ou les vibrations des structures.

1.2.2.2 Problèmes liés à l'entraînement d'air

■ **Écoulement diphasique air-eau** : la formation de bulles d'air est due à la tension superficielle et, avec le même fluide sur le modèle qu'en nature, les bulles auront approximativement la même taille. La vitesse d'ascension des bulles est trop élevée sur le modèle.

La formation, l'entraînement et l'éclatement des bulles dépendent des forces de gravité, de la viscosité et de la tension superficielle. La représentation correcte de tous ces phénomènes ne peut se faire qu'à l'échelle 1.

Les modèles de siphons ou de puits à débit partiel fonctionnent en permanence avec un mélange air-eau ; ils sont basés sur la loi de Froude, mais en sachant que l'entraînement d'air sera inférieur à ce qu'il sera sur le prototype.

Dans les problèmes de dissipation d'énergie, l'aération plus importante en nature que sur le modèle place les résultats de l'expérimentation en laboratoire dans le sens de la sécurité.

■ **Vortex** : ils doivent être évités dans les prises d'eau, car ils affectent les caractéristiques des machines hydrauliques et peuvent entraîner des corps flottants. Des études sur modèles sont entreprises pour examiner l'éventualité de la formation de vortex et, si l'on en observe, pour trouver des modifications de structure qui les suppriment.

Pour les mêmes raisons que les bulles, les vortex ne peuvent pas être reproduits de façon homologue sur un modèle à une échelle différente de l'unité.

Aucune règle ne permet aujourd'hui de transposer au prototype les observations du modèle. La première recommandation est de construire un modèle non distordu aussi grand que possible (échelle de 10 à 20) et, en second lieu, de soumettre les structures à des vitesses supérieures à celles données par le critère de Froude. Cette augmentation des vitesses peut entraîner une modification des champs de vitesses (apparition de décollements par exemple) qui peut rendre délicate l'interprétation des résultats.

1.2.2.3 Modèles de mélanges d'effluents

Le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [3].

Le but principal de ces modèles, et particulièrement les modèles d'ouvrages de rejet, est la détermination de la concentration en effluent dans le milieu liquide ambiant. Les essais permettent de savoir en quoi les modifications de l'ouvrage influent sur le processus de mélange.

La dispersion de l'effluent étant le résultat de plusieurs mécanismes, la modélisation est généralement délicate (figure 1) :

(a) l'entraînement turbulent à la sortie du jet est régi par l'effet de quantité de mouvement, la géométrie du dispositif de rejet et la turbulence (la différence de densité est sans influence) ; la modélisation implique la similitude géométrique, la loi de Froude, à condition que le nombre de Reynolds du jet soit suffisant (> 2300) ;

(b) la flottabilité du jet, dans le cas d'un rejet chaud ou de densité différente de celle du milieu, est influencée par le mélange dû à la turbulence aux limites du jet ; la modélisation requiert les mêmes conditions qu'en (a) en remplaçant simplement le nombre de Froude par le nombre de Froude réduit $Fr_p = V/\sqrt{gh\Delta\rho/\rho}$ qui introduit l'écart de densité relatif $\Delta\rho/\rho$ de l'effluent par rapport au milieu ;

(c) l'étalement du jet en surface par convection ; en plus du respect du nombre de Froude réduit Fr_p , il convient d'avoir un nombre de Reynolds réduit du milieu ambiant suffisamment grand, ce qui conduit généralement à une distorsion ;

(d) le transport d'ensemble de l'effluent sous l'effet du courant ;

(e) la diffusion et la dispersion due à la turbulence qui exigent un modèle non distordu pour être reproduites fidèlement ;

(f) dans le cas d'un rejet chaud, les échanges thermiques avec l'atmosphère ce qui exige un modèle distordu.

En résumé, la reproduction des phénomènes (a), (b) et (e) nécessite un modèle en similitude géométrique, raisonnablement grand et respectant l'écart de densité $\Delta\rho/\rho$. Les phénomènes (c) et (f), par contre, nécessitent un modèle distordu. Seul le phénomène de transport (d) s'accommode des deux types de modélisation.

En conclusion, la modélisation physique convient bien pour l'étude des configurations de rejet assez complexes dans le champ proche avec un modèle non distordu, tandis que les autres phénomènes se modélisent par calcul (étude du champ lointain par exemple).

1.2.2.4 Modèles sans influence de la surface libre

Il s'agit d'études d'écoulements en charge, comme par exemple la détermination de pertes de charge dans des singularités nécessaire au calcul des écoulements. Aucune influence de la gravité n'étant en cause, le critère de Froude peut être ignoré. Si l'on a une similitude géométrique rigoureuse, il suffit d'avoir un nombre de Reynolds modèle assez grand pour qu'on se place dans le domaine des écoulements turbulents rugueux comme sur le prototype.

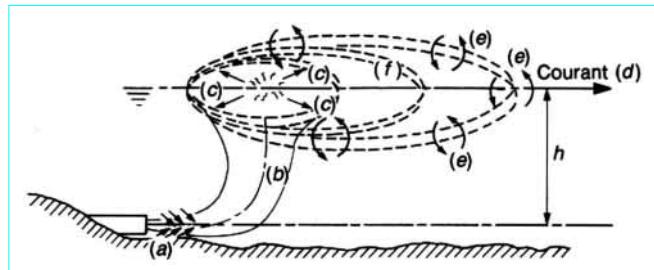


Figure 1 – Modèle de mélanges d'effluents

Dans ce cas, il n'y a pas d'échelle des vitesses (ni des débits) ; tout essai respectant la condition de Reynolds constitue un point de mesure. Dans la pratique, on réalise des essais à des débits croissants jusqu'à être sûr d'avoir atteint la zone où l'influence du nombre de Reynolds n'est plus sensible.

1.2.3 Mise en œuvre des modèles physiques

Une fois définies les caractéristiques du modèle, les phases successives d'une étude sont la construction, l'équipement en moyens de mesure, l'étalonnage, puis l'exploitation.

1.2.3.1 Construction

Pour les modèles d'écoulement à surface libre, le modèle est implanté dans un cuvelage étanche, généralement en maçonnerie (parfois métallique pour les petits modèles). Les lits de rivières sont représentés à partir de profils en travers en tôle, entre lesquels on façonne du mortier. Les zones assez plates comme les plaines d'inondation ou les retenues sont réalisées à partir de linge de niveaux en feuillard (figure 2), entre lesquelles on lisse du mortier. Les structures sont souvent réalisées en matière plastique (transparente si nécessaire) facile à mettre en œuvre et ayant un état de surface excellent (figure 3).

1.2.3.2 Équipement en moyens de mesure

Nota : on se reporterà à la rubrique *Grandeurs hydrauliques et pneumatiques* du traité Mesures et Contrôle.

Les débits introduits dans les modèles sont mesurés soit avec de classiques déversoirs, soit avec des débitmètres (actuellement, beaucoup de débitmètres électromagnétiques). Les niveaux d'eau sont relevés avec de classiques pointes de mesure à vernier pour les régimes permanents, et avec des capteurs de divers types reliés à des dispositifs enregistreurs pour les régimes non permanents (le type de capteur dépend de la rapidité du phénomène à étudier). Les vitesses sont mesurées soit avec des moulinets de petite taille (hélice de diamètre inférieur à 10 mm), soit avec des vélocimètres laser pour les mesures très fines. Il ne faut pas, cependant, oublier la source d'information primordiale que constitue l'observation qualitative des écoulements visualisés au moyen de flotteurs, colorants ou fils de laine.

Certains modèles sont équipés de micro ou mini-ordinateurs assurant le pilotage du déplacement des sondes, l'acquisition et le traitement des mesures (figure 4).

1.2.3.3 Conditions aux limites

Dans le cas le plus courant qui concerne d'une part les écoulements en charge et d'autre part les modèles à surface libre en régime fluvial, on impose un débit à l'amont $Q(t)$ et une charge à l'aval par l'intermédiaire d'un système de vannage.

Le seul cas particulier concerne les modèles à surface libre en régime torrentiel où l'aval n'a pas d'influence sur l'amont ; il convient alors seulement d'imposer le débit entrant $Q(t)$, l'écoulement se faisant librement à l'extrémité aval du modèle.

1.2.3.4 Étalonnage et exploitation

Il s'agit d'une phase fondamentale de l'étude qui conditionne totalement la validité des résultats futurs, en particulier sur les modèles fluviaux où la rugosité du lit peut difficilement être définie *a priori*. C'est par tâtonnements, en ajoutant des éléments de rugosité sur le lit, qu'on cherche à retrouver les écoulements observés en nature (niveaux, vitesses, etc.). Pour les écoulements non permanents, on essaie dans un premier stade de reproduire des écoulements permanents pour diminuer le nombre des paramètres à caler.

Toute la philosophie des études sur modèle repose sur ce principe que, si le modèle a été capable de reproduire les phénomènes du passé au cours de l'étalonnage, il sera également capable de prédire



Figure 2 – Construction d'un modèle à fonds fixes : retenue de Serre-de-la-Fare.



Figure 3 – Structure en plexiglas représentant l'évacuateur de crue du barrage de Serre-de-la-Fare

les effets de la modification projetée du prototype au cours de la phase d'exploitation. C'est pourquoi la partie étalonnage est fondamentale.

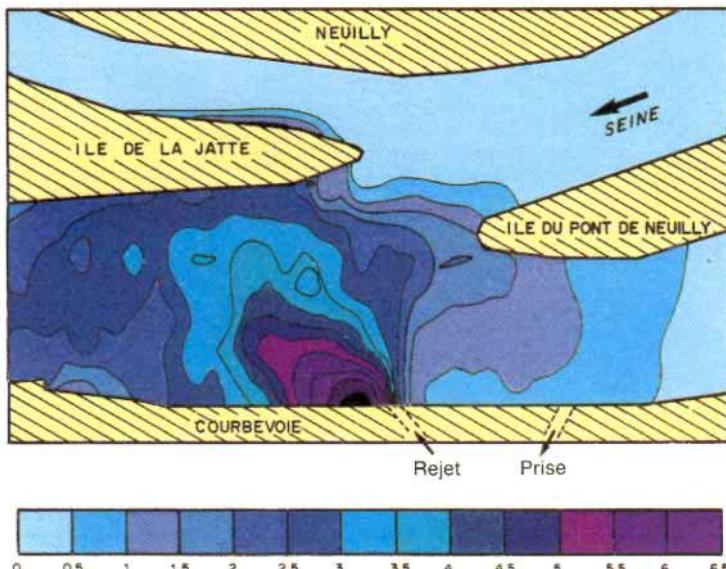
1.3 Modèles à fonds mobiles

Ils concernent exclusivement les problèmes fluviaux sédimento- logiques.

1.3.1 Rappels sur le transport solide par charriage

Le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [4].

Les lits fluviaux sont généralement composés de granulats apportés par l'écoulement. L'expérience montre que le mouvement d'un matériau solide donné, dans une rivière donnée, dépend entièrement de la nature de l'écoulement. Par ailleurs, le mouvement des sédiments est accompagné de certaines structures telles



L'échelle des couleurs indique l'échauffement (en °C) par rapport à la température de l'eau amont.

que les dunes qui peuvent à leur tour modifier les caractéristiques de l'écoulement liquide. Cela signifie qu'il y a interaction entre les phases liquide et solide, d'où l'étude du phénomène diphasique eau-sédiment.

Le terme **transport solide** englobe divers types de phénomènes, un paramètre fondamental étant la taille des grains. On distingue d'une part le transport en **suspension** de particules fines, entièrement au sein du fluide, pour lesquelles la gravité est compensée par les forces dues aux fluctuations turbulentes du fluide, et d'autre part le transport par **charriage** de matériaux plus grossiers qui se déplacent au voisinage immédiat du fond en roulant, glissant ou en effectuant des bonds. C'est ce phénomène du charriage, principal responsable du devenir des lits fluviaux, qui est envisagé ici (le transport par suspension, responsable en particulier des envasements des retenues de barrages et des estuaires, n'est pas justifiable des mêmes moyens d'étude).

1.3.1.1 Écoulement à deux phases liquide-solide

Les composantes du phénomène sont le fluide, le matériau mobile non cohésif et l'écoulement. Dans une approche simplifiée, les paramètres sont au nombre de sept :

- le fluide est défini par sa masse volumique ρ et sa viscosité μ ;
- le matériau est défini par sa masse volumique ρ_s et un diamètre caractéristique D ;
- le fluide supposé en régime permanent, uniforme et en écoulement filaire peut être complètement déterminé par un groupe de trois paramètres :

- h tirant d'eau,
- $\gamma_s = (\rho_s - \rho) g$ définissant la gravité,
- $u_* = \sqrt{ghJ}$ vitesse de cisaillement au fond, caractéristique du profil de vitesses.

L'analyse dimensionnelle permet de montrer que toute grandeur quantifiant le phénomène de charriage, par exemple le débit

solide, peut être exprimée en fonction de quatre produits adimensionnels. L'usage a consacré les grandeurs suivantes [5] :

$$X = \frac{u_* D}{v} \quad Y = \frac{\rho u_*^2}{\gamma_s D} \quad Z = \frac{h}{D} \quad W = \frac{\rho_s}{\rho}$$

X appelé nombre de Reynolds du grain permet de comparer la taille des granulats avec l'épaisseur de la sous-couche laminaire qui existe à la partie inférieure d'un profil de vitesse ; si X est suffisamment grand ($X > 60$ environ), le grain est complètement dans la zone turbulente et le paramètre X n'a, dans ce cas, plus aucune influence sur le charriage ;

Y appelé coefficient d'arrachement caractérise le rapport de la force hydrodynamique au poids du grain ; c'est donc le paramètre prédominant.

Le charriage présente deux caractéristiques bien particulières :

— c'est un phénomène avec un seuil caractérisé par une loi $F(X, Y) = 0$. En deçà d'un certain niveau du paramètre Y , il n'y a pas de mouvement ; pour $X > 60$, la condition de mouvement est $Y > 0,052$ (loi de Shields) ;

— pour un matériau solide donné, un cours d'eau donné a une capacité maximale de charriage, appelée débit solide à saturation.

Il existe diverses lois empiriques de la forme $q_s/\rho u_*^3 = F(Y)$, en désignant par q_s le débit solide par unité de largeur de l'écoulement exprimé en poids déjaugé (c'est-à-dire pesé sous l'eau).

1.3.1.2 Rugosité d'un lit mobile

Dans cet écoulement à deux phases solide-liquide, la résistance du fond est due à la composition de deux éléments :

— la rugosité due aux grains (au repos ou en mouvement) appelée rugosité de peau, qui est caractérisée par la taille des gros éléments, généralement par le paramètre D_{90} (diamètre tel que 90 % des éléments de la granulométrie soient, en poids, inférieurs aux éléments de taille D_{90}) ;

— la rugosité de forme due aux irrégularités qui peuvent prendre naissance quand il y a mouvement, telles que les dunes ou les rides.

Un paramètre caractéristique de ces phénomènes est le produit adimensionnel D_* défini par :

$$D_*^3 = \frac{X^2}{Y} = \frac{D^3 \gamma_s}{\rho v^2}$$

Lorsque $D_* < 15$, on a de petites ondulations tridimensionnelles, les rides, constatées surtout avec des matériaux très fins (vases, sables de moins de 0,6 mm) ; par contre pour $D_* > 15$, on a un chargement à lit plat au voisinage du début de charriage, puis au-delà, un transport par grandes dunes. La rugosité engendrée par ces structures est prépondérante vis-à-vis de la rugosité du grain, d'où l'importance de représenter correctement ces ondes de sable sur les modèles.

1.3.2 Similitude du transport par charriage

Les modèles sédimentologiques sont appelés **à fonds mobiles** (et non pas « à lits mobiles »), car ils sont impuissants à reproduire la déformation des berges et du profil en plan qui fait presque toujours intervenir des phénomènes liés à la cohésion des matériaux. C'est pourquoi on se limite à des modèles représentant les écoulements d'eau et les déplacements corrélatifs de granulats sans cohésion qui tapissent le fond du lit, les berges étant supposées fixes.

Deux cas sont à considérer selon qu'on se limite à la représentation du transport solide sur lit plat ou du transport par dunes.

1.3.2.1 Charriage sur lit plat

Les échelles à déterminer pour définir le modèle sont au nombre de six : \hat{L} , \hat{H} , \hat{V} précédemment définies pour les modèles à fonds fixes, $\hat{\gamma}_s$ échelle des poids volumiques de sédiments sous l'eau, \hat{D}_m échelle du diamètre moyen des granulats dont le charriage doit être étudié, \hat{D}_{90} échelle des gros grains de la granulométrie à reproduire qui sont représentatifs des éléments créant la rugosité (ce paramètre joue exactement le rôle de \hat{d} pour les modèles à fonds fixes).

L'échelle en plan \hat{L} étant imposée par les dimensions maximales envisageables pour le modèle, il reste cinq échelles à déterminer qui doivent satisfaire les relations suivantes.

■ Loi de Froude :

$$\hat{V} = \hat{H}^{1/2} \quad (5)$$

■ Condition de frottement : il suffit de prendre la relation (4) définissant \hat{d} au paragraphe 1.2.1.2 et d'y remplacer \hat{d} par \hat{D}_{90} . Il vient :

$$\hat{D}_{90} = \hat{H}^4 \hat{L}^{-3} \quad (6)$$

■ Conditions de charriage : elles s'appliquent aux éléments moyens de la granulométrie caractérisés par D_m . Comme il a été montré au paragraphe 1.3.1.1, on obtiendra un début de charriage et un débit solide représentatifs pour des conditions hydrauliques homologues, dans la mesure où les paramètres sans dimensions X et Y régissant le phénomène sont conservés, ce qui peut s'écrire :

$$\hat{X} = \hat{Y} = 1$$

Sachant que $Y = \frac{\rho u_*^2}{\gamma_s D_m} = \frac{\rho g h J}{\gamma_s D_m}$:

$$\hat{Y} = 1 \quad \text{s'écrit} \quad \hat{H}^2 \hat{L}^{-1} = \hat{\gamma}_s \hat{D}_m \quad (7)$$

Sachant que $X = \frac{u_* D_m}{v} = \frac{\sqrt{g h J} D_m}{v}$:

$$\hat{X} = 1 \quad \text{s'écrit} \quad \hat{H} \hat{L}^{-1/2} \hat{D}_m = 1$$

relation qui, combinée avec l'équation (7), devient :

$$\hat{\gamma}_s \hat{D}_m^3 = 1 \quad (8)$$

que l'on aurait pu trouver directement en exprimant $\hat{D}_* = 1$.

En résumé, \hat{L} étant fixé, dans le cas général, pour déterminer les 5 échelles \hat{H} , \hat{V} , $\hat{\gamma}_s$, \hat{D}_m , \hat{D}_{90} on dispose des 4 relations (5), (6), (7) et (8), d'où la possibilité de fixer *a priori* une échelle supplémentaire, généralement $\hat{\gamma}_s$, car le choix des matériaux mobiles utilisables au laboratoire est limité.

Un cas particulier important est celui où l'on est dans des conditions de turbulence complète autour du grain, $X > 60$ sur le prototype et sur le modèle, auquel cas la condition (8) $\hat{X} = 1$ n'a pas à être respectée et l'on peut fixer arbitrairement une condition supplémentaire ; généralement on impose $\hat{L} = \hat{H}$, c'est-à-dire d'avoir un modèle non distordu.

Quand tous les calculs sont effectués, il convient de s'assurer de la compatibilité des résultats, en particulier que les valeurs modèles de D_{90} et D_m sont physiquement vraisemblables ($D_{90} > D_m$) et qu'il n'y a pas risque de phénomènes parasites sur le modèle comme la formation de rides ($D_* > 15$) qui créeraient des pertes de charge inacceptables. L'application de la relation (7) permet de trouver les limites des D_m nature représentables. Le tableau 1 donne ces valeurs pour quelques matériaux usuels et quelques échelles courantes.

Enfin, l'exploitation des modèles requiert la connaissance de l'échelle des débits solides et des temps sédimentologiques.

L'expression du débit solide q_s donnée au paragraphe 1.3.1.1 conduit à l'échelle $\hat{q}_s = \hat{H}^3 \hat{L}^{-3/2}$ du fait du respect de $\hat{Y} = 1$. Si l'on recherche le débit solide en volume pour toute la largeur du lit $G_s = q_s L / \gamma_s$ on obtient finalement l'échelle des G_s :

$$\hat{G}_s = \hat{H}^3 \hat{L}^{-1/2} \hat{\gamma}_s^{-1} \quad (9)$$

Tableau 1 – Limites de D_m nature pour quelques matériaux et échelles courantes

Matériau	γ_s / g	$\hat{\gamma}_s$	D_m limite modèle (mm)	D_m limite nature (en mm)		
				$\hat{L} = 30$	$\hat{L} = 50$	$\hat{L} = 100$
Sable	1,6	1	0,6	18	30	60
Bakélite	0,4	4	1	7,5	12,5	25
Polystyrène	0,04	40	2	1,5	2,5	5

Le temps sédimentologique t_s correspond au temps nécessaire pour remplir un volume $L^2 h$ avec un débit solide G_s :

$$t_s = L^2 h / G_s$$

d'où l'échelle :

$$\hat{t}_s = \hat{H}^{-2} \hat{L}^{5/2} \hat{\gamma}_s \quad (10)$$

Il est essentiel de remarquer que cette échelle, qui définit les temps d'exploitation d'un modèle sédimentologique, est fondamentalement différente de l'échelle des temps hydrauliques $\hat{T} = \hat{L} \hat{H}^{-1/2}$ définie au paragraphe 1.2.1.2 pour les modèles à fonds fixes.

1.3.2.2 Modèles avec dunes

Le charriage avec dunes constitue le mode de transport solide le plus fréquent dans les rivières pendant les périodes de hautes eaux (dunes de sable ou de graviers). Cela explique l'importance à représenter correctement les dunes sur les modèles.

Malheureusement, aujourd’hui encore, aucune loi universelle ne permet de définir les caractéristiques des dunes en fonction des paramètres de l’écoulement génératrice et du matériau. L’exposé ci-après présente la pratique en usage dans un grand laboratoire français, mais d’autres institutions étrangères ont des pratiques différentes basées sur leur propre expérience.

Une étude expérimentale en canal [6] a conduit à des lois empiriques de la forme suivante pour les caractéristiques des dunes (figure 5) :

— amplitude δ rapportée au tirant d’eau h :

$$\delta/h = F_1(Y) \quad (11)$$

— longueur d’onde Λ rapportée à D_m :

$$\Lambda/D_m = F_2(Y, Z') \quad (12)$$

avec $Z' = h/D_{90}$

— coefficient de perte de charge λ dans la loi de Darcy-Weisbach :

$$\lambda = \frac{8ghJ}{V^2} = \frac{8J}{Fr^2} = F_3(Y) \quad (13)$$

■ **Cas des modèles non distordus** : si on suppose que le niveau de turbulence est suffisant ($X > 60$), le paramètre X n’intervient pas et il reste à imposer les conditions $\widehat{Fr} = \widehat{Y} = 1$ de sorte que l’amplitude et le coefficient de frottement des dunes sont automatiquement modélisés correctement.

En ce qui concerne la longueur d’onde des dunes, des calculs à partir des formules (7) et (12) permettent d’aboutir à une relation de la forme suivante :

$$\widehat{D}_m \approx \widehat{\gamma}_s \widehat{D}_{90} \quad (14)$$

En conséquence, dans l’hypothèse envisagée où $\widehat{L} = \widehat{H}$ sont donnés, pour déterminer les 4 échelles \widehat{V} , $\widehat{\gamma}_s$, \widehat{D}_m , \widehat{D}_{90} on a les trois relations (5), (7) et (14), de sorte que pour un $\widehat{\gamma}_s$ donné le problème est fermé.

Les mêmes limitations que pour les modèles à lit plat sont à respecter, en particulier la limite $D_* > 15$ sur le modèle, pour éviter la formation de rides parasites. Les valeurs du tableau 1 sont encore valables.

■ **Cas des modèles distordus** : la relation (13) donnant le coefficient de perte de charge de l’écoulement sur un lit tapissé de dunes montre à l’évidence qu’il est impossible d’avoir $\widehat{\lambda} = 1$ sur un modèle en similitude de Froude ($\widehat{Fr} = 1$) sur lequel $\widehat{J} \neq 1$. Il est donc sans espoir d’avoir une similitude de frottement sur un modèle distordu. Cela n’empêche pas cependant des laboratoires de distordre des modèles sédimentologiques et de ne considérer les résultats que sur un plan qualitatif seulement.

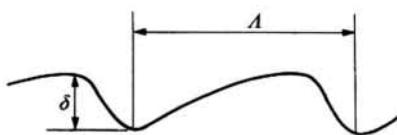


Figure 5 – Caractéristiques des dunes

1.3.3 Mise en œuvre des modèles sédimentologiques

1.3.3.1 Construction

Généralement, un modèle sédimentologique n’est que partiellement à fonds mobiles. Le cuvelage, le champ d’inondation et les berges sont construits comme pour les modèles à fonds fixes et on laisse à l’emplacement du lit mineur une tranchée que l’on équipe d’un système de drains pour remplir et vider le modèle. Des profils en travers en tôle sont calés à un niveau défini, puis on remplit de matériau mobile et l’on forme le lit en s’appuyant sur deux profils successifs. Ces profils en travers sont enfin retirés, de sorte qu’aucun corps fixe et dur ne demeure dans la zone mobile.

1.3.3.2 Choix du matériau mobile

Le matériau le plus courant est le sable, qui donne d’excellents résultats pour reproduire les graviers et les sédiments grossiers. Pour des sédiments plus fins en nature, tels que les sables, il est nécessaire d’employer des matériaux légers. Dans ce domaine, chaque laboratoire a ses habitudes, citons par exemple la bakélite (figure 6) et les polystyrènes.

Il faut noter que la mise en œuvre des matériaux légers sur les modèles est délicate ; en particulier, le démarrage d’un essai doit être réalisé avec beaucoup de doigté pour éviter que des ondes liquides intempestives ne détériorent le modèle des fonds mobiles.

1.3.3.3 Équipement du modèle

À l’amont du modèle, l’alimentation en matériaux solides peut être assurée par un distributeur répartissant les sédiments sur la largeur du lit à une cadence définie (vibrateur plus tapis roulant). À l’aval, une fosse doit être ménagée, suffisamment vaste pour que les sédiments s’y déposent ; une pompe peut permettre de retransporter à l’amont un mélange eau-sédiment.

Les relevés de fonds sont traditionnellement effectués en fin d’essai par lignes de niveaux obtenues par vidange progressive du modèle et pose de fils de laine en limite du plan d’eau ; il suffit de photographier le modèle à la verticale pour avoir une carte des fonds précise.



Figure 6 – Modèle physique à fonds mobiles en bakélite : aménagement de Péage-de-Roussillon

De plus, il existe actuellement des palpeurs de fond qui permettent des levés en cours d'essai. Il s'agit d'appareils basés soit sur la mesure de la conductance entre deux électrodes, soit sur les ultrasons et que l'on déplace sur un système de rails parfaitement horizontaux. Ils donnent la position de la surface libre et du fond.

1.3.3.4 Étalonnage

C'est une opération souvent difficile en raison des modifications des fonds, d'où parfois la nécessité de procéder en deux phases :

— premièrement, un étalonnage des parties fixes du lit (champ d'inondation, berges) avec un lit mineur « gelé », c'est-à-dire où le matériau mobile a été remplacé par du matériau non mobile offrant une rugosité équivalente (par exemple du sable pour remplacer un matériau léger) ;

— en second lieu, l'étalonnage de la partie mobile du lit, ce qui revient en particulier à déterminer le débit solide Q_s à introduire dans le modèle en fonction du débit liquide Q . La relation $Q_s(Q)$ n'étant pratiquement jamais connue, il est nécessaire de la déterminer par tâtonnement : si l'on admet que l'on est dans un état d'équilibre du lit, il convient pour le débit Q considéré de trouver le débit solide Q_s tel que l'on recueille à l'aval du modèle un volume de matériau égal à celui introduit à l'amont.

1.3.4 Exemples d'application

Les deux cas présentés ci-après concernent l'hypothèse du chargement avec lit plat.

1.3.4.1 Le Rhône au voisinage du confluent de la Drôme

Les caractéristiques de la rivière sont les suivantes : une pente moyenne $J \approx 3 \times 10^{-3}$ et des tirants d'eau h dans la fourchette 1 à 5 m. Les sédiments sont constitués de graviers avec $D_m \approx 30$ mm et $D_{90} \approx 100$ mm.

La comparaison du bief à représenter et de l'espace disponible économiquement dans les halls d'essais conduit à une échelle en plan $\hat{L} \geq 250$. Avec une telle échelle, il est évident que le sable ne peut pas être envisagé comme matériau mobile en raison de la formation de rides parasites sur le modèle. Il faut donc s'orienter vers un matériau léger.

Le laboratoire disposant d'un stock de bakélite caractérisée par : $\hat{\gamma}_s = 5$, $D_m = 1,5$ mm et $D_{90} = 3$ mm, il a été essayé de s'accommoder de ce matériau, ce qui minimise les coûts.

Cela revient à rechercher \hat{L} et \hat{H} en imposant $\hat{D}_m = 20$ et $\hat{D}_{90} = 33$.

Si l'on suppose l'écoulement turbulent autour des grains ($X > 60$ sur le modèle, ce qu'il conviendra de vérifier à la fin des calculs), on trouve par application des relations (6) et (7) : $\hat{L} = 300$ et $\hat{H} = 173$, d'où un choix possible : $\hat{L} = 300$ et $\hat{H} = 175$, ce qui est acceptable comme distorsion.

Il reste alors à vérifier que, sur le modèle, l'hypothèse de turbulence est satisfaite, au minimum en crue, période où le chargement se manifeste :

$$X = u_* D_m / v$$

avec $u_* = \sqrt{ghJ}$

On trouve $X = 58$, ce qui est une valeur que l'on peut considérer comme limite.

L'échelle des temps sédimentologiques, donnée par l'équation (10), est $\hat{t}_s = 255$, ce qui signifie qu'une semaine nature est représentée par 40 min sur le modèle, ce qui est parfaitement acceptable dans la pratique.

1.3.4.2 La Loire vers Orléans

La pente de la rivière est $J = 2 \times 10^{-4}$, les tirants d'eau étant caractérisés par $0,5 < h < 9$ m. Le lit est constitué de sable avec $D_m \approx 0,8$ mm et $D_{90} \approx 2,75$ mm.

Le seul matériau mobile possible est une matière plastique très légère, dans le cas présent du styrène (sorte de polystyrène) caractérisé par $\hat{\gamma}_s = 40$ et une granulométrie $D_m \approx 2$ mm et $D_{90} \approx 3$ mm, de sorte qu'il n'y ait pas risque de formation de rides parasites.

L'utilisation des relations (6) et (7) conduit à $\hat{L} = 144$ et $\hat{H} = 42$, de sorte qu'il est possible de choisir pratiquement $\hat{L} = 150$ et $\hat{H} = 40$.

On trouve par ailleurs que le paramètre X vaut de l'ordre de 80 sur le modèle, ce qui est parfaitement satisfaisant.

La difficulté, par contre, provient de l'échelle des temps sédimentologiques $\hat{t}_s = 5\,640$, ce qui signifie qu'une semaine nature est représentée par moins de 2 min sur le modèle. L'utilisation d'une telle échelle de temps entraîne des effets non permanents totalement inacceptables, d'où l'artifice consistant à « regrouper » n cycles hydrologiques en divisant l'échelle des temps par un facteur n (même procédé que pour les cycles de marée sur les modèles maritimes). De plus, au cours de l'étalonnage, on peut être amené à jouer sur la condition aval de cote pour obtenir des pentes de lignes d'eau satisfaisantes dans la zone d'étude. Il faut savoir que l'exploitation de tels modèles requiert une expérience que seuls possèdent les laboratoires spécialisés.

2. Modèles mathématiques

2.1 Ce qu'est un modèle mathématique

Ainsi qu'on l'a dit précédemment, un modèle mathématique est une schématisation de la réalité permettant le calcul des grandeurs intéressant l'ingénieur. La notion de modèle, au sens large, inclut donc les formules globales, souvent empiriques, de l'hydraulique classique. À ce titre, la modélisation mathématique a sûrement précédé l'emploi des modèles physiques. Ainsi trouve-t-on, dans le traité d'hydrodynamique de l'Abbé Bossut, datant du XVIII^e siècle, que pour évaluer la « dépense » d'un canal (c'est-à-dire le débit), on peut considérer que « la résistance du frottement est la dixième partie de la gravité absolue ! » Il s'agit là d'un modèle. Cependant, un sens plus précis est donné habituellement au terme de modèle mathématique, impliquant l'intervention d'équations aux dérivées partielles, résolues grâce à l'utilisation d'un ordinateur. Dans cette acception, les premiers modèles fluviaux ont commencé à se développer au début des années soixante.

Les divers éléments constitutifs d'un modèle mathématique sont les suivants :

— un domaine de l'espace où l'on va calculer les caractéristiques des écoulements et une représentation de la topographie des fonds (qui viendra au cours des calculs pour un modèle d'évolution des fonds) ;

— un système d'équations à résoudre dans ce domaine, accompagné de conditions aux limites qui représentent l'interaction entre domaine modélisé et extérieur de ce domaine (amont, aval) ;

— pour un écoulement transitoire, il faut préciser l'intervalle de temps du calcul et ajouter des conditions initiales, c'est-à-dire la valeur des inconnues au début de l'intervalle de temps ;

— une discrétisation et une méthode de résolution.

La discrétisation consiste d'abord à diviser le domaine en éléments joints ou mailles. En dimension 1, les mailles sont des segments ; en dimension 2, des triangles ou quadrilatères pouvant être disposés ou non régulièrement ; en dimension 3, des prismes, tétraèdres ou parallélépipèdes. Les extrémités des segments et sommets des polygones ou polyèdres sont les *nœuds* du maillage. De même, le temps est divisé, pour les calculs transitoires, en pas de temps de quelques

secondes à quelques heures selon le type de calcul. Le nombre des mailles et des nœuds conditionne directement, d'une part, le temps et l'espace mémoire requis pour le calcul sur ordinateur mais, d'autre part, la précision des résultats. Ce nombre peut aller de quelques dizaines à plusieurs milliers.

De même, les équations aux dérivées partielles sont discrétisées, c'est-à-dire approchées par des équations algébriques ayant pour inconnues les valeurs des fonctions à calculer aux nœuds du maillage. Plusieurs méthodes de discrétisation existent (différences finies, volumes finis, éléments finis, voir [7]).

Enfin, une méthode (ou algorithme) de calcul, programmée sur ordinateur, résout ces équations algébriques, fournissant ainsi les résultats escomptés.

Il existe plusieurs sortes de modèles mathématiques fluviaux correspondant au degré plus ou moins grand de schématisation des équations.

Le modèle le plus complexe s'appuie sur les équations de Navier-Stokes à trois dimensions (les trois coordonnées spatiales), où les inconnues sont la pression, les trois composantes de la vitesse et la cote de la surface libre. Il n'est mentionné ici que pour mémoire, étant peu utilisé dans la pratique car de mise en œuvre difficile. Dans l'ordre de complexité décroissante viennent les modèles bidimensionnels, où l'on s'affranchit des variations des grandeurs selon la coordonnée verticale (modèles dits bidimensionnels horizontaux), et monodimensionnels qui supposent, de plus, ces grandeurs peu variables dans chaque section perpendiculaire à l'axe de l'écoulement.

Les modèles hydrologiques pour la propagation des débits représentent une classe à part, marquant un degré de plus dans la simplification : la géométrie de l'écoulement n'y est pas représentée directement et le domaine n'est constitué que d'une maille, la seule inconnue étant le débit à l'aval.

Les modèles d'écoulements peuvent s'enrichir d'une équation régissant l'évolution de la concentration d'une substance présente au sein du fluide, et être couplés à des équations rendant compte de l'évolution des fonds en fonction des conditions hydrauliques. Enfin, mentionnons, pour mémoire, les modèles d'écoulements souterrains dont l'équation représentative (loi de Darcy) est une simplification linéaire de l'équation dynamique de Navier-Stokes.

2.2 Principes des modèles mathématiques

2.2.1 Modèles bidimensionnels horizontaux

Les hypothèses essentielles conditionnant l'emploi de ces modèles sont l'homogénéité des vitesses selon la verticale et la répartition hydrostatique de la pression découlant de la faiblesse de l'accélération verticale vis-à-vis de la gravité. Dans ces conditions, la pression p en un point de cote z et la cote Z de la surface libre sur une même verticale sont liées par : $p + pgz = pgZ$.

On peut alors établir, soit directement, soit par intégration des équations de Navier-Stokes entre le fond et la surface libre, les équations de Saint-Venant en dimension 2 :

— équation de continuité :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} h = 0$$

— équations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial uh}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot uh + gh \frac{\partial Z}{\partial x} &= T_x + D_x \\ \frac{\partial vh}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot vh + gh \frac{\partial Z}{\partial y} &= T_y + D_y \end{aligned}$$

Le terme T de composantes T_x, T_y représente une source (ou puits) de quantité de mouvement et englobe essentiellement la contrainte exercée sur le fluide à la surface libre (entraînement dû au vent) et au fond. On donne souvent à ce terme de frottement au fond une expression résultant de la loi de Strickler :

$$T = - \frac{g \mathbf{u} \|\mathbf{u}\|}{K^2 h^{1/3}}$$

Le terme D représente la diffusion de quantité de mouvement due à la turbulence. Ce terme est souvent négligé, ce qui est justifié lorsqu'on traite des problèmes de grande emprise, mais il peut avoir une grande importance, par exemple quand on s'intéresse à la propagation d'un effluent où le phénomène de diffusion doit être pris en compte. L'expression employée est alors de la forme :

$$D_x = \operatorname{div} (hv_T \operatorname{grad} u)$$

$$D_y = \operatorname{div} (hv_T \operatorname{grad} v)$$

avec v_T coefficient de viscosité turbulente.

La valeur de ce dernier est obtenue, dans les modèles les plus élaborés, par résolution de deux équations supplémentaires ayant pour inconnues l'énergie turbulente k et son taux de dissipation ε (modèles $k - \varepsilon$) (se reporter à la référence [8] pour plus de détails).

L'équation d'évolution de la concentration d'un effluent (ou de la température) est une équation de transport diffusion de la forme :

$$\frac{\partial hc}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} hc = \operatorname{div} (hv_T \operatorname{grad} c) + hP$$

avec P terme de production (ou de destruction) volumique.

Il est fondamental de noter que l'emploi de cette équation suppose l'effluent réparti de manière homogène sur la verticale. En particulier, le modèle bidimensionnel est incapable de représenter les stratifications thermiques et les phénomènes de densité.

Comme pour les modèles physiques, il est nécessaire d'établir le modèle en jouant sur le coefficient de rugosité de Strickler jusqu'à retrouver des niveaux d'eau correspondant à des débits donnés.

Sans détailler le processus de discrétisation, mentionnons **deux points importants**.

■ Les écoulements à surface libre sont le siège d'ondes de gravité, bien décrites par les équations, tant que l'on reste dans le cadre des hypothèses (ondes longues). Il importe que le schéma numérique ne filtre pas ces ondes. Pour cela, la discrétisation des équations selon le temps doit être d'un bon ordre de précision (ordre 2 au moins), et une longueur d'onde doit être représentée par un nombre suffisant de nœuds du maillage (au moins 10). Une période doit être divisée en un nombre équivalent de pas de temps, pour une précision optimale.

■ Pour représenter correctement des écoulements à forts nombres de Froude (proches ou dépassant l'unité), des schémas numériques particuliers sont requis. Ce problème, très difficile sur le plan théorique en dimension 2, est davantage explicité au paragraphe suivant concernant les modèles monodimensionnels, où il se pose un peu plus simplement.

Les modèles bidimensionnels sont utilisés pour résoudre des problèmes de faible ou moyenne emprise du type suivant :

— problèmes de détail de l'écoulement dans un lit mineur (figure 7 et exemple du paragraphe 2.3.4) ;

— dilution de rejet en lit mineur dans le champ moyen (figure 8) ;

— onde de submersion dans une plaine large où l'on ne peut distinguer de direction privilégiée de l'écoulement.

2.2.2 Modèles monodimensionnels

Ce sont, de loin, les plus répandus et de nombreux laboratoires et bureaux d'études possèdent des logiciels monodimensionnels plus ou moins perfectionnés, en France comme à l'étranger. Certains sont commercialisés et connaissent une large diffusion.

Dans le cas filaire, on suppose un écoulement bien « canalisé », c'est-à-dire organisé par rapport à une direction préférentielle que l'on nomme « axe de l'écoulement ».

L'homogénéité des grandeurs dans une section normale à l'écoulement suppose :

- une faible variation de la vitesse dans la section ;
- une surface libre horizontale.

Ces conditions ne sont réunies qu'en l'absence de singularités, pour une géométrie graduellement variée, où les filets fluides ont une faible courbure.

Alors, on peut admettre que la pression est hydrostatique et la quantité $p^* = p + \rho g z$ est constante dans la section, donc égale à sa valeur à la surface libre :

$$p^* = \rho g Z(x)$$

On peut établir, à l'aide de ces hypothèses, les équations de Saint-Venant en dimension 1 :

- équation de continuité :

$$B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_\ell \quad (15)$$

— équation dynamique :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\beta Q U) + g S \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + J \right) = \varphi_\ell \quad (16)$$

Le coefficient β , encore appelé coefficient de Boussinesq, a pour expression exacte :

$$\beta = \frac{\int_S u^2 dS}{U^2 S}$$

Il prend en compte l'inhomogénéité (faible) de la vitesse dans la section et l'on constate expérimentalement qu'il est peu différent de 1 pour une section de forme simple dans un lit unique.

Les termes du second membre correspondent à un apport (ou un prélevement) latéral de débit q_ℓ et de quantité de mouvement φ_ℓ par unité de longueur. Ces termes doivent être pris en compte dans le cas d'un débordement par-dessus la berge par exemple.

Quant au coefficient de perte de charge J , on le relie aux grandeurs moyennes par la loi expérimentale de Strickler :

$$J = \frac{Q^2}{K^2 S^2 R_H^{4/3}} = \frac{Q^2}{D^2}$$

avec $D = K S R_H^{2/3}$ la débitance.

Il faut noter que l'axe d'écoulement est variable avec le débit : aux faibles débits, il est celui du lit mineur et aux forts débits celui du lit majeur, qui peut être très différent comme le montre la figure 9.

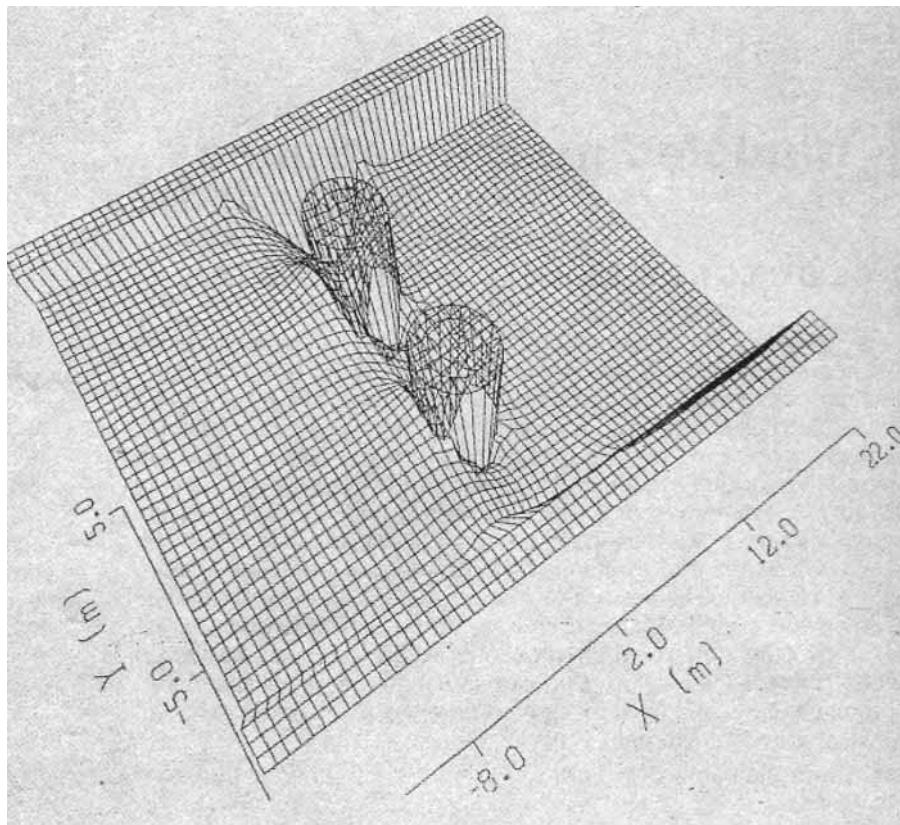


Figure 7 – Vue en perspective de la surface libre autour de piles de ponts, calculée par modèle bidimensionnel

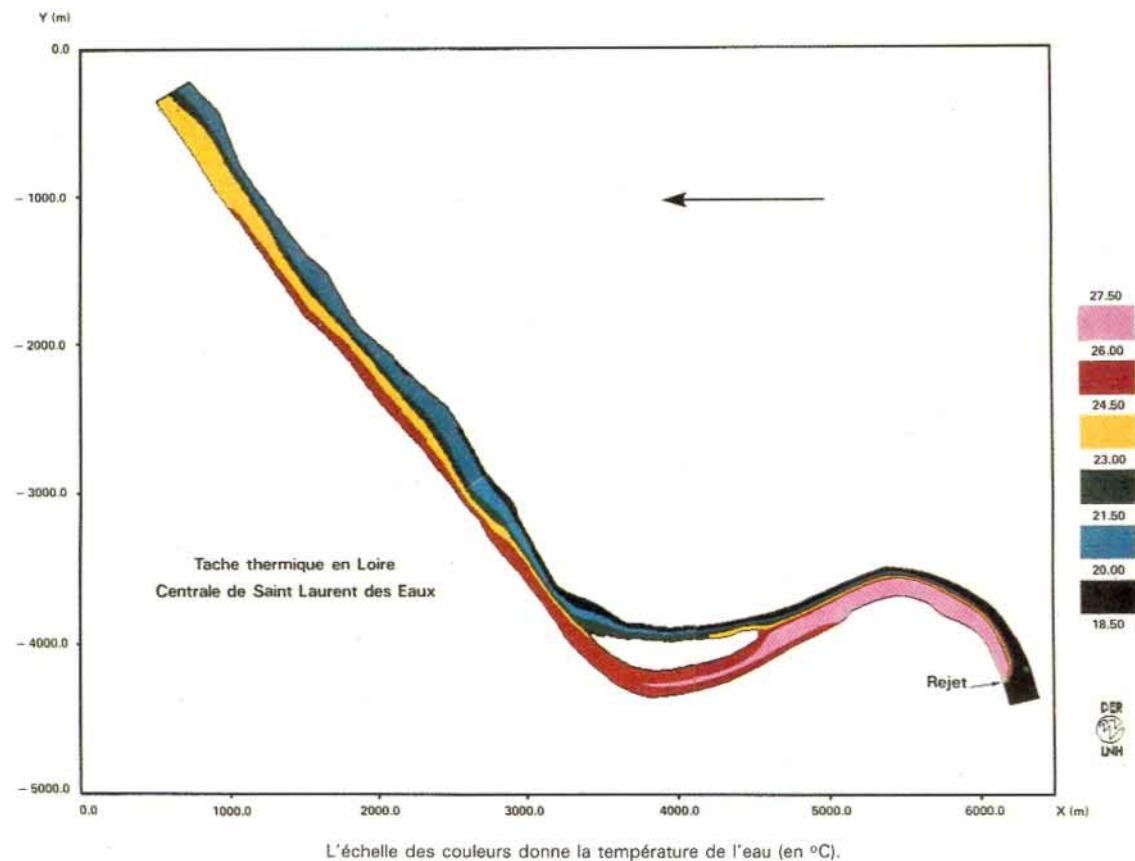


Figure 8 – Carte de rejet thermique en Loire de la centrale nucléaire de Saint-Laurent-des-Eaux, calculée par modèle bidimensionnel

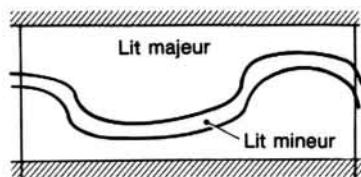


Figure 9 – Variation de l'axe d'écoulement en fonction du débit

Il s'agit là du modèle de base qui peut être enrichi de multiples options pour élargir le domaine d'application. Les principales sont énumérées ci-après.

2.2.2.1 Écoulements en lits composés

La section transversale du lit d'une rivière en crue peut comporter des parties de caractéristiques différentes (tirant d'eau, rugosité), comme le montre le profil en travers type de la figure 10.

Le lit mineur correspond à la partie de la vallée la plus fréquemment mouillée et donc la plus lisse ; sa rugosité est en général homogène sur de longs biefs. Par contre, le lit majeur, occupé quelques jours seulement par an, est plus hétérogène. Sa rugosité est plus importante, car il est encombré de végétation et de constructions.

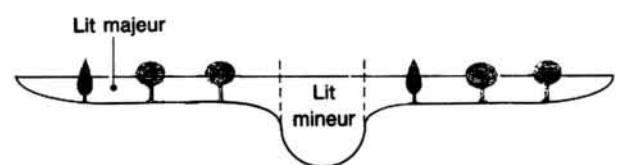


Figure 10 – Lits composés

On distingue donc les débits du lit mineur Q_m et du lit majeur Q_M et, plus généralement, pour une section composite, les débits des écoulements élémentaires Q_i (avec $i = 1, 2, \dots, n$).

On conserve le système d'équations (15) et (16), le coefficient β devenant alors :

$$\beta = \frac{\sum_i \beta_i \frac{A_i^2}{S_i}}{\frac{Q^2}{S}}$$

et le terme de frottement :

$$J = \frac{Q^2}{D_e^2}$$

$$\text{avec } D_e^2 = \frac{Q^2 S}{\sum_i \frac{Q_i^2 S_i}{D_i^2}} \quad (D_e : \text{débitance équivalente du lit composé}).$$

Le système n'est fermé que si la répartition des débits Q_i est connue. Plusieurs fermetures ont été proposées, notamment la formulation « Debord » [9].

2.2.2.2 Singularités

On peut rarement considérer le cours d'une rivière comme justifiable de la modélisation de Saint-Venant sur de longs biefs : de nombreuses singularités se présentent, soit à cause de variations naturelles brusques de géométrie, soit à cause de la présence d'ouvrages implantés dans le lit.

On trouve ainsi des seuils, des élargissements brusques, des confluents avec d'autres cours d'eau, des ponts, des barrages, des canaux de dérivation, etc.

La modélisation de ces singularités renonce à la description fine de l'écoulement au voisinage de la zone singulière et consiste à écrire des relations de *transfert* entre l'amont et l'aval de la zone : une relation de continuité et une relation dynamique qui lient les inconnues amont Q_1, Z_1 et aval Q_2, Z_2 .

En général, on néglige les effets non permanents, ce qui est justifié si la zone singulière est de faible longueur vis-à-vis de la longueur totale du domaine de calcul, le temps de propagation entre les limites de la zone pouvant, dans ce cas, être considéré comme nul.

L'équation de continuité se réduit donc, s'il n'y a pas apport de débit, à l'égalité :

$$Q_1 = Q_2$$

Quant à l'équation dynamique, elle est empirique et fait intervenir des coefficients calés sur l'expérience. On évite ainsi le calcul fin de l'écoulement, en général à caractère tridimensionnel très marqué, et notamment le calcul explicite d'éventuels ressauts hydrauliques. Ces relations dépendent du type de singularité considérée : l'effet dynamique d'un élargissement brusque, d'un obstacle dans le lit, ou d'un confluent, est traduit par une perte de charge singulière, celui d'un seuil par une loi de débit dépendante de la cote aval si le seuil est noyé, et indépendante sinon.

Le modèle monodimensionnel peut aussi traiter le passage en charge qui se produit, par exemple, dans le cas de l'écoulement sous un pont, à fort débit, lorsque la cote de la surface libre atteint le niveau du tablier.

Les sections fermées où l'écoulement est susceptible de passer en charge sont prolongées par une fente fictive (dite fente de Preissmann) (figure 11) et cet artifice permet de ne pas distinguer dans la résolution les tronçons en charge des autres. La fente doit être de très faible épaisseur pour que le volume d'eau qu'elle enferme (dans le calcul) soit négligeable, et le frottement ne doit pas s'appliquer à ses parois sous peine d'erreur.

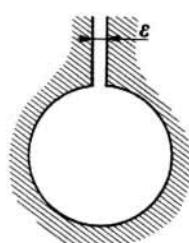


Figure 11 – Fente de Preissmann

2.2.2.3 Réseaux hydrauliques et casiers d'inondation

Fréquemment, on doit traiter non pas un seul tronçon, mais un ensemble de rivières et de canaux se raccordant les uns aux autres et formant un réseau hydraulique. Ce peut être un réseau existant en permanence, ou occasionnel en période de crue seulement, quand l'écoulement se divise et se rejoint, en suivant des directions bien définies, entre des digues, dans des bras morts réactivés ou le long de certains obstacles.

Dans ces tronçons d'écoulement, on écrit les équations de Saint-Venant mais, bien évidemment, on ne peut les résoudre indépendamment dans chacune des branches, faute de conditions aux limites connues à leurs extrémités. On ajoute donc des relations de liaison aux zones de jonction entre tronçons, qui sont la continuité des débits et, soit l'égalité des cotes, soit une relation plus complexe, de perte de charge par exemple.

Dans le champ d'inondation, les vitesses sont en moyenne plus faibles que dans les chenaux et l'on peut souvent distinguer, découpées par les obstacles naturels (remblais, levées de terre), des cellules ou *casiers* d'inondation. Les échanges d'eau des casiers avec la rivière et entre eux se font par déversement au-dessus des obstacles, par passages busés, brèches, etc. (figure 12). La modélisation adoptée consiste à supposer que, dans chaque casier, la surface libre reste horizontale lors du remplissage ou de la vidange (une équation de continuité par casier) et à approcher les échanges par des lois empiriques de divers types : lois de seuil, siphon, chenal, etc. Les inconnues du système sont alors les cotes dans les casiers et les débits d'échanges, en nombre égal avec les relations qui les lient.

2.2.2.4 Étalonnage

L'étalonnage consiste à régler les divers coefficients du modèle (coefficients de Strickler, de perte de charge, de débit des seuils, des lois d'échanges) de manière à retrouver des niveaux de crues connues. Ces paramètres sont souvent nombreux (lorsqu'interviennent des casiers, en particulier) et l'étalonnage est alors long et difficile, obligeant parfois à revoir les choix de modélisation. De plus, les données naturelles sont souvent peu abondantes.

Cependant, les modèles de réseaux et casiers sont des outils indispensables d'investigation, en particulier pour des études d'emprise géographique importante pour lesquelles un modèle physique n'est pas envisageable.

2.2.2.5 Écoulements torrentiels et ressauts

Lorsque le nombre de Froude est supérieur à 1, le courant (U) est plus rapide que les ondes (de célérité $\sqrt{gS/B}$). Celles-ci sont emportées vers l'aval et une perturbation ne peut donc pas se propager en amont de l'endroit où elle a été créée. L'écoulement est alors dit *torrentiel*. La transition de l'écoulement torrentiel rapide à l'écoulement fluvial plus lent se fait par un ressaut hydraulique avec une élévation du tirant d'eau. Cette zone est agitée et il s'y produit une intense dissipation d'énergie. Le modèle de Saint-Venant traduit ce phénomène de façon approchée par une discontinuité brutale du tirant d'eau. Les écoulements torrentiels et particulièrement les ressauts sont, de ce fait, difficiles à calculer par des schémas numériques ordinaires. Les méthodes les plus anciennes consistent à traiter la zone du ressaut par une procédure particulière incluant la détection, le suivi et la disparition de la discontinuité. Des méthodes récentes, encore en cours de progrès, permettent un traitement « aveugle » grâce au respect de certaines propriétés mathématiques (schémas conservatifs, voir [10]).

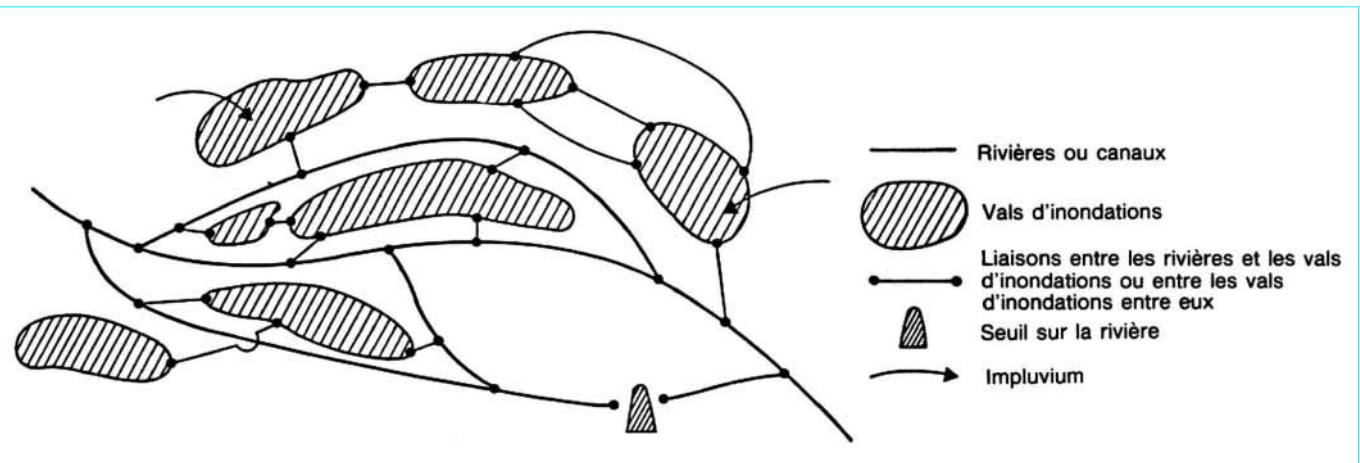


Figure 12 – Schéma de principe d'un réseau hydraulique avec casiers d'inondation

2.2.3 Modèles hydrologiques

Ils sont nombreux. Citons seulement le modèle d'Hayami qui répond à l'équation d'une « crue diffusante » :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C_c \frac{\partial Q}{\partial x} = \sigma \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

avec C_c célérité de propagation de la crue,
 σ atténuation.

Ces coefficients sont déterminés par calage sur des crues connues et parfois pris variables en fonction du débit.

Ce genre de modèle est surtout utilisé pour la prévision des débits en temps réel, mais aussi comme outil simplifié de calcul de la propagation. Cette simplicité (non représentation de la topographie) interdit leur utilisation pour évaluer l'influence d'un aménagement sur les écoulements de crue : ils sont totalement liés aux conditions pour lesquelles ils ont été étalonnés.

2.2.4 Modèles d'évolution du lit

Le principe est similaire en bidimensionnel et monodimensionnel et c'est ce dernier cas qui est abordé ci-après.

2.2.4.1 Charriage

L'évolution des fonds est régie par :

— l'action du fluide sur les matériaux constitutifs du lit, que l'on ne sait traduire que par une relation empirique, par exemple la loi de Meyer-Peter et Muller (une des plus employées) donnant le débit solide :

$$\left. \begin{array}{ll} q_s = 8 \sqrt{\frac{1}{\rho} (\tau - \tau_c)^{3/2}} & \text{si } \tau \geq \tau_c \\ q_s = 0 & \text{si } \tau < \tau_c \end{array} \right\} \quad (17)$$

avec τ contrainte de frottement dépendant de l'écoulement,
 τ_c contrainte critique de début de charriage pour laquelle Meyer-Peter admet :

$$\tau_c = Y_c (\rho_s - \rho) g D_m \quad (Y_c = 0,047)$$

Il existe un grand nombre de telles relations, souvent peu cohérentes entre elles, et il faut être conscient qu'elles donnent au mieux un ordre de grandeur ;

— la conservation de la masse de sédiments qui s'écrit, dans le cas simple d'un lit de section rectangulaire :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \frac{1}{\gamma_s} \frac{\partial p q_s}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

L'ensemble des deux équations (17) et (18) couplées aux équations (15) et (16) suffit à définir le comportement des phases solide et liquide et leur interaction.

Il faut ici signaler quelques-unes des difficultés de la modélisation.

■ **Calcul de la contrainte τ** : le modèle n'est pas assez fin pour représenter les dunes éventuelles et leur migration : il considère un lit moyen et le terme de rugosité J de l'équation de Saint-Venant agglomère le frottement réel (rugosité de peau) et les pertes de charge singulières dues aux dunes (rugosité de forme). Or la contrainte τ intervenant dans le calcul du débit solide ne doit tenir compte que du premier des deux phénomènes et n'est déductible de J qu'au prix d'une approximation sommaire.

■ **Influence de la granulométrie** : la simplicité demande de caractériser le matériau par le diamètre moyen D_m . Cependant, le lit des rivières est généralement composé de matériaux hétérogènes mêlant sable fin, graviers, galets. Cette étendue granulométrique a, sur le transport, des conséquences qui peuvent être extrêmes : ainsi, le blocage de l'érosion par pavage ; ce phénomène se produit lorsque, en cours d'érosion, le courant a la force nécessaire pour entraîner les éléments les plus fins mais pas les plus gros. La proportion de ces derniers dans la couche de surface peut alors croître jusqu'à la formation d'une armure responsable de l'arrêt total de l'érosion. Cette difficulté est résolue dans les modèles les plus sophistiqués, mais dont les utilisations pratiques sont peu fréquentes.

Ces modèles sont donc relativement grossiers et très empiriques (lois de transport, calcul de la contrainte). Leur étalonnage, qui nécessiterait la connaissance de l'évolution des fonds sur de longues périodes, se heurte le plus souvent à l'absence de données de ce type. Enfin, leur ambition est encore limitée à la détermination de l'évolution du profil en long, et non au tracé en plan, les érosions de berge responsables de la formation et du mouvement des méandres n'étant pas prises en compte.

Ils sont, cependant, les seuls outils élaborés dont on dispose pour avoir une idée de l'évolution d'ensemble d'un cours d'eau sur une longue période lorsqu'on modifie les conditions du transport solide, par exemple en construisant un barrage.

2.2.4.2 Suspension

Quelques problèmes importants justifient le développement actuel de la modélisation mathématique de la suspension :

- remise en suspension en période de crue de sédiments chargés de matière polluante ;
- sédimentation dans les réservoirs.

Les formules de débit solide en suspension étant d'une application limitée (écoulement permanent, sédiments non cohésifs), on préfère détailler le processus : le gradient de débit solide selon Ox étant égal au bilan érosion moins dépôt, on représente séparément chacun de ces deux phénomènes. Or le dépôt dépend évidemment de la concentration de matière dans le fluide et une équation d'évolution doit donc être écrite pour cette inconnue :

$$\frac{\partial SC}{\partial t} + \frac{\partial SCU}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(kS \frac{\partial C}{\partial x} \right) + Q_e - Q_d$$

C est la concentration volumique de matières en suspension moyenne dans la section et son évolution provient d'un transport par le courant (deuxième terme du premier membre), d'une dispersion résultant des hétérogénéités des profils de vitesse et de concentration dans la section, d'un terme source d'érosion et d'un terme puits de dépôt (débit volumique par unité de longueur).

Le coefficient de dispersion est de l'ordre de quelques dizaines de m^2/s et il est d'autant plus faible que la diffusion turbulente est forte dans la section (cette diffusion homogénéise, en effet, vitesse et concentration).

Quant aux termes d'érosion-dépôt, ils sont exprimés par des lois empiriques prenant des formes différentes selon le sédiment considéré et notamment selon sa cohésion, et faisant intervenir la contrainte exercée par l'écoulement sur le lit.

L'évolution du sédiment est régie par une équation de continuité où l'on retrouve les débits d'érosion-dépôt (affectés des signes inverses de ceux qu'ils ont dans l'équation précédente). Cependant, l'écriture formelle de cette équation devient difficile dans le cas des matériaux cohésifs où l'on doit tenir compte du tassemement.

2.3 Exemples

2.3.1 Régulation du plan d'eau d'une retenue

Le cas cité est celui du bief du Rhin situé entre les deux aménagements hydroélectriques de Gerstheim et Strasbourg (figure 13a). La navigation impose que le niveau d'eau doit rester dans un intervalle très resserré (de l'ordre de 10 cm). Le régulateur doit donc agir sur le débit de l'aménagement aval en fonction du débit entrant à l'amont pour respecter ces contraintes. Sa mise au point nécessite donc de connaître la réaction de la retenue en terme de niveaux lors des manœuvres amont ou aval. Il est, pour cela, nécessaire de construire un modèle mathématique du bief. Dans le cas considéré, la retenue communique avec le bassin de Plöbsheim. Selon qu'il se vidange ou se remplit, l'écoulement change de sens au niveau du confluent et, en tout cas, conditionne le comportement du bief. C'est pourquoi il a été nécessaire de le représenter comme une branche dans le réseau hydraulique (figure 13b).

2.3.2 Protection contre les crues

La plaine d'Antananarivo, à Madagascar, se présente comme une cuvette de 600 km^2 où convergent quatre rivières se réunissant en un seul cours d'eau. Celui-ci sort de la cuvette par le déversoir naturel que constitue le seuil rocheux des chutes de Farahantsana. Ces rivières ont pour particularité, par suite d'endiguements, de couler au-dessus de leur plaine d'inondation. Aussi les inondations sont-elles graves, endommageant les rizières qui occupent la plus grande partie de la plaine. L'inondation catastrophique de 1959 a

démontré la nécessité de définir un programme de travaux de protection. Des travaux locaux ne sont pas suffisants et une conception globale de défense est nécessaire. Celle-ci pourrait être une combinaison :

- de la création de barrages écrêteurs de crues sur certaines rivières ;
- d'un approfondissement du chenal aval pour augmenter la capacité d'évacuation des chutes de Farahantsana ;
- d'un aménagement de certains rétrécissements qui sont des obstacles à l'écoulement.

Un modèle mathématique que l'écoulement des crues a été construit pour tester l'efficacité de divers scénarios de protection. Le modèle décrit les quatre rivières par un réseau hydraulique de 180 km de longueur cumulée et les vols d'inondation par soixante-deux casiers (figure 14). Il a permis de trouver un schéma technique cohérent d'aménagement minimisant le coût économique des travaux.

2.3.3 Évolution du lit

Le Missouri a été domestiqué depuis trente ans pour permettre la navigation et récupérer des terrains agricoles fertiles bordant son cours. Ces objectifs ont été atteints grâce à la construction de barrages, à la protection des berges et à l'implantation d'épis destinés à maintenir un chenal central dans la rivière. Toutefois, on observe une érosion généralisée importante du lit, atteignant 2,4 m à Sioux City (Iowa) en vingt ans. Cette érosion s'accompagne d'un abaissement correspondant de la ligne d'eau. Si cette tendance se poursuit, on risque d'assister à des déchaussements de piles de ponts, à l'arrêt de fonctionnement de prises d'eau, etc. Il est donc important de la prévoir et si possible de l'enrayer [11].

Le modèle s'étend de Gavins Point Dam (à la frontière entre le Nebraska et le Dakota du Sud) à la frontière Iowa-Missouri, soit une longueur de 415 km.

Après étalonnage sur la période 1960-1980, divers scénarios ont été étudiés sur la période 1980-2000 :

- sans aménagement particulier, on constate que l'érosion se poursuit à un rythme ralenti ;
- l'élargissement du chenal de navigation, ou une régularisation poussée du débit par les barrages à l'amont, permet de diminuer notablement le creusement.

2.3.4 Pile de pont dans un lit de rivière

La figure 15b montre une visualisation des courants calculés par un modèle bidimensionnel dans une portion du canal de Miribel et du vieux Rhône à l'est de Lyon. Cette étude, effectuée lors du doublement du viaduc routier de Sermenaz avait pour objet de rechercher la meilleure position des piles du deuxième viaduc, c'est-à-dire dans le sillage des piles du premier. Plusieurs positions des piles ont été essayées afin de déterminer la meilleure, qui est celle montrée sur la figure. Les zones rouges sont des zones de faible vitesse et de recirculation, les zones à fortes vitesses étant indiquées en bleu. La figure 15a montre le maillage du calcul formé d'environ 6 000 triangles avec 3 000 nœuds.

2.4 Mise en œuvre des modèles

Comme celle d'un modèle physique, la mise en œuvre d'un modèle mathématique se décompose en trois étapes : construction d'un modèle, étalonnage et exploitation.

Le système d'équations du modèle est résolu par un logiciel général et les spécificités du site étudié sont rassemblées sous forme de fichiers de données qui sont exploités par le logiciel de résolution.

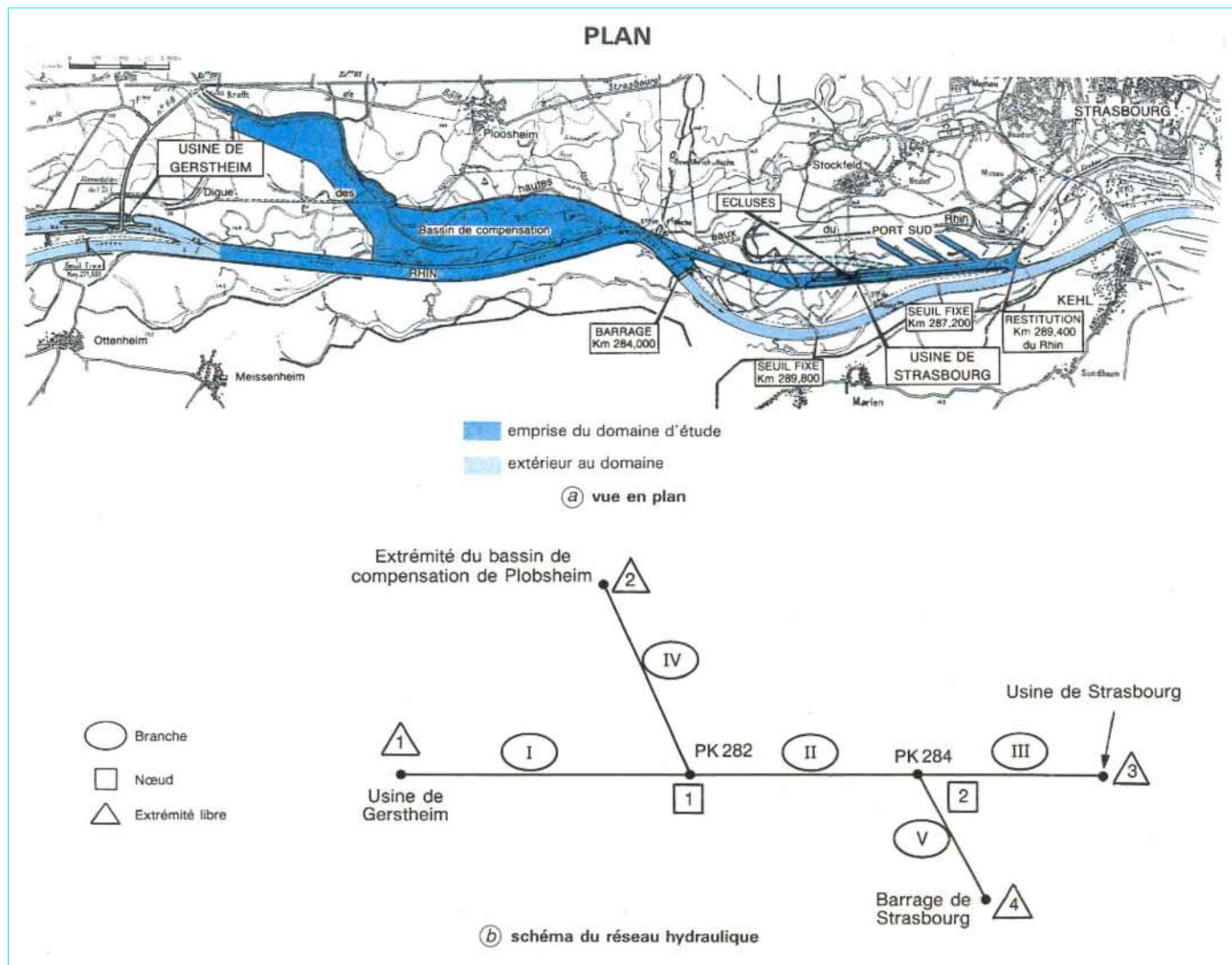


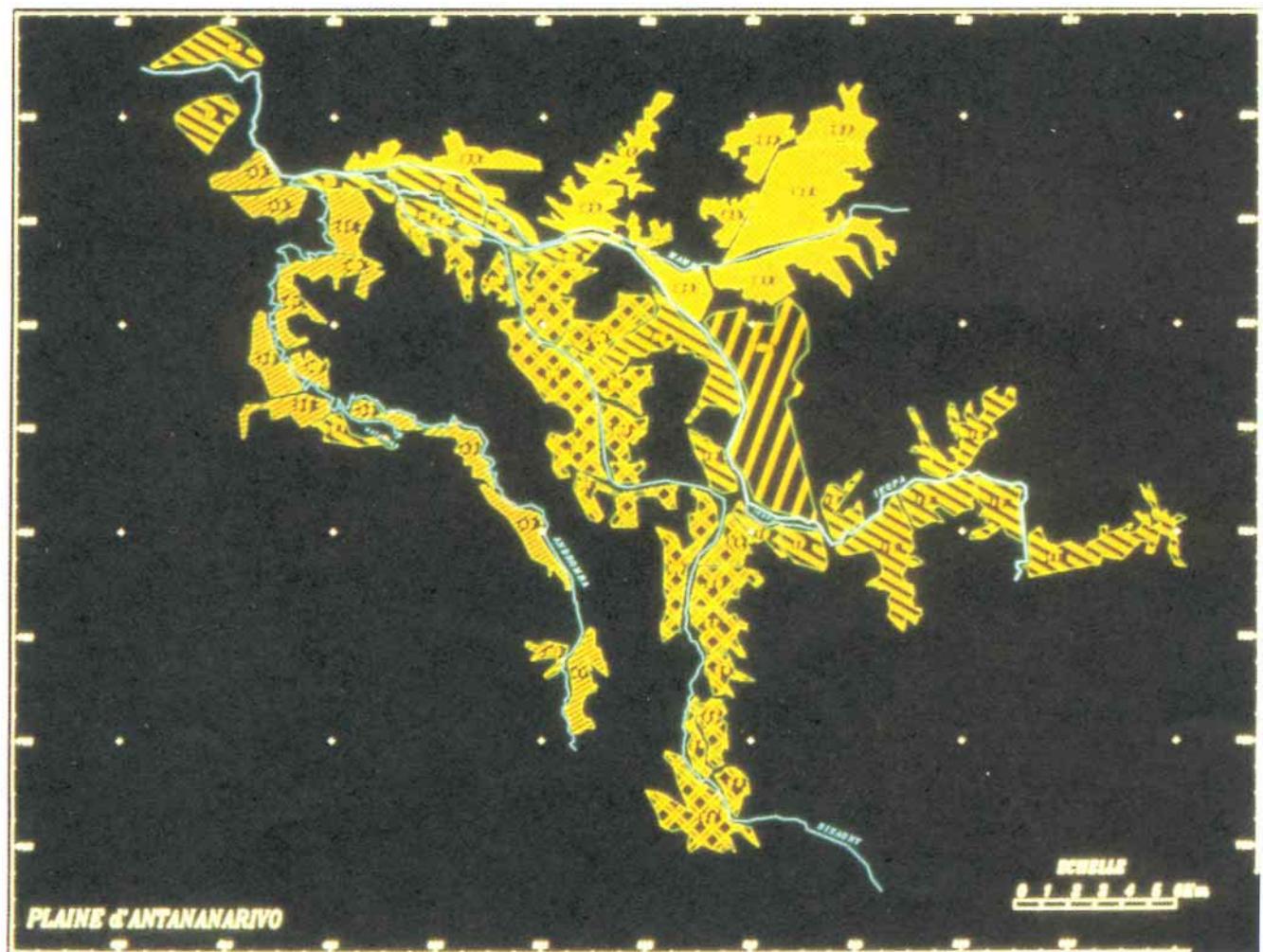
Figure 13 – Brief de Strasbourg étudié par modèle monodimensionnel

Construire le modèle, c'est donc constituer ces fichiers. Ils contiennent les limites du domaine étudié et sa topographie, digitalisée à partir de points cotés, lignes de niveau ou profils en travers, et la définition du maillage, qui est particulièrement simple en monodimensionnel.

La saisie des informations géométriques et topographiques ainsi que le maillage sont aujourd'hui grandement facilités par l'emploi de préprocesseurs interactifs et pratiques.

L'exploitation consiste à lancer les calculs et à dépouiller les résultats. Ceux-ci représentant un grand volume d'informations (particulièrement en bidimensionnel), on utilise des logiciels de *post-traitement* permettant d'éditionner tableaux, graphiques, visualisations telles que celles de la figure 15 et même des films vidéo d'animation.

Les logiciels hydrologiques et monodimensionnels peuvent fonctionner sur des micro-ordinateurs ou des stations de travail plus puissantes. Les logiciels bidimensionnels sont exploités sur station ou sur de gros calculateurs, car ils demandent plus de ressources.



- Casiers sur l'IKOPA
- Casiers sur la SISAONY
- Casiers sur la MANBA
- Casiers sur l'ANDROMBA

Figure 14 – Plan des rivières et casiers du modèle mathématique de la plaine d'Antananarivo à Madagascar

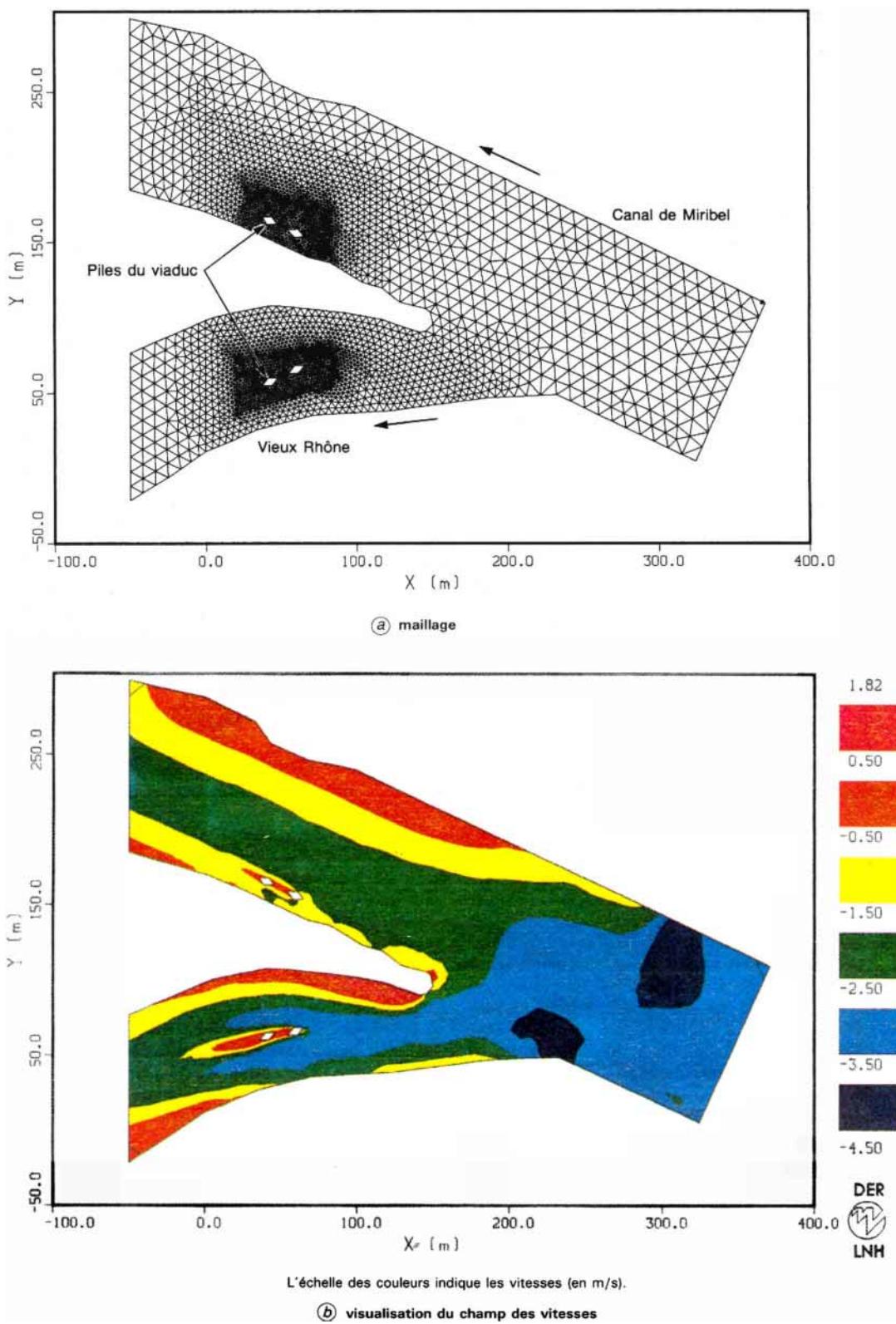


Figure 15 – Étude du doublement d'un viaduc routier par modèle bidimensionnel

3. Conclusion

Bien que conventionnellement appelés *hydrauliques*, les modèles, physiques et mathématiques, permettent de reproduire, outre le mouvement de l'eau, le transport d'une substance (effluent ou température) diluée dans l'eau avec les éventuels effets de densité correspondants, ainsi que l'interaction du fluide avec les éléments constitutifs du lit, c'est-à-dire le transport solide.

Modèles physiques et mathématiques ont un large recouvrement avec, toutefois, des domaines bien spécifiques. Le partage observé à l'heure actuelle est résumé dans le tableau 2.

Notons que la notion de complexité, apparaissant dans ce tableau, est relative : si les écoulements *complexes* tridimensionnels avec entraînement d'air sont plutôt du ressort des modèles physiques, certains phénomènes physiques *complexes* sont plus faciles à traiter par modèle mathématique : c'est le cas, par exemple, du transport solide de sédiments cohésifs (vases), ou de l'échange atmosphérique engendré par un rejet chaud en rivière.

Quand les impératifs techniques laissent le choix entre l'un ou l'autre type de modèle, les considérations de délai et de coût font, bien évidemment, pencher la balance en faveur du modèle mathématique. À titre indicatif, la mise en œuvre d'un modèle mono-

dimensionnel pour définir des ouvrages de décharge dans un remblai implanté dans le lit majeur d'une rivière peut demander, pour un domaine de l'ordre de 5 km, de 9 à 12 semaines, tandis que la construction et l'exploitation d'un modèle physique, pour le même cas, requiert entre 3 et 6 mois (déduction faite du recueil des données).

On parle souvent de complémentarité entre modèles mathématiques et physiques. Il arrive en effet fréquemment que l'on utilise les premiers pour obtenir des conditions à la limite pour les seconds. Ainsi, lorsque les données naturelles ne permettent pas de connaître la condition à la limite à l'aval du domaine que l'on souhaite reproduire sur un modèle physique, on peut, dans certains cas, l'obtenir par un calcul effectué sur une plus grande emprise et allant jusqu'au point aval le plus proche où l'on possède des données.

Inversement, les modèles mathématiques contiennent des lois de comportement nourries par des expériences en canal de laboratoire.

Mais, le plus bel exemple de complémentarité, bien que rare, est fourni par les modèles *hybrides* qui réalisent un couplage en temps réel entre un modèle physique et un modèle mathématique, représentant deux parties contiguës d'un domaine à étudier. Le calculateur exploitant le logiciel de calcul assure également le pilotage de l'installation d'essai, de manière à réaliser l'égalité des cotes et des vitesses à la frontière commune des deux modèles.

Tableau 2 – Choix des types de modèles

Domaines	Nature de l'étude	Modèles physiques	Modèles mathématiques
Écoulements fluviaux	<ul style="list-style-type: none"> ● Écoulements permanents ou non permanents en rivière ● Évolution de fonds (charriage) ● Évolution de fonds (suspension) 	Problèmes locaux dans des géométries complexes Problèmes locaux avec phénomènes tridimensionnels	Problèmes mono ou bidimensionnels soit locaux, soit de grande emprise
Structures hydrauliques	<ul style="list-style-type: none"> ● Lois de débit, dissipation d'énergie, affouillements, etc. ● Écoulements diphasiques air-eau, vortex ● Propagation d'effluents à l'aval d'un rejet ● Écoulements en charge ● Écoulements de filtration 	Écoulements complexes, tridimensionnels avec des ressauts Seul moyen d'étude Étude en champ proche (généralement tridimensionnel) Singularités locales Rarement utilisés de nos jours	Géométrie simple (cas schématique) Uniquement des formules empiriques dans des cas simples Étude du champ lointain (cas non stratifié, mono ou bidimensionnel) Généralement employés Généralement employés

Notations et Symboles	
Symbol	Définition
\sim	caractérise le rapport de similitude (ou facteur d'échelle) qui est défini par le rapport d'une grandeur sur le prototype X_p , à cette même grandeur sur le modèle X_m ; il est noté $\widehat{X} = X_p/X_m$. Cette définition donne des $\widehat{X} > 1$ (ce qui est plus pratique pour les calculs que la définition du rapport inverse)
c	concentration volumique, moyenne sur la verticale, en bidimensionnel
d	taille des aspérités caractéristiques de la rugosité de la paroi
g	accélération de la pesanteur
h	tirant d'eau
k	coefficient de dispersion dans l'équation de la concentration en monodimensionnel (m^2/s)
m	indice caractérisant une grandeur modèle (par opposition au prototype)
p	indice caractérisant une grandeur prototype (par opposition au modèle)
p	pression ou porosité dans l'équation d'évolution du fond
p^*	pression étoilée = $p + \rho g z$
q_ℓ	débit liquide latéral par unité de longueur de rivière ($m^3/s/m$)
q_s	débit solide par unité de largeur de matériau déjaugé (poids calculé avec γ_s)
t	temps
u, v	coordonnées du vecteur vitesse \mathbf{u} selon les coordonnées x et y en bidimensionnel
\mathbf{u}	vecteur vitesse en bidimensionnel
$\ \mathbf{u}\ $	module de la vitesse en bidimensionnel
u_*	vitesse de cisaillement au fond, définie par $u_* = \sqrt{ghJ}$
x, y	coordonnées dans le plan horizontal. En monodimensionnel, x désigne l'abscisse le long de l'axe du cours d'eau
z	coordonnée sur l'axe vertical
B	largeur de la surface libre appelée largeur au miroir
C	concentration volumique en matière en suspension, moyenne dans la section, en monodimensionnel
C_c	célérité de propagation d'une crue dans l'équation d'Hayami
D	diamètre caractéristique des granulats composant le lit d'une rivière, ou débitance
\mathbf{D}	terme vectoriel de diffusion de l'équation de mouvement de Saint-Venant, en bidimensionnel
D_m	diamètre moyen d'une granulométrie
D_x, D_y	composantes du terme de diffusion \mathbf{D}
D_{90}	diamètre représentatif des gros éléments d'une granulométrie
D_*	groupement adimensionnel, défini par $D_*^3 = D^3 \gamma_s / \rho v^2$
F_I	force d'inertie
F_P	force de pesanteur
F_T	force de turbulence
F_V	force de viscosité
Fr	nombre de Froude, défini par $Fr = V/\sqrt{Lg}$

Notations et Symboles	
Symbol	Définition
Fr_p	nombre de Froude réduit, défini par $Fr_p = V/\sqrt{gh\Delta p/\rho}$
H	hauteur caractéristique du phénomène d'écoulement (mesurée selon la verticale)
J	pente de l'écoulement
K	coefficient de rugosité de Strickler
L	longueur caractéristique de l'écoulement (correspondant à une grandeur mesurée horizontalement)
M	masse
P	terme de production, intégré sur la verticale, dans l'équation sur la concentration, en bidimensionnel (s^{-1})
Q	débit liquide
Q_d	débit volumique de dépôt de matière en suspension, sur le fond, par unité de longueur de rivière ($m^3/s/m$)
Q_e	débit d'érosion (matière remise en suspension) par unité de longueur de rivière ($m^3/s/m$)
Q_s	débit solide de chargement exprimé en volume de matériaux pour toute la largeur du lit de la rivière
Re	nombre de Reynolds de l'écoulement, défini par $Re = VL/\nu$
R_H	rayon hydraulique, défini par le rapport de la surface mouillée au périmètre mouillé qui, dans le cas d'un écoulement filaire, peut être approximé par h
S	section mouillée
T	temps caractéristique des phénomènes
\mathbf{T}	terme source vectoriel de l'équation bidimensionnelle de quantité de mouvement (Saint-Venant) : frottement au fond et entraînement par le vent
T_x, T_y	composantes du terme source \mathbf{T}
U	vitesse moyenne dans la section (monodimensionnel) selon l'axe
V	vitesse caractéristique de l'écoulement (le plus souvent la vitesse moyenne, rapport du débit à la section mouillée)
W	groupement adimensionnel, défini par $W = \rho_s/\rho$
X	groupement adimensionnel $X = u_* D/v$, appelé nombre de Reynolds du grain
Y	groupement adimensionnel $Y = \rho u_*^2 / \gamma_s D$, appelé coefficient d'arrachement du grain
Y_c	seuil du coefficient d'arrachement, limite du mouvement des sédiments
Z	groupement adimensionnel $Z = h/D$, ou cote de la surface libre
Z_f	cote du fond du lit
β	coefficient adimensionnel de répartition de la vitesse dans la section (dit de Boussinesq)
γ_s	poids volumique des sédiments déjaugés, $\gamma_s = (\rho_s - \rho) g$
δ	amplitude des dunes de sable
λ	coefficient de perte de charge dans la loi universelle dite de Darcy-Weisbach
μ	coefficient de viscosité dynamique
v	coefficient de viscosité cinématique $v = \mu/\rho$
v_T	coefficient de diffusion turbulente (m^2/s)

Notations et Symboles	
Symbol	Définition
ρ	masse volumique du fluide
ρ_s	masse volumique des sédiments
σ	coefficient d'atténuation du débit de crue (m^2/s)
τ	contrainte de frottement exercée par le fluide sur les sédiments du lit
τ_c	contrainte définissant le seuil de charriage
φ_ℓ	terme d'apport latéral de quantité de mouvement par unité de longueur de rivière
Δ	coefficient de distorsion, défini par $\Delta = \hat{H} / \hat{L}$
$\Delta\rho$	variation de la masse volumique du fluide
Λ	longueur d'onde des dunes de sable
div	opérateur divergence
grad	opérateur gradient

Modèles hydrauliques fluviaux

par **Gérard NICOLLET**

*Ingénieur Civil des Mines
Docteur-Ingénieur
Chef adjoint du Laboratoire National d'Hydraulique*

et **Gérard LABADIE**

*Ingénieur Civil des Ponts et Chaussées
Chef du Groupe Hydraulique fluviale au Laboratoire National d'Hydraulique*

Bibliographie

Références bibliographiques

- [1] COMOLET (R.). – *Mécanique expérimentale des fluides*, 2 tomes : 242 p., 452 p., Masson Paris (1985).
- [2] NOVAK (P.) et CABELKA (J.). – *Models in hydraulic engineering* (Modèles pour les aménagements hydrauliques) 459 p., Pitman (1981).
- [3] SHARP (J.J.). – *Hydraulic modelling* (Modèles hydrauliques) 242 p., Butterworths (1981).
- [4] YALIN (M.S.). – *Mechanics of sediment transport* (Mécanique du transport solide) 298 p., Pergamon Press (1977).
- [5] LEBRETON (J.C.). – *Dynamique fluviale*, 210 p., Eyrolles Paris (1974).
- [6] JENSEN (L.), LENCIONI (P.) et LEBRETON (J.C.). – *Dimension et résistance hydraulique des dunes en écoulement uniforme bidimensionnel*, Communication A 16, Congrès AIRH, Istanbul (1973).

- [7] DHATT (G.) et TOUZOT (G.). – *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 543 p., Maloine, (2^e édition) (1984).
- [8] RODI (W.). – *Turbulence models and their application in hydraulics* (Modèles de turbulence et leur application en hydraulique) 104 p., AIRH-Delft (2^e édition) (1984).
- [9] NICOLLET (G.) et UAN (M.). – *Ecoulements à surface libre en lits composés*, p. 21 à 30, La Houille Blanche n° 1 (1979).
- [10] PEYRET (R.) et TAYLOR (T.D.). – *Computational methods for fluid flow* (Méthodes numériques en mécanique des fluides) Springer (1983).
- [11] HOLLY (F.M.) et KARIM (M.F.). – *Simulation of Missouri river bed degradation*. JHE, Proc. ASCE, Vol. 112, n° 6, p. 497 à 517, juin 1986.

Autres références

- KOBUS (H.). – *Hydraulic modelling* (Modèles hydrauliques) 323 p., DVWK, Pitman London (1980).
- RUI MARTINS. – *Recent advances in hydraulic physical modelling*. (Progrès récents des modèles physiques hydrauliques) 627 p., NATO ASI, Série E, vol. 165, Kluwer Academic Publishers (1989).
- ABBOT (M.B.) et CUNGE (J.A.). – *Engineering applications of computational hydraulics* (Application des calculs hydrauliques à l'ingénierie) vol. 1, 262 p., Pitman (1982).
- BENQUE (J.P.), HAUGUEL (A.) et VIOLET (P.L.). – *Engineering applications of computational hydraulics* (Application des calculs hydrauliques à l'ingénierie) vol. 2, 160 p., Pitman (1982).
- CUNGE (J.A.), HOLLY (F.M.) et VERWEY (A.). – *Practical aspects of computational river hydraulics* (Aspects pratiques de la modélisation numérique fluviale) Pitman (1980).