

# Eurocode 2. Béton armé

## Vérification des états-limites de service

par Jean PERCHAT

Ingénieur des Arts et Manufactures

Professeur honoraire à l'École supérieure des travaux publics et au Centre des hautes études de la construction

1.	Contexte .....	C 2 332 - 2
2.	Limitation des contraintes .....	— 2
3.	Fissuration .....	— 2
3.1	Généralités .....	— 2
3.2	Section minimale des armatures tendues .....	— 2
3.3	Maîtrise de la fissuration sans calcul direct .....	— 3
3.4	Calcul de l'ouverture des fissures .....	— 3
4.	Limitation des flèches .....	— 6
4.1	Généralités .....	— 6
4.2	Cas de dispense de calcul des flèches .....	— 7
4.3	Vérification des flèches par le calcul .....	— 8
	Références bibliographiques .....	— 11

**L**a partie 1.1 de l'Eurocode 2 EC2 « Règles générales et règles pour les bâtiments » couvre à la fois le béton armé, le béton précontraint, les bétons de granulats légers, le béton non armé ou faiblement armé, les structures préfabriquées. Dans ce qui suit, nous avons dû nous borner à ne présenter que les seules spécifications relatives au **béton armé** (*grossso modo, l'équivalent de la partie A des Règles BAEL*). Nous n'avons pas fait apparaître la distinction établie dans l'EC2 entre « Principes » et « Règles d'application », car elle est de peu d'intérêt pour un projeteur de constructions courantes.

Dans l'EC2, des commentaires imprimés en petits caractères sont présentés comme « notes ». Une « note » précise généralement que les valeurs numériques de certains tableaux ou de certains coefficients littéraux des formules qui la précédent sont du ressort de l'Annexe Nationale et donne simplement les valeurs « recommandées ». L'EC2 contient en effet en attente certains paramètres qu'il appartient à chaque État-Membre de fixer pour permettre l'application des règles aux projets de bâtiments et ouvrages de Génie Civil du pays concerné. À la date de la rédaction du présent document, l'Annexe Nationale française, future norme P 18-711-2 [9], était toujours sous forme provisoire.

Le texte ci-après ne reproduit pas toujours à la lettre la rédaction des notes de l'EC2, les valeurs numériques recommandées ayant, le plus souvent, été adoptées par l'Annexe Nationale. Les parties encadrées sont des commentaires de l'auteur.

Nous n'avons pas jugé utile de conclure chaque exemple par une comparaison avec ce qu'aurait donné l'application des Règles BAEL. Après 25 ans de discussions, il n'est plus temps de se demander si l'usage de l'EC2 va conduire à des économies ou à des dépenses supplémentaires par rapport aux textes antérieurs. Il faut appliquer le document tel qu'il est et tel qu'il va être enseigné à la génération de projeteurs à venir. Sauf pour ceux qui auraient

à vérifier la tenue d'ouvrages construits selon des règles antérieures, ceux-ci ne connaîtront rien d'autre. Pour eux, la comparaison ne serait d'aucun intérêt.

La rédaction des spécifications de l'Eurocode 2 relatives au béton armé fait l'objet de plusieurs dossiers :

- [C 2 330] Dispositions et données générales ;
- [C 2 331] Vérification des états-limites ultimes ;
- [C 2 332] Vérification des états-limites de service ;
- [C 2 333] Dispositions constructives ;
- [Form. C 2 334] Formules et données utiles.

## 1. Contexte

Les vérifications relatives aux conditions de service sont définies par référence à une limitation des contraintes, des états-limites de fissuration et des états-limites de déformation.

Dans le calcul des contraintes et des flèches, les sections doivent être considérées comme non fissurées sous réserve que la contrainte de traction par flexion n'excède pas une certaine valeur  $f_{ct,eff}$ . Pour celle-ci, on peut prendre soit  $f_{ctm}$  [C 2 330, tableau 1], soit  $f_{ctmf}$  [C 2 330, formule (23)] à condition d'adopter la même valeur pour le calcul de la section minimale d'acier tendu. Pour le calcul de l'ouverture des fissures et de la contribution du béton tendu, il convient d'utiliser  $f_{ctm}$ .

## 2. Limitation des contraintes

- Pour éviter l'apparition de fissures longitudinales, de microfissures ou un fluage élevé, en l'absence d'autres mesures (augmentation de l'enrobage dans la zone comprimée ou confinement du béton par un ferraillage transversal), il peut être approprié de limiter la contrainte de compression du béton sous la combinaison d'actions caractéristique [C 60, § 5.8.4] à  $0,6 f_{ck}$  dans les zones susceptibles d'être exposées à des environnements des classes d'exposition XD, XF ou XS [C 2 330, tableau 4].
- On ne peut admettre l'hypothèse d'un fluage linéaire que si, sous la combinaison quasi permanente [C 60, § 5.8.4] :  $\sigma_c \leq 0,45 f_{ck}$  (cf. [C 2 330, § 3.1.4]).
- Les contraintes des armatures doivent être limitées à  $0,8 f_{yk}$  sous la combinaison d'actions caractéristiques afin d'éviter des déformations inélastiques, une fissuration ou des flèches inacceptables, et à  $f_{yk}$  si elles sont dues à des déformations imposées.

## 3. Fissuration

### 3.1 Généralités

La vérification a pour objet de s'assurer que l'ouverture maximale  $w_k$  des fissures n'excède pas une limite ( $w_{max}$ ) fonction de la nature et de la destination de l'ouvrage et du coût résultant de cette limitation.

En l'absence d'exigences spécifiques (étanchéité à l'eau par exemple), les valeurs recommandées de  $w_{max}$  adoptées par l'Annexe Nationale pour les différentes classes d'exposition [C 2 330, tableau 4] sont sous la combinaison quasi permanente des charges :

- 0,4 mm pour les classes X0 et XC1 ;
- 0,3 mm pour les classes XC2, XC3, XC4 ;
- 0,2 mm pour les classes XD1, XD2, XS1, XS2 et XS3.

### 3.2 Section minimale des armatures tendues

Lorsque la maîtrise de la fissuration est requise, une quantité minimale d'armatures adhérentes est nécessaire pour obtenir cette maîtrise dans les zones susceptibles de se fissurer. Pour les poutres en T et les poutres-caissons, l'armature minimale doit être calculée pour chaque partie constitutive de la section : âmes, membrures.

La section minimale  $A_{s,min}$  des armatures est donnée par :

$$A_{s,min} \sigma_s = k_c k f_{ct,eff} A_{ct} \quad (1)$$

avec  $A_{ct}$  aire du béton tendu juste avant formation de la première fissure (calcul en section homogène ; figure 1),

$\sigma_s$  contrainte de l'acier pour laquelle l'Annexe Nationale prend  $\sigma_s = f_{yk}$ ,

$f_{ct,eff}$  valeur moyenne de la résistance à la traction du béton effective au moment où les fissures sont censées se produire :  $f_{ct,eff} = f_{ctm}$  ou moins, s'il est prévisible que la fissuration se produira avant 28 jours,

$k_c$  coefficient tenant compte de la distribution des contraintes dans la section juste avant fissuration et résultant de la combinaison des effets directs et indirects :

— pour la traction simple :  $k_c = 1$  ;

— pour la flexion simple ou composée :

• pour les sections rectangulaires et les âmes des poutres en T ou en caisson :

$$k_c = 0,4 \left[ 1 - \frac{\sigma_c}{k_1(h/h^*)f_{ct,eff}} \right] \leq 1 \quad (2)$$

• pour les membrures des poutres en T ou en caisson :

$$k_c = 0,9 \frac{F_{cr}}{A_{ct} f_{ct,eff}} \geq 0,5 \quad (3)$$

avec  $\sigma_c$  contrainte moyenne du béton s'exerçant sur la partie de section considérée ( $\sigma_c > 0$  pour une force de compression) :

$$\sigma_c = N_{Ed}/bh \quad (4)$$

$N_{Ed}$  effort normal de service s'exerçant sur la partie considérée de la section droite (positif s'il s'agit d'une compression).  $N_{Ed}$  doit être calculé sous la combinaison déterminante des actions,  $h^* = \text{Min } [h ; 1 m]$ .

$k_1$  coefficient tenant compte des effets de l'effort normal sur la distribution des contraintes :

$k_1 = 1$  si  $N_{Ed} = 0$  (flexion simple),

$k_1 = 1,5$  si  $N_{Ed}$  est une compression,

$k_1 = 2h^*/3h$  si  $N_{Ed}$  est une traction.

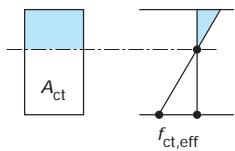


Figure 1 – Zone de béton tendu juste avant formation de la première fissure (armatures non représentées)

$F_{cr}$	valeur absolue de la force de traction dans la membrure immédiatement avant la fissuration due au moment de fissuration calculé avec $f_{ct,eff}$ ,
$k = 1$	pour les âmes de hauteur $h \leq 300$ mm ou les membrures de largeur au plus égale à 300 mm,
$k = 0,65$	pour les âmes de hauteur $h \geq 800$ mm ou les membrures de largeur au moins égale à 800 mm, avec interpolation linéaire pour les valeurs intermédiaires.

### 3.3 Maîtrise de la fissuration sans calcul direct

On peut s'affranchir du calcul des ouvertures des fissures (§ 3.4) par le respect de dispositions constructives appropriées. Voir l'Annexe Nationale [9], notes du tableau 7.1 NF.

1 – Pour les dalles de bâtiments d'épaisseur totale au plus égale à 200 mm, sollicitées à la flexion sans traction axiale significative, aucune mesure spéciale n'est à prendre pour la maîtrise de la fissuration, autre que le respect des dispositions constructives [C2 333, § 2.3].

2 Note – La limitation de l'ouverture des fissures une valeur acceptable est réputée obtenue si, l'armature minimale étant respectée :

- pour une fissuration due principalement aux déformations générées, les diamètres adoptés pour les barres longitudinales ne dépassent pas les diamètres limites du tableau 1, en prenant pour  $\sigma_s$  la contrainte de l'acier immédiatement après fissuration ;
- pour une fissuration principalement due aux charges,  $\sigma_s$  étant alors la contrainte de l'acier évaluée sur la base d'une section fissurée sous l'effet de la combinaison d'actions considérée, soit les diamètres maximums, soit les espacements  $s_s$  maximums des barres longitudinales, données aux tableaux 1 et 2, sont respectés. L'Annexe Nationale subordonne l'emploi de ces tableaux à la présence d'un ferrailage minimal (formule (1)),  $\sigma_s$  étant choisi parmi les valeurs données soit par le tableau 1 en fonction de  $\emptyset_s$ , soit par le tableau 2 en fonction de l'espacement (interpolations linéaires permises).

Le diamètre maximal  $\emptyset_s$  à adopter se déduit comme suit des diamètres  $\emptyset_s$  du tableau 1 :

- dans le cas d'une section partiellement comprimée en flexion :

$$\emptyset_s = \emptyset_s^* [k_c h_{cr}(f_{ct,eff}/2,9)] / 8(h-d) \quad (5)$$

- dans le cas d'une section entièrement tendue :

$$\emptyset_s = \emptyset_s^* h_{cr}(f_{ct,eff}/2,9) / 8(h-d) \quad (6)$$

avec  $k_c$  voir § 3.2,

$h$  hauteur totale de la section,

$h_{cr}$  hauteur de la zone tendue immédiatement avant la fissuration, calculée sous la combinaison d'actions quasi permanente,

$d$  hauteur utile du lit le plus bas.

Lorsque la section est entièrement tendue,  $(h-d)$  est la distance minimale entre le centre de gravité des armatures et le parement de béton.

Pour les poutres de hauteur au moins égale à 1 mètre, une armature de peau, distribuée entre les armatures tendues et l'axe neutre, et placée à l'intérieur des cadres transversaux, doit être prévue. L'aire de cette armature doit être au moins égale à celle donnée par la formule (1), dans laquelle on prend  $k = 0,5$  et  $\sigma_s = f_{yk}$ . Le diamètre et les espacements des barres de l'armature de peau peuvent être tirés des tableaux 1 et 2 en se plaçant dans le cas de la traction pure, et en admettant une contrainte égale à la moitié de celle des armatures longitudinales principales.

Tableau 1 – Diamètre maximal  $\emptyset_s^*$  des barres pour la maîtrise de la fissuration (tableau 7.2N de l'EC2)

Contrainte de l'acier (1) (MPa)	Diamètre maximal des barres (mm)		
	$w_k = 0,4$ mm	$w_k = 0,3$ mm	$w_k = 0,2$ mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	–

Notes : les valeurs du tableau sont basées sur les hypothèses suivantes :  
 $c = 25$  mm ;  $f_{ct,eff} = 2,9$  MPa ;  $h_{cr} = 0,5$  ;  $(h-d) = 0,1 h$  ;  $k_1 = 0,8$  ;  
 $k_2 = 0,5$  ;  $k_c = 0,4$  ;  $k = 1,0$  ;  $k_1 = 0,4$  et  $k' = 1,0$ .  
(1) Sous les combinaisons d'actions appropriées.

Tableau 2 – Espacement maximal des barres pour la maîtrise de la fissuration (tableau 7.3N de l'EC2)

Contrainte de l'acier (1) (MPa)	Espacement maximal des barres (mm)		
	$w_k = 0,4$ mm	$w_k = 0,3$ mm	$w_k = 0,2$ mm
160	300	300	200
200	300	250	150
240	250	200	100
280	200	150	50
320	150	100	–
360	100	50	–

Pour les notes voir le tableau 1. L'Annexe Nationale ajoute les hypothèses complémentaires  $h \leq 400$  mm et un seul lit d'armature.

### 3.4 Calcul de l'ouverture des fissures

Lorsque l'on soumet un tirant en béton, comportant un pourcentage d'armatures supérieur au pourcentage minimal, à un effort de traction axial  $F$  croissant, on constate que lorsque  $F$  atteint une certaine valeur, une première fissure se forme dans une section dont la position relève du hasard. Sur les deux lèvres de cette fissure, la contrainte de traction du béton s'annule, tandis que celle de l'armature, qui doit désormais équilibrer à elle seule la force  $F$ , augmente brutalement. Il en résulte une différence d'allongement des deux matériaux qui entraîne l'ouverture de la fissure. Dans la section fissurée, le béton et l'armature sont complètement désolidarisés.

Les sections situées à proximité de la fissure sont dans un état intermédiaire entre :

— l'état homogène non fissuré, encore appelé « état I » où  $F = A_c \sigma_{ct} + A_s \sigma_{s1}$  ;

— l'état totalement fissuré, encore appelé « état II - nu » où  $F = A_s \sigma_{s2}$  avec  $\sigma_{s2} > \sigma_{s1}$ .

( $A_c$ ,  $A_s$ ,  $\sigma_{ct}$ ,  $\sigma_s$  aires et contraintes de traction respectives du béton et des armatures).

À une certaine distance  $s_{r0}$  de la fissure, par la mise en jeu de l'adhérence, la compatibilité des allongements entre l'acier et le béton est rétablie et on retrouve l'état I. La distance  $s_{r0}$  est la distance minimale entre deux fissures : aucune autre fissure ne peut s'y produire, puisque la contrainte de traction du béton y est inférieure à  $f_{ct}$ . À une distance  $x > s_{r0}$ , l'état mécanique du tirant est le même que si la première fissure ne s'était pas produite et de nouvelles fissures peuvent apparaître. L'espacement  $s_r$  entre deux fissures voisines est donc tel que  $s_{r0} \leq s_r \leq 2s_{r0}$ . Quand cette relation est satisfaite pour tous les tronçons séparés par des fissures, il ne peut plus se produire de nouvelles fissures. La fissuration est dite « complète » ou stabilisée.

Les sections d'un élément tendu ou fléchi n'étant pas toutes fissurées (comme on le suppose dans le calcul), la présence de zones non fissurées d'une certaine étendue rend le comportement de l'élément considéré discontinu. On est donc obligé de se référer à des valeurs « moyennes ». Ainsi, l'ouverture moyenne des fissures est égale à l'allongement moyen que subit l'armature par rapport au béton sur la distance moyenne finale  $s_{rm}$  entre les fissures :

$$w_m = (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{ctm}) s_{rm}$$

avec  $\varepsilon_{sm}$  et  $\varepsilon_{ctm}$  allongements unitaires moyens respectifs sur la distance  $s_{rm}$  de l'armature et du béton.

L'EC2 se place en sécurité en définissant une « ouverture de fissure de calcul » à partir de l'*espacement maximal* des fissures. Il convient de noter que cette ouverture calculée a un caractère **conventionnel** et qu'il serait vain et sans signification de vouloir la comparer à des ouvertures relevées (à un niveau qu'il faudrait d'ailleurs définir) sur un ouvrage.

(1) L'ouverture de fissure de calcul  $w_k$  peut être obtenue par :

$$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (7)$$

avec  $s_{r,max}$  espacement maximal des fissures,

$\varepsilon_{sm}$  allongement moyen des armatures, sous la combinaison d'actions considérée, tenant compte de la contribution du béton tendu,

$\varepsilon_{cm}$  allongement moyen du béton entre les fissures.

(2) Le terme  $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$  peut être calculé au moyen de l'expression :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad (8)$$

avec  $\sigma_s$  contrainte des armatures tendues, calculée en supposant la section fissurée,  $\alpha_e = E_s/E_{cm}$ ,

$$\rho_{p,eff} = A_s / A_{c,eff}. \quad (9)$$

$A_{c,eff}$  est l'aire de béton entourant l'armature tendue sur une hauteur  $h_{c,eff}$  (figure 2) :

$$h_{c,eff} = \text{Min} [2,5 (h - d); (h - x)/3; h/2]$$

avec  $k_t$  coefficient tenant compte de la durée du chargement :

$k_t = 0,6$  pour un chargement de courte durée,

$k_t = 0,4$  pour un chargement de longue durée.

(3) Dans le cas où la distance entre les axes de deux barres voisines (figure 3) est au plus égal à  $5(c + \emptyset/2)$ , l'espacement final maximal entre les fissures, en mm, est pris égal à :

$$s_{r,max} = 3,4 c + 0,425 k_2 \emptyset / \rho_{p,eff} \quad (10)$$

Pour des enrobages  $c$  supérieurs à 25 mm, le coefficient 3,4 est à remplacer par  $3,4 (25/c)^{2/3}$  [Annexe Nationale].

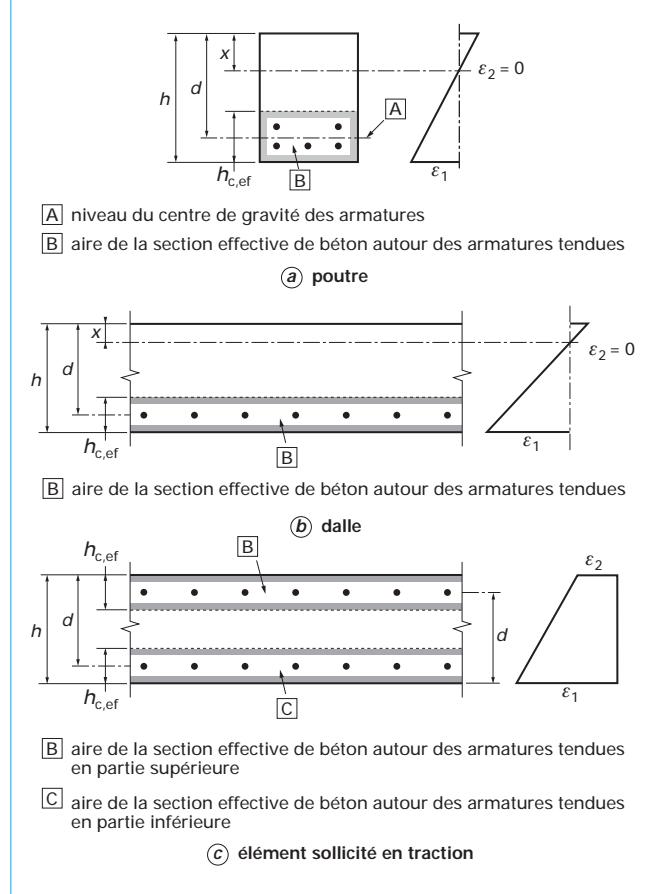


Figure 2 – Aires effectives de béton autour des armatures dans des cas types (figure 7.1 de l'EC2)

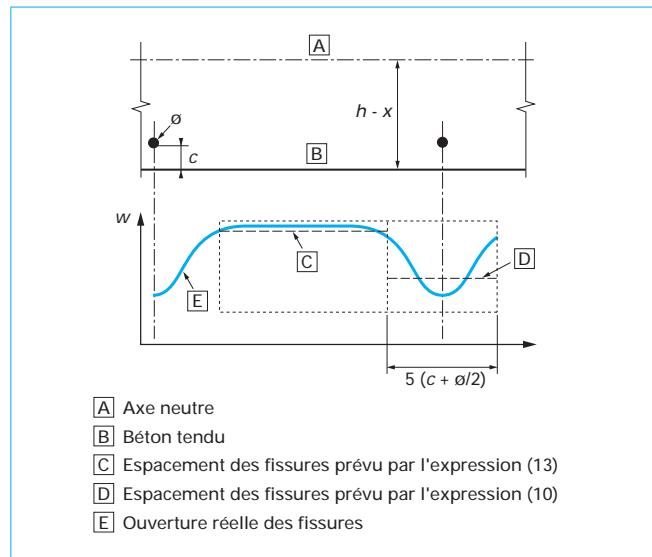


Figure 3 – Ouverture des fissures à la surface du béton en fonction de la distance aux armatures (figure 7.2 de l'EC2)

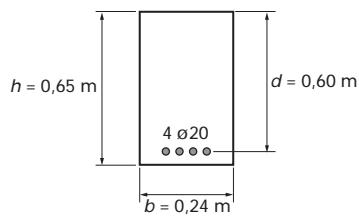


Figure 4 – Section droite de la poutre étudiée

Les symboles de l'expression (10) ont les significations suivantes :

$\emptyset$  diamètre des barres ; s'il y a plusieurs barres de diamètres différents dans une même section,  $\emptyset$  doit être remplacé par un diamètre équivalent :

$$\emptyset_{\text{eq}} = \frac{n_1 \emptyset_1^2 + n_2 \emptyset_2^2}{n_1 \emptyset_1 + n_2 \emptyset_2} \quad (11)$$

$n_1, n_2$  nombres de barres de diamètres respectifs  $\emptyset_1, \emptyset_2$ ,

$c$  enrobage des armatures longitudinales,

$k_1$  coefficient fonction des propriétés d'adhérence des barres : 0,8 pour les barres HA,

$k_2$  coefficient tenant compte de la distribution des contraintes :  $k_2 = 0,5$  en flexion,  $k_2 = 1$  en traction simple,

$$k_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2 \varepsilon_1 \text{ en cas de traction excentrée,} \quad (12)$$

avec  $\varepsilon_1$  le plus grand et  $\varepsilon_2$  le plus faible des allongements relatifs des fibres extrêmes de la section considérée, évalués sur la base d'une section fissurée.

#### Exemple — Fissuration

La section de la poutre étudiée est présentée sur la figure 4.

**Données** : Structure de classe 4

Acier B500,  $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$

Béton 30/37  $\left\{ f_{ctm} = 2,9 \text{ MPa} \right.$

$E_{cm} = 33 \text{ GPa}$  }

Moments de service :

— dû aux charges permanentes : 53 kN · m ;

— dû aux charges variables : 107 kN · m.

#### a) Vérifications

Exigence :  $w_k \leqslant 0,3 \text{ mm}$

Classe d'exposition XC2

Charges de longue durée :

• Les données sont telles que :

$c_{\min, \text{dur}} = 25 \text{ mm}$  [C 2 330, tableau 5]

$c_{\min, b} = \emptyset = 20 \text{ mm}$  [C 2 330, § 4.4.2]

$c_{\min} = \text{Max}[25 ; 20] = 25 \text{ mm}$  [C 2 330, formule (29)]

En admettant  $\Delta c_{\text{dev}} = 10 \text{ mm}$  :

$c_{\text{nom}} = c_{\min} + \Delta c_{\text{dev}} = 35 \text{ mm}$  [C 2 330, formule (28)]

L'espace libre horizontal entre barres doit être tel que :

$$e_h \geqslant \text{Max}[\emptyset ; d_g + 5 \text{ mm} ; 20 \text{ mm}] \quad [\text{C 2 333, § 1.2}]$$

soit, avec  $d_g = 25 \text{ mm}$  :

$$e_h \geqslant 30 \text{ mm}$$

La largeur minimale à donner à la poutre est égale à :

$$2c_{\text{nom}} + (4\emptyset 20) + 3e_h = 2 \times 35 + 80 + 90 = 240 \text{ mm}$$

La largeur adoptée,  $b = 0,24 \text{ m}$ , est donc correcte.

La hauteur utile maximale vaut :

$$d_{\max} = h - c_{\text{nom}} - \frac{\emptyset}{2} = 650 - 35 - 10 = 605 \text{ mm}$$

La valeur retenue,  $d = 0,60 \text{ m}$ , convient donc.

- Le moment ultime agissant est  $M_{Ed,u} = 1,35 \times 53 + 1,5 \times 107 = 232 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0,232 \text{ MN} \cdot \text{m}$

que l'on va comparer au moment résistant  $M_{Rd,u}$ .

On a :  $A_s = 4 \times 3,14 = 12,57 \text{ cm}^2$

On calcule :  $\xi_1 = \frac{A_s f_{yd}}{0,81 bd f_{cd}} = \frac{(12,57 \times 10^{-4}) \times 435}{0,81 \times 0,24 \times 0,60 \times 20} = 0,234$   
[Form. C 2 334, formule (14)]

$$\varepsilon_{s1} = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - 0,234}{0,234} = \frac{11,43}{1000}$$
  
[Form. C 2 334, formule (15)]

$$\sigma_{s1} = 433 + 0,812 \times 11,43 = 442 \text{ MPa}$$
 [Form. C 2 334, formule (1)]

$$\xi_2 = \xi_1 \frac{442}{435} = 0,234 \frac{442}{435} = 0,238$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{3,5}{1000} \frac{1 - 0,238}{0,238} = \frac{11,21}{1000}$$

$$\sigma_{s2} = 433 + 0,812 \times 11,21 = 442 \text{ MPa}$$

on retient donc  $\sigma_s = 442 \text{ MPa}$ , avec  $\xi = 0,238$  [Form. C 2 334, formule (16)] d'où :

$$z = 0,60 (1 - 0,416 \times 0,238) = 0,54 \text{ m}$$
 [Form. C 2 334, formule (16)]

$$\text{et } M_{Rd,u} = (12,57 \times 10^{-4}) 442 \times 0,54 = 0,300 \text{ MN} \cdot \text{m}$$
  
[Form. C 2 334, formule (17)]

On a bien  $M_{Ed,u} < M_{Rd,u}$

#### b) Caractéristiques de la section

$A_s = 12,57 \text{ cm}^2$ , d'où

$$\rho = \frac{12,57}{24 \times 60} = 0,00873 \quad \eta = \frac{h}{d} = \frac{65}{60} = 1,083$$

#### • Sous charges instantanées, en section non fissurée :

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{2 \times 10^5}{33 \times 10^3} \approx 6$$

En appliquant les relations [Form. C 2 334, (18) et (19)] (en prenant comme unité le cm) puis la relation [Form. C 2 334, (20)], on obtient successivement :

$$v = 33,76 \text{ cm}$$

$$I_I = 603 656 \text{ cm}^4 = 0,00604 \text{ m}^4$$

$$M_{cr} = 0,0561 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

Le moment de service est :

$$M_{Ed} = 53 + 107 = 160 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0,16 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

La poutre est donc fissurée sous charges de service.

#### • Sous charges de longue durée, en section fissurée :

En supposant  $\varphi(\infty, t_0) = \varphi = 2$  :

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}(1 + \varphi)} \approx 20$$
 [relation (22)]

En appliquant les relations [Form C 2 334, (21) et (24)], on trouve alors successivement :

$$x = 0,265 \text{ m}$$

$$z = 0,512 \text{ m}$$

et, avec :

$$M_{Ed} = 0,160 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{s2} = \frac{0,160}{12,57 \times 10^{-4} \times 0,512} = 249 \text{ MPa}$$

### c) Vérification sans calcul de l'ouverture des fissures

Pour  $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$  et  $w_k = 0,3 \text{ mm}$ , le tableau 1 donne

$$\varnothing_{s\max}^* = 16 \text{ mm}. \text{ Cette valeur doit être corrigée selon (5) :}$$

$$\varnothing_{s\max} = \varnothing_s \frac{f_{ct,\text{eff}}}{2,9} \frac{k_c h_{cr}}{2(h-d)}$$

Ici :  $k_c = 0,4$  (flexion simple d'une poutre à section rectangulaire)

$h_{cr} = h - v$  ( $v$  calculé selon [Form. C 2 334, (18) voir ci-avant])

$$h_{cr} = 65 - 33,8 = 31,2 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } \varnothing_{s\max} = 16 \frac{2,9}{2,9} \frac{0,4 \times 31,2}{2(65-60)} \approx 20 \text{ mm}$$

Comme  $\sigma_s = 249 \text{ MPa} > 240 \text{ MPa}$ , il faudrait  $\varnothing < 20 \text{ mm}$ , ce qui n'est pas le cas.

Selon le tableau 2, pour  $w_k = 0,3 \text{ mm}$ , la distance entre axes des barres doit être au plus de 190 mm (valeur interpolée), or elle est de  $e_h + 2\varnothing = 50 \text{ mm}$  ( $e_h = 30 \text{ mm}$  calculé ci-avant).

L'une ( $\varnothing 20 \text{ mm}$ ) ou l'autre (distance entre axes  $\leq 190 \text{ mm}$ ) des deux conditions précédentes devant être satisfaite, la section convient. Il n'est donc pas nécessaire de calculer l'ouverture des fissures. Calculons-la cependant à titre d'exemple.

### d) Calcul de l'ouverture des fissures

Bien que l'EC2 ne le demande pas, il faut s'assurer tout d'abord que la fissuration est bien systématique. Pour cela, il faut que :

$$A_s \sigma_{s2} \geq (A_{c,\text{eff}} + \alpha_e A_s) f_{ctm}$$

ou

$$\rho_{s,\text{eff}} \sigma_{s2} \geq (1 + \alpha_e \rho_{s,\text{eff}}) f_{ctm}$$

$$\sigma_{s2} \geq \frac{1 + 20 \times 0,0419}{0,0419} 2,9 = 127 \text{ MPa}$$

ce qui est le cas ( $249 > 127$ ).

#### • Espacement final maximal entre les fissures :

Espacement latéral entre les axes des barres : 50 mm. On a bien :

$$50 < 5 \left( c + \frac{\varnothing}{2} \right) = 5(35 + 10) = 225 \text{ mm}$$

La formule (10), est donc applicable :

$$s_{r,\max} = 3,4c + 0,425 k_1 k_2 \varnothing / \rho_{p,\text{eff}}$$

avec  $k_1 = 0,8$  (barres HA),

$k_2 = 0,5$  (pièce fléchie) d'où :

$$s_{r,\max} = 3,4 \times 35 + 0,425 \times 0,8 \times 0,5 \times \frac{20}{0,0419} = 200 \text{ mm}$$

#### • Calcul du terme $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$ [expression (8)] :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{1}{E_s} \left[ \sigma_{s2} - k_1 \frac{f_{ct,\text{eff}}}{\rho_{s,\text{eff}}} (1 + \alpha_e \rho_{s,\text{eff}}) \right]$$

avec  $k_1 = 0,4$  (charges de longue durée) :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{1}{2 \times 10^5} \left[ 249 - 0,4 \times \frac{2,9}{0,0419} (1 + 20 \times 0,0419) \right] = \frac{0,99}{1000}$$

#### • Ouverture calculée [formule (7)] :

$$w_k = s_{r,\max} [\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}] = 200 \times \frac{0,99}{1000} = 0,2 \text{ mm}$$

Cette ouverture est bien inférieure à 0,3 mm.

(4) Dans le cas où l'espacement des armatures adhérentes excède  $5(c + \varnothing/2)$  (figure 3), une borne supérieure de l'ouverture des fissures peut être estimée en prenant :

$$s_{r,\max} = 1,3(h - x) \quad (13)$$

avec  $x$  hauteur de l'axe neutre à l'état-limite de service.

L'Annexe Nationale précise que la relation (13) ne peut être utilisée que si elle conduit à une valeur de  $s_{r,\max}$  supérieure à celle donnée par la relation (10), sinon cette dernière reste applicable.

(5) Pour les éléments armés dans deux directions orthogonales  $y$  et  $z$ , lorsque l'angle que forment les directions des contraintes principales et celles des armatures dépasse  $15^\circ$ , on peut prendre :

$$s_{r,\max} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{s_{r,\max,y} - s_{r,\max,z}} \quad (14)$$

avec  $\theta$

angle entre les armatures dans la direction  $y$  et la direction de la contrainte principale de traction,

$s_{r,\max,y}$   $s_{r,\max,z}$  espacements des fissures calculés dans les directions  $y$  et  $z$  selon l'équation (10).

## 4. Limitation des flèches

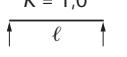
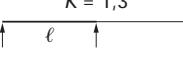
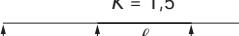
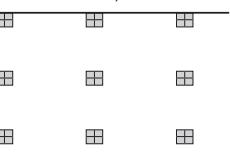
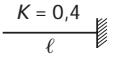
### 4.1 Généralités

Pour plus d'informations sur les déformations et leurs valeurs limites, se reporter à la norme ISO 4356 [10].

Pour une poutre, une dalle ou une console, la flèche **calculée** rapportée à la ligne des appuis, au bout d'un temps infini, sous l'effet des combinaisons d'actions quasi permanentes [C 60, § 5.8.4] ne doit pas excéder  $\ell/250$ . Pour compenser en tout ou partie la flèche, une contreflèche au plus égale à  $\ell/250$  peut être donnée au coffrage.

Pour éviter des désordres dans les cloisons, les éléments supportés ou ceux en contact avec l'élément considéré et les fixations ou finitions, la flèche sous charges quasi permanentes après construction ou pose de l'élément considéré ne doit pas excéder  $\ell/500$ .

**Tableau 3 – Limitation des flèches – Valeurs de base du rapport  $\ell/d$  (tableau 7.4N de l'EC2)**  
**Hypothèses :  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ,  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_s = 310 \text{ MPa}$  ; 50 % de charges quasi permanentes**  
(entre parenthèses, les valeurs proposées par l'Annexe Nationale pour les **dalles** uniquement)

Système structural	$K$	$\rho = 0,50 \%$	$\rho = 1,5 \%$
1. Poutre sur deux appuis simples ou dalle simplement appuyée sur son contour, portant dans une ou deux directions ( $\ell$ = petite portée).	$K = 1,0$ 	20 (30)	14 (25)
2. Travée de rive d'une poutre continue ou d'une dalle portant dans deux directions continues sur un long côté ( $\ell$ = petite portée).	$K = 1,3$ 	26 (35)	18 (30)
3. Travée intermédiaire d'une poutre ou d'une dalle portant dans une ou deux directions.	$K = 1,5$ 	30 (40)	20 (35)
4. Panneau quelconque d'un plancher-dalle ( $\ell$ = grande dimension).	$K = 1,2$ 	24	17
5. Console	$K = 0,4$ 	8 (12)	6 (10)

**Note 1 :** les valeurs indiquées ont été choisies de manière à placer généralement du côté de la sécurité et le calcul est susceptible de montrer fréquemment que des éléments de moindre hauteur peuvent convenir.

**Note 2 :** dans le cas des dalles portant dans deux directions, il convient d'effectuer la vérification pour la plus petite portée. Dans le cas des planchers-dalles, il convient de prendre la plus grande portée.

**Note 3 :** les limites indiquées pour les planchers-dalles correspondent à une limite moins sévère que la limite portée/250 pour la flèche à mi-portée. L'expérience a montré que ceci était satisfaisant.

**Note 4 :**  $\rho = \frac{A_s}{bd}$

$\rho = 0,5 \%$  béton faiblement sollicité

$\rho = 1,5 \%$  béton fortement sollicité

Pour des valeurs intermédiaires de  $\rho$ , interpoler linéairement.

## 4.2 Cas de dispense de calcul des flèches

Les flèches limites ( $\ell/250$  ou  $\ell/500$ ) sont réputées non atteintes lorsque la valeur du rapport  $\ell/d$  de la portée à la hauteur utile n'excède pas la valeur limite résultant des expressions (15) ou (16) ci-après, multipliée par des coefficients correctifs tenant compte du type d'armature et d'autres paramètres :

$$\frac{\ell}{d} = K \left[ 11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho} + 3,2\sqrt{f_{ck}} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] \quad \text{si } \rho \leq \rho_0 \quad (15)$$

$$\frac{\ell}{d} = K \left[ 11 + 1,5\sqrt{f_{ck}} \frac{\rho_0}{\rho - \rho'} + \frac{1}{12}\sqrt{f_{ck}} \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] \quad \text{si } \rho > \rho_0 \quad (16)$$

avec  $K$  coefficient dépendant du système structural (tableau 3),

$\rho_0$  pourcentage d'armatures de référence  $\rho_0 = \sqrt{f_{ck}} 10^{-3}$  ( $f_{ck}$  en MPa),

$\rho, \rho'$  pourcentages d'armatures respectivement tendues et comprimées requis à mi-portée (à l'appui pour les

consoles) pour équilibrer le moment dû aux charges de calcul.

Dans le cas où  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , où  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ , où la contrainte de l'acier  $\sigma_s$  en service est égale à  $310 \text{ MPa}$  et où 50 % des charges sont quasi permanentes, les formules (15) et (16) conduisent aux rapports limites  $\ell/d$  du tableau 3.

### Coefficients correctifs :

Les valeurs données par les expressions (15) et (16) et donc celles du tableau 3 sont à multiplier par :

0,8 pour les poutres en T dans lesquelles  $b/b_w > 3$ ,

$7/\ell_{eff}$  pour les travées de plus de 7 m de portée ( $\ell_{eff} > 7 \text{ m}$ )

supportant des cloisons fragiles,  
 $310/\sigma_s$  avec  $\sigma_s$  contrainte de l'acier, à l'ELS, dans la section de moment maximal. On peut admettre que :

$$310/\sigma_s = 500 A_{s,prov} / f_{yk} A_{s,req} \quad (17)$$

$A_{s,prov}$ ,  $A_{s,req}$  aires des armatures respectivement prévues et requises dans la section considérée pour équilibrer le moment de flexion à l'état-limite ultime.

### 4.3 Vérification des flèches par le calcul

La méthode « rigoureuse » de calcul consiste à déterminer les courbures  $1/r$  en différentes sections réparties le long de l'élément et à calculer la flèche par double intégration numérique.

Plus simplement, le comportement d'un élément fléchi (ou tendu) fissuré étant intermédiaire entre celui de cet élément non fissuré et celui de ce même élément entièrement fissuré (sans aucune contribution du béton tendu entre les fissures), on peut faire les calculs d'une déformation unitaire, d'une courbure, d'une rotation ou encore, directement, d'une flèche, dans l'une et l'autre de ces deux hypothèses, et effectuer ensuite la pondération définie par la relation suivante :

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (18)$$

avec  $\alpha$  paramètre considéré,

$\alpha_I, \alpha_{II}$  valeurs de ce paramètre calculées respectivement pour la section non fissurée ( $\alpha_I$ ) et pour la section entièrement fissurée ( $\alpha_{II}$ ),

$\zeta$  coefficient de répartition donné par :

$$\zeta = 1 - \beta (\sigma_{sr} / \sigma_s)^2 \quad (19)$$

$\beta$  coefficient tenant compte de la durée ou de la répétition du chargement,,

$\beta = 1$  pour un chargement unique de courte durée,,

$\beta = 0,5$  pour un chargement de longue durée ou répété,,

$\sigma_s$  contrainte de traction de l'acier calculée en section fissurée,,

$\sigma_{sr}$  contrainte de traction de l'acier calculée en section fissurée lorsque la contrainte de la fibre de béton la plus tendue est égale à  $f_{ctm}$ ,

$\zeta = 0$  lorsque la section n'est pas fissurée.

Note : dans une pièce fléchie,  $\sigma_{sr} / \sigma_s = M_{cr} / M$  avec  $M_{cr}$  moment de fissuration, et dans un tirant,  $\sigma_{sr} / \sigma_s = N_{cr} / N$  avec  $N_{cr}$  effort entraînant la fissuration du tirant.

#### Origine du coefficient $\zeta$ (figure 5)

Reprendons l'exemple d'un tirant en béton armé de longueur  $\ell$ . L'effort qui provoque la fissuration est :  $F_r = (A_c + \alpha_e A_s) f_{ct} (\alpha_e$ , coefficient d'équivalence). Il lui correspond dans l'acier tendu, juste au moment où le béton se fissure, une contrainte :

$$\sigma_{sr} = F_r / A_s = [(A_c / A_s) + \alpha_e] f_{ct} \quad (20)$$

Pour une force de traction  $F > F_r$ , l'allongement total du tirant est  $\Delta\ell$  et la déformation relative moyenne de l'armature, qui est comprise entre  $\varepsilon_{s1}$ , déformation relative de l'armature calculée dans l'état I (en section homogène non fissurée), et  $\varepsilon_{s2}$ , déformation relative de l'armature calculée dans l'état II-nu (sections supposées toutes fissurées, contribution du béton tendu entre les fissures négligée), vaut :

$$\varepsilon_{sm} = \Delta\ell/\ell = \varepsilon_{s2} - \Delta\varepsilon_s$$

où  $\Delta\varepsilon_s$  représente la contribution du béton tendu entre les fissures.

On peut admettre (simplification plausible) que pour  $\sigma_s > \sigma_{sr}$ , la variation de  $\varepsilon_{sm}$  en fonction de  $\varepsilon_{s2}$  est un arc d'hyperbole, asymptote à la droite de pente  $E_s$  représentant la variation de  $\varepsilon_{s2}$  pour l'acier nu. Cet arc d'hyperbole est défini par :  $\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{smax} (\sigma_{sr} / \sigma_s) = (\varepsilon_{s2r} - \varepsilon_{s1r}) \sigma_{sr} / \sigma_{s2}$  ou encore, par suite de relations de triangles semblables :

$$\Delta\varepsilon_s = (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1}) (\sigma_{sr} / \sigma_{s2})^2$$

En reportant cette valeur dans l'expression donnant  $\varepsilon_{sm}$  et en posant  $\zeta_0 = 1 - (\sigma_{sr} / \sigma_{s2})^2$ , on trouve :

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta_0) \varepsilon_{s1} + \zeta_0 \varepsilon_{s2}$$

Établie dans le cas d'un tirant, donc de la traction pure, cette expression demeure valable pour la zone tendue des pièces fléchies.

Afin de tenir compte de la durée d'application et de la répétition des charges, l'EC2 adopte, à la place de  $\zeta_0$  l'expression corrigée (19) ci-avant qui revient à admettre que la contribution du béton tendu en cas de chargement de longue durée ou répété est deux fois plus faible que pour un chargement de courte durée.

Il aurait été logique d'adopter cette même valeur de  $\zeta$  pour le calcul des ouvertures des fissures. Mais, en fait, pour évaluer la différence ( $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$ ), voir (7), l'EC2 a adopté :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \varepsilon_{s2} - k_t \varepsilon_{sr} = (\sigma_{s2} - k_t \sigma_{sr}) / E_s \quad (21)$$

où  $k_t$  est un coefficient empirique permettant une évaluation de la déformation moyenne sur la distance maximale entre les fissures, qui prend les valeurs :  $k_t = 0,6$  pour un chargement de courte durée, et  $k_t = 0,4$  pour un chargement de longue durée. Quant à la contrainte  $\sigma_{sr}$ , elle résulte de l'équilibre des forces au moment où le « tirant » de section  $A_{c,eff}$  (figure 2) se fissure et où l'effort équilibré par la section homogène non fissurée est transmis à l'acier :

$$\sigma_{sr} = [(A_{c,eff} / A_s) + \alpha_e] f_{ctm} \text{ (cf. équation (20))}$$

ou, en posant  $\rho_{p,eff} = A_s / A_{c,eff}$  :

$$\sigma_{sr} = (1 + \alpha_e \rho_{p,eff}) f_{ctm} / \rho_{p,eff}$$

En portant cette dernière expression dans (21) et en remplaçant  $f_{ctm}$  par  $f_{ct,eff}$ , on trouve l'expression (8) de l'EC2, qui revient à substituer à la variation hyperbolique de la figure 5 une variation linéaire (figure 6).

#### Prise en compte du fluage et du retrait

a) Pour tenir compte du fluage, le module d'élasticité du béton est pris égal à :

$$E_{c,eff} = E_{cm} / [1 + \varphi(\infty, t_0)] \quad (22)$$

avec  $E_{cm}$  tiré de [C 2 330, formule (8)],

$\varphi(\infty, t_0)$  coefficient de fluage tiré des courbes de [C 2 330, figure 1].

#### b) Effet du retrait

Le raccourcissement du béton dû au retrait est généré par la présence des armatures. L'effet du retrait agissant seul peut être assimilé à un effort normal de traction fictif appliqué au centre de gravité du béton (figure 7) :

$$N_c = \varepsilon_{cs} E_c A_c$$

avec  $\varepsilon_{cs}$  déformation de retrait considérée,

$E_c$  module d'élasticité du béton,

$A_c$  aire de la section droite du béton seul.

Aucun effort n'agissant sur la section, la résultante des efforts doit être nulle dans chaque section. Pour respecter cette condition, il faut introduire dans la section une force égale et directement opposée à  $N_c$ . Au centre de gravité de la section homogène, on obtient alors les éléments de réduction suivants :

— effort normal de compression :  $N_{cs} = -N_c$

— moment de flexion positif :  $M_{cs} = N_{cs} d_c$

où  $d_c$  représente la distance du centre de gravité du béton seul au centre de gravité de la section homogène, d'où :

$$M_{cs} = \varepsilon_{cs} E_c A_c d_c$$

Or, par définition du centre de gravité,  $A_c d_c = \alpha_e A_s d_s$ , en appelant  $d_s'$  la distance du centre de gravité de la section  $A_s$  des armatures tendues au centre de gravité de la section homogène et  $\alpha_e$  le coefficient d'équivalence.

En posant  $S = A_s d_s$ , on a donc aussi  $M_{cs} = \varepsilon_{cs} E_c \alpha_e S$  et la courbure  $1/r_{cs}$  due au retrait vaut alors  $M_{cs}/E_c I$ , ce qui conduit à la formule (23).

La courbure  $1/r_{cs}$  due au retrait est prise égale à :

$$1/r_{cs} = \varepsilon_{cs} \alpha_e S / I \quad (23)$$

avec  $\varepsilon_{cs}$  donné par [C 2 330, formule (8)],

$S$  moment statique des armatures tendues par rapport au centre de gravité de la section homogène,

$I$  moment d'inertie de la section droite homogène par rapport au centre de gravité de cette même section.

Comme on tient compte du flUAGE, dans tous les calculs, le module d'élasticité du béton à considérer est le module  $E_{c,eff}$  défini par la relation (22) et  $\alpha_e = E_s / E_{c,eff}$ .

Le calcul de  $S$  et de  $I$  est à faire d'une part, pour la section homogène non fissurée, d'autre part, pour la section homogène entièrement fissurée.

La courbure finale est obtenue en appliquant la formule (18).

#### Exemple : calcul de flèche

Poutre à section rectangulaire  $0,3 \times 0,5$  m, sur appuis simples, de portée effective  $\ell_{eff} = 5,10$  m soumise, outre son poids propre, aux charges suivantes :

- charge permanente :  $g = 6,25$  kN/m ;
- charge variable :  $q = 10$  kN/m.

Béton de classe C20/25 ; coefficient de flUAGE :  $\varphi(\infty, t_0) = \varphi = 2$ .

Retrait final :  $\varepsilon_{cs} = 3 \times 10^{-4}$

Poids propre :  $g_0 = 25 \times 0,3 \times 0,5 = 3,75$  kN/m

Moment maximal dû aux charges permanentes :

$$M_g = (6,25 + 3,75) \frac{5,1^2}{8} \approx 32,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Moment maximal dû aux charges variables :

$$M_q = 10 \times \frac{5,1^2}{8} \approx 32,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Moment total à mi-portée :

$$M_{Ed} = 65 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Résistance à la traction du béton [C 2 330, tableau 1] :

$$f_{ctm} = 2,2 \text{ MPa}$$

Module d'élasticité du béton [C 2 330, tableau 1] :

$$E_{cm} = 29 \text{ kN/mm}^2$$

Coefficient d'équivalence :

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{2 \times 10^5}{9,67 \times 10^3} = 20,7$$

La section étant rectangulaire et la poutre étant supposée armée de  $4 \varnothing 16 = 8,04 \text{ cm}^2$  (section largement surabondante vis-à-vis de l'état-limite ultime, mais là n'est pas le problème) avec une hauteur utile  $d = 45,5$  cm, on a :

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{8,04}{30 \times 45,5} \approx 0,006$$

#### A) Courbure dans la section médiane

Si l'on néglige les armatures pour simplifier, le moment de fissuration vaut :

$$M_{cr} = \frac{f_{ctm} b h^2}{6} = \frac{2,2 \times 0,3 \times 0,5^2}{6} 10^3 = 27,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Comme  $M_{Ed} > M_{cr}$  il est sûr que la section médiane est fissurée. Module d'élasticité effectif [relation (22)] :

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \varphi} = \frac{29}{1 + 2} = 9,67 \text{ kN/mm}^2$$

#### 1) Courbure due aux charges

Courbure de la section non fissurée (béton armé) :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M_{Ed}}{E_{c,eff} I_c} = \frac{0,065}{9,67 \times 10^3} \cdot \frac{12}{0,3 \times 0,5^3} = 2,15 \times 10^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$$

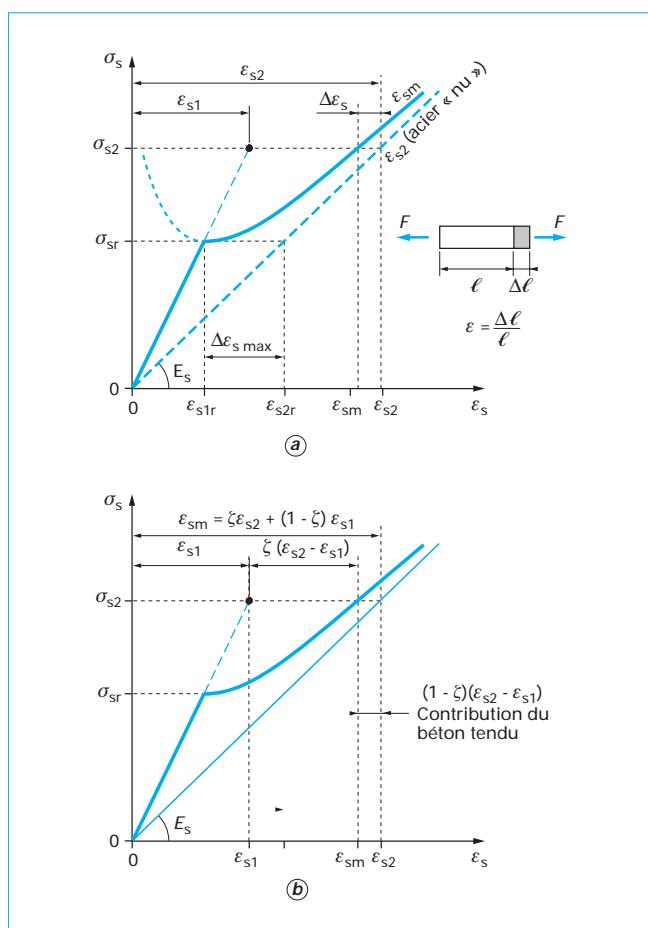


Figure 5 – Contribution du béton tendu – Hypothèse d'une variation hyperbolique. Notations

Courbure de la section fissurée :

La profondeur relative de l'axe neutre est donnée par [Form. C 2 334, (21)] :

$$\frac{x}{d} = 0,39$$

d'où  $x = 0,39d = 0,177 \text{ m}$

La contrainte de l'acier vaut [Form. C 2 334, (24)], avec  $z = d - \frac{x}{3} = 0,396 \text{ m}$  :

$$\sigma_{s2} = \frac{M_{Ed}}{A_s z} = \frac{0,065}{8,04 \times 10^{-4} \times 0,396} = 204 \text{ MPa}$$

d'où la courbure à l'état fissuré :

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{204}{2 \times 10^5} \times \frac{1}{0,455 - 0,177} = 3,7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Il faut maintenant calculer [Form. C 2 334, (23)] :

$$\sigma_{sr} = \frac{M_{cr}}{A_s z} = \frac{27,5 \times 10^{-3}}{8,04 \times 10^{-4} \times 0,396} = 86,4 \text{ MPa}$$

et  $\varsigma = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$  [formule (19)]

avec  $\beta = 0,5$  pour des barres à haute adhérence, et des charges de longue durée :

d'où

$$\varsigma = 1 - 0,5 \left( \frac{86,4}{204} \right)^2 = 0,91$$

Courbure due aux charges [expression (18)] :

$$\frac{1}{r} = \varsigma \frac{1}{r_2} + (1-\varsigma) \frac{1}{r_1} = (0,91 \times 3,7 + 0,09 \times 2,15) 10^{-3}$$

soit  $\frac{1}{r} = 3,56 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$

**2) Courbure due au retrait** [formule (23)] :

$$\frac{1}{r_{cs}} = \frac{\varepsilon_{cs} \alpha_e S}{I}$$

### ■ Section homogène non fissurée

Les formules (18) et (19) de [Form C 2 334] conduisent à :

$$v = 0,27 \text{ m}$$

$$I_I = 0,003754 \text{ m}^4 = 3,754 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

La distance du centre de gravité des aciers à l'axe passant par le centre de gravité de la section homogène est :

$$d_c = d - v = 0,455 - 0,27 = 0,185 \text{ m}$$

Le moment statique des aciers par rapport à cet axe vaut donc :

$$S = 8,04 \times 10^{-4} \times 0,185 = 0,1487 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

et  $\frac{S}{I} = \frac{0,1487 \times 10^{-3}}{3,754 \times 10^{-3}} = 0,03962$

Finalement [formule (23)] :

$$\frac{1}{r_{cs1}} = 3 \times 10^{-4} \times 20,7 \times 0,03962 = 0,246 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

### ■ Section homogène fissurée

La formule (22) de [Form C 2 334], avec  $x = 0,177 \text{ m}$  (calculé ci-dessus) conduit à :

$$I_{II} = 1,84 \times 10^{-3} \text{ m}^4.$$

Dans ce cas :  $d_c = d - x = 0,455 - 0,177 = 0,278 \text{ m}$

$$S = 8,04 \times 10^{-4} \times 0,278 = 0,2235 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

et  $\frac{S}{I} = \frac{0,2235 \times 10^{-3}}{1,84 \times 10^{-3}} = 0,1215 \text{ m}^{-1}$

d'où [formule (23)]

$$\frac{1}{r_{cs2}} = 3 \times 10^{-4} \times 20,7 \times 0,1215 = 0,755 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Avec  $\varsigma = 0,91$  et  $1 - \varsigma = 0,09$ , la courbure due au retrait vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{cs}} &= (0,91 \times 0,755 + 0,09 \times 0,246) \times 10^{-3} \\ &= 0,71 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1} \quad [\text{formule (19)}] \end{aligned}$$

La courbure totale dans la section médiane vaut ainsi :

$$\frac{1}{r_{tot}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_{cs}} = (3,56 + 0,71) \times 10^{-3} = 4,27 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

### B) Calcul de la flèche par intégration numérique

Un calcul rigoureux exige la détermination de  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{1}{r_{cs}}$  et donc  $\frac{1}{r_{tot}}$

en un certain nombre de sections équidistantes espacées de  $\lambda \ell$ . Par exemple pour  $\lambda = 0,1$ , on obtient le tableau 4.

Il faut procéder à une double intégration. La première, pour obtenir les rotations, la seconde pour obtenir les flèches.

Le mode opératoire de l'intégration numérique par la méthode des trapèzes, trop long pour être détaillé ici, est décrit, sur un autre exemple, dans [5].

Dans le cas présent, on trouve par cette méthode comme valeur de la flèche maximale dans la section médiane :  $a_{max} = 11,2 \text{ mm}$ . Toutefois, la satisfaction intellectuelle que l'on peut tirer d'un tel calcul ne compense pas le temps perdu à la recherche d'une solution mathématique quasi rigoureuse mais d'une précision illusoire du point de vue pratique.

Les formules approchées données en [Form C 2 334] fournissent des approximations largement suffisantes.

**a) Méthode A** [Form C 2 334, relation (28)] : ( $\frac{1}{r_i}$  en %,  $a_{max}$  en mm,  $\ell$  en m) :

$$a_{max} = \frac{\ell^2}{600} \left[ \frac{1}{r_0} + 6 \frac{1}{r_1} + 12 \frac{1}{r_2} + 18 \frac{1}{r_3} + 24 \frac{1}{r_4} + 14 \frac{1}{r_5} \right]$$

$$a_{max} = \frac{5,1^2}{600} [0,245 + 6 \times 1,17 + 12 \times 2,74 + 18 \times 3,56 + 24 \times 4,03 + 14 \times 4,27] = 11,3 \text{ mm.}$$

### b) Méthode B

Pour un chargement uniforme, ([Form C 2 334, tableau 2]) donne  $k = 0,104$ . D'où

$$a_{max} = k \ell^2 \frac{1}{r_{tot}} = 0,104 \times \frac{1}{5,1^2} \times 4,27 = 11,55 \text{ mm.}$$

Tableau 4 – Calcul de la flèche par intégration numérique

Sections	Abscisses relatives	$M$ (kN · m)	$1/r_1$ ( $10^{-3} \text{ m}^{-1}$ )	$1/r_2$ ( $10^{-3} \text{ m}^{-1}$ )	$\varsigma$	$1/r$ ( $10^{-3} \text{ m}^{-1}$ )	$1/r_{cs}$ ( $10^{-3} \text{ m}^{-1}$ )	$1/r_{tot}$ ( $10^{-3} \text{ m}^{-1}$ )
0 et 10	0 et 1	0	0	0	0	0	0,245	0,245
1 et 9	0,1 et 0,9	23,4	0,77	1,3	0 (*)	0,77	0,40	1,17
2 et 8	0,2 et 0,8	41,6	1,38	2,3	0,78	2,10	0,64	2,74
3 et 7	0,3 et 0,7	54,6	1,81	3,02	0,87	2,87	0,69	3,56
4 et 6	0,4 et 0,6	62,4	2,06	3,46	0,90	3,32	0,71	4,03
5	0,5 milieu	65	2,15	3,70	0,91	3,56	0,71	4,27

\*  $\varsigma = 0$  puisque  $M = 23,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$  est inférieur à  $M_{cr}$  et que ces sections ne sont donc pas fissurées.

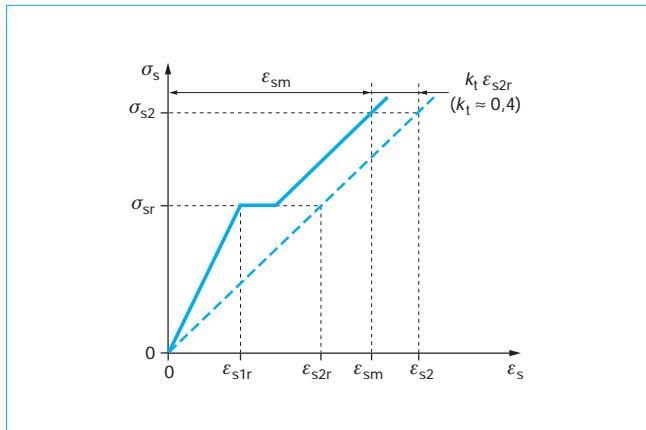


Figure 6 – Contribution du béton tendu – Hypothèse d'une variation linéaire. Notations

Pour en savoir plus, le lecteur pourra se reporter aux références [1] à [8].

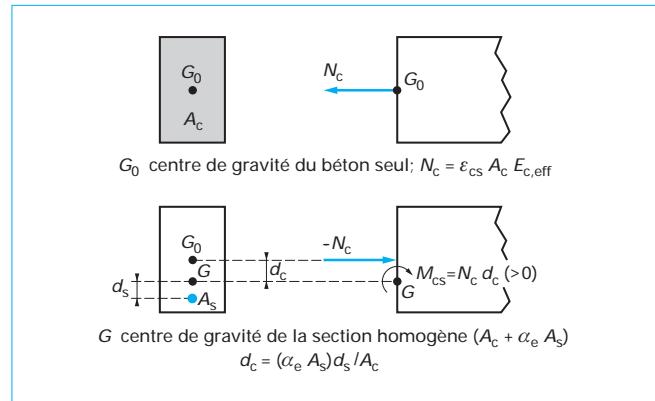


Figure 7 – Effet du retrait dans une poutre en béton armé

De manière générale, le lecteur peut consulter :

- pour les publications de la fib (et les bulletins du CEB) : <http://www.fib-international.org/publications>
- pour les publications touchant aux Eurocodes : <http://www.thomastelford.com>

## Références bibliographiques

- [1] Norme européenne EN 1992-1-1 : *Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - Partie 1 : Règles générales et règles pour les bâtiments*. AFNOR, avr. 2004.
- [2] *CEB-FIP Model Code 90*. Thomas Telford, Londres (1993).
- [3] *Selected Justification Notes*. Bulletin d'information n° 217 du CEB (1993).
- [4] *Structural Concrete. Textbook on Behaviour, Design and Performance*. Updated knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990, Volumes 1, 2 et 3. fib (1999).
- [5] PERCHAT (J.) et ROUX (J.). – *Maitrise du BAEL 91 et des DTU associés*. Eyrolles (1999).
- [6] *Applications de l'Eurocode 2 - Calcul des bâtiments en béton* – Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, mai 2005.
- [7] BEEBY (A.W.) et NARAYANAN (R.S.). – *Designer's Guide to EN 1992-1-1 Eurocode 2 : Design of concrete structures – General rules and rules for buildings*. Thomas Telford, août 2005.
- [8] *Les Eurocodes – Conception des bâtiments et des ouvrages de Génie Civil*. Éditions du Moniteur (2005).
- [9] Norme NF P 18-711-2. – *Annexe Nationale à la NF EN 1992-1-1*. AFNOR, à paraître.
- [10] Norme ISO 4356-1977. – *Bases du calcul des constructions. Déformations des bâtiments à l'état-limite de service*. AFNOR, nov. 1977.