

# Eurocode 2. Béton armé

## Formules et données utiles

par **Jean PERCHAT**

*Ingénieur des Arts et Manufactures*

*Professeur honoraire à l'École supérieure des travaux publics et au Centre des hautes études de la construction*

<b>1. Calculs en flexion à l'état-limite ultime (article 6.1 de l'EC2) ....</b>	<b>C 2 334 – 2</b>
1.1 Recherche des sections d'acier .....	— 2
1.2 Calcul du moment résistant $M_{Rd, u}$ d'une section rectangulaire sans aciers comprimés .....	— 3
<b>2. Calculs relatifs à la fissuration .....</b>	<b>— 3</b>
2.1 Section homogène non fissurée (sans aciers comprimés) .....	— 3
2.2 Section homogène fissurée (sans aciers comprimés) .....	— 3
<b>3. Flèches. Méthodes de calcul approchées .....</b>	<b>— 4</b>
3.1 Méthode A .....	— 4
3.2 Méthode B .....	— 4

**D**ans ce dossier sont regroupées les formules et données utiles aux dossiers traitant de l'Eurocode 2. Béton armé :

- [C 2 330] Dispositions et données générales ;
- [C 2 331] Vérification des états-limites ultimes ;
- [C 2 332] Vérification des états-limites de service.

# 1. Calculs en flexion à l'état-limite ultime (article 6.1 de l'EC2)

- Section rectangulaire  $bd$ .

$d$ , hauteur utile ;  $d'$  distance des aciers comprimés éventuels à la fibre la plus comprimée.

- Béton de classe au plus égale à C 50/60 :  $f_{ck} \leq 50$  MPa – Acier B 500.

- Déformations relatives exprimées en ‰.

Les formules données ci-après correspondent à l'utilisation du **diagramme parabole-rectangle** [C 2 330, figure 3].

## 1.1 Recherche des sections d'acier

a) Équation de la branche inclinée du diagramme de calcul de l'acier [C 2 330, figure 7]

$$\sigma_s = 433 + 0,812 \varepsilon_s \leq 470 \text{ MPa} \quad (1)$$

b) Section rectangulaire sans aciers comprimés ( $\mu_d \leq \mu_{lim}$ , voir c) ci-après)

Moment « réduit » :

$$\mu_d = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} \quad \left( f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \right) \quad (2)$$

Hauteur de l'axe neutre :

$$\mu_d = 0,81 \xi (1 - 0,416 \xi) \quad (3)$$

donne

$$\xi = \frac{x_u}{d} = 1,20(1 - \sqrt{1 - 2,06 \mu_d}) \quad (4)$$

Allongement de l'acier tendu :

$$\varepsilon_s = \frac{3,5}{1\,000} \frac{1 - \xi}{\xi} \quad (5)$$

d'où  $\sigma_s$  par (1)

Bras de levier :

$$z = d(1 - 0,416 \xi) \quad (6)$$

Section d'acier :

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{z \sigma_s} \quad (7)$$

c) Section rectangulaire avec aciers comprimés ( $\mu_d > \mu_{lim}$ )

Des aciers comprimés sont nécessaires dans trois circonstances.

1° – Il s'agit d'une section rectangulaire appartenant à une poutre ou une dalle ayant fait l'objet d'une analyse linéaire avec redistribution et dans laquelle la condition sur  $\left(\frac{x_u}{d}\right)_{lim}$  n'est pas satisfaite [C 2 330, équations (42) et (43)].

2° – L'allongement  $\varepsilon_s$  de l'acier est inférieur à  $\frac{f_{yd}}{E_s}$ . La contrainte de l'acier est inférieure à  $f_{yd}$ , l'acier est mal utilisé.

3° – Le moment de flexion à l'état-limite ultime est tel qu'une vérification de la contrainte maximale du béton en service montrerait que la contrainte limite  $0,6 f_{ck}$  est dépassée [C 2 332, § 2].

À chacun de ces trois cas correspond un moment limite « réduit »  $\mu_{lim}$  (ou un moment limite  $M_{lim} = \mu_{lim} bd^2 f_{cd}$ ) et des aciers comprimés sont nécessaires dès que  $\mu_d > \mu_{lim}$  (ou  $M_{Ed} > M_{lim}$ ).

Les valeurs correspondant à chacun de ces trois cas sont les suivantes :

### ■ 1<sup>er</sup> cas : redistribution

Le tableau 1 donne les valeurs de  $\xi_{lim} = \left(\frac{x_u}{d}\right)_{lim}$  et de  $\mu_{lim}$  pour différents pourcentages de redistribution.

### ■ 2<sup>e</sup> cas : bonne utilisation de l'acier : $\sigma_s \geq f_{yd}$

Dans ce cas, la condition à satisfaire est :

$$\varepsilon_s = \frac{3,5}{1\,000} \frac{1 - \xi}{\xi} \geq \varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{avec } E_s = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\text{soit} \quad \xi \leq \frac{700}{700 + f_{yd}}$$

Pour  $f_{yd} = 435$  MPa :  $\xi_{lim} = 0,617$

et, par la formule (3) :  $\mu_{lim} = 0,371$

### ■ 3<sup>e</sup> cas : respect de la limitation de la contrainte du béton en service [C 2 332, § 2].

Ce cas ne peut se présenter que pour les classes d'environnement XD, XS et XF [C 2 330, tableau 4]. Le moment limite dépend de la classe du béton et du rapport  $\gamma$  du moment ultime au moment de service, évalués respectivement à partir des combinaisons des équations (17) et (22) des paragraphes 5.8.3 et 5.8.4 du dossier [C 60], en considérant le même cas de charge.

En l'absence de documents plus précis on peut évaluer  $\mu_{lim}$  en utilisant l'abaque de la figure 19 de [C 2 306], en prenant  $\theta = 1$ ,  $f_{c28} = f_{ck}$  et  $\mu_{lim} = 0,85 \mu_u$ . Le mode de calcul des aciers comprimés est le même que pour les Règles BAEL, mais la méthode exposée en [C 2 306 § 4.5.133] demande à être transposée (notations et coefficients numériques). De plus, son développement étant assez long, elle n'est pas reprise dans le cadre du présent formulaire.

Tableau 1 – Valeurs de  $\mu_{lim}$  en cas de redistribution ( $f_{ck} \leq 50$  MPa)

Pourcentage de redistribution	$\delta$	$\xi_{lim}$	$\mu_{lim}$
0	1	0,448	0,295
5	0,95	0,408	0,274
10	0,90	0,368	0,252
15	0,85	0,328	0,229
20	0,80	0,288	0,205
25	0,75	0,248	0,180
30	0,70	0,208	0,154

### Méthode de calcul pour les deux premiers cas

Le fait de mettre des aciers comprimés a pour effet de « figer » le diagramme des déformations. La hauteur relative de l'axe neutre ne change plus, quel que soit le moment agissant  $M_{Ed}$  supérieur au moment limite  $M_{lim}$  et conserve toujours la même valeur

$\xi_{lim} = \left(\frac{x_u}{d}\right)_{lim}$  correspondant à ce dernier. Comme le raccourcissement du béton atteint  $3,5 \cdot 10^{-3}$  (dans le cas considéré où  $f_{ck} \leq 50$  MPa), les allongements ou raccourcissements des aciers sont complètement déterminés, et ce sont les aciers comprimés qui, seuls, équilibrent l'excédent de moment  $M_{Ed} - M_{lim}$ , proportionnellement à ce dernier.

Une fois  $\mu_{lim}$  déterminé,  $\xi_{lim}$  :

- soit est tiré du tableau 1 (1<sup>er</sup> cas) ;
- soit est égal à 0,617 (2<sup>e</sup> cas).

On a alors :

- pour les aciers tendus :

$$\varepsilon_s = \frac{3,5}{1\,000} \frac{1 - \xi_{lim}}{\xi_{lim}} \text{ d'où } \sigma_s \text{ par (1)} \quad (8)$$

- pour les aciers comprimés :

$$\varepsilon_{sc} = \frac{3,5}{1\,000} \frac{\xi_{lim} - (d'/d)}{\xi_{lim}} \text{ d'où } \sigma_{sc} \text{ par (1)} \quad (9)$$

#### • Section des aciers comprimés

On calcule

$$M_{lim} = \mu_{lim} b d^2 f_{cd} < M_{Ed} \text{ par hypothèse} \quad (10)$$

$$A_{sc} = \frac{M_{Ed} - M_{lim}}{\sigma_{sc}(d - d')} \quad (m^2, m, MN, MPa) \quad (11)$$

#### • Section des aciers tendus : avec $z = d(1 - 0,416\xi_{lim})$

$$A_s = \frac{M_{lim}}{z\sigma_s} + A_{sc} \frac{\sigma_{sc}}{\sigma_s} \quad (m^2, m, MNm, MPa) \quad (12)$$

## 1.2 Calcul du moment résistant $M_{Rd,u}$ d'une section rectangulaire sans aciers comprimés

La section  $A_s$  des armatures tendues est connue.

On commence par calculer une première valeur de la hauteur relative de l'axe neutre :

$$\xi_1 = \frac{A_s f_{yd}}{0,81 b d f_{cd}} \quad (13)$$

L'allongement de l'acier correspondant est d'après (5) :

$$\varepsilon_{s1} = \frac{3,5}{1\,000} \frac{1 - \xi_1}{\xi_1} \quad (14)$$

La contrainte de l'acier correspondante est d'après (1) :

$$\sigma_{s1} = 433 + 0,812 \varepsilon_{s1} > f_{yd}$$

On reporte cette valeur dans (14) à la place de  $f_{yd}$ , d'où de nouvelles valeurs  $\xi_2$ ,  $\varepsilon_{s2}$ ,  $\sigma_{s2}$ , etc. On s'arrête dès que l'effet sur la contrainte de l'acier est peu sensible. La convergence est rapide.

Soit  $\sigma_s$  la valeur retenue, on a donc :

$$\xi = \frac{x_u}{d} = \frac{A_s \sigma_s}{0,81 b d f_{cd}} \quad (15)$$

$$z = d(1 - 0,416\xi) \text{ voir (6)}$$

$$\text{et } M_{Rd,u} = A_s \sigma_s z \quad (16)$$

## 2. Calculs relatifs à la fissuration

$$\rho = \frac{A_s}{b d}$$

$E_{c, eff} = E_{cm}$  sous charges instantanées [C 2 330, tableau 1]

$E_{c, eff} = E_{cm}/1 + \varphi(\infty, t_0)$  sous charges de longue durée [C 2 332, équation (22)]

$$\alpha_e = E_s / E_{c, eff}$$

### 2.1 Section homogène non fissurée (sans aciers comprimés)

On pose  $\eta = h/d$

Hauteur de l'axe de flexion simple :

$$\xi = \frac{v}{d} = \frac{\alpha_e \rho + \eta^2 / 2}{\alpha_e \rho + \eta} \quad (17)$$

Moment d'inertie de la section homogène par rapport à cet axe :

$$I_I = b d^3 \left[ \frac{\eta^3}{3} + \alpha_e \rho - \xi^2 \right] (\eta + \alpha_e \rho) \quad (18)$$

Moment de fissuration :

$$M_{cr} = \frac{I_I}{h - v} f_{ctm} \quad (19)$$

### 2.2 Section homogène fissurée (sans aciers comprimés)

Hauteur de l'axe neutre :

$$\xi = \frac{x}{d} = \alpha_e \rho \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha_e \rho}} - 1 \right] \quad (20)$$

Moment d'inertie de la section homogène fissurée par rapport à cet axe :

$$I_{II} = b d^3 \left[ \frac{\xi^3}{3} + \alpha_e \rho (1 - \xi)^2 \right] \quad (21)$$

Contrainte de l'acier juste après formation de la première fissure

$$\sigma_{s2} = \frac{\alpha_e M_{cr}(d-x)}{I_{II}} = \frac{M_{cr}}{A_s \left(d - \frac{x}{3}\right)} \quad \left(z = d - \frac{x}{3}\right) \quad (22)$$

Contrainte de l'acier sous le moment de service :

$$\sigma_{s2} = \frac{\alpha_e M_{Ed}(d-x)}{I_{II}} = \frac{M_{Ed}}{A_s \left(d - \frac{x}{3}\right)} \quad (23)$$

### 3. Flèches. Méthodes de calcul approchées

#### 3.1 Méthode A

La poutre étant découpée en plusieurs tronçons égaux, on suppose que sur chaque tronçon la courbure varie linéairement. L'équation de la déformée est donc (double intégration) un polynôme du 3<sup>e</sup> degré.

La flèche  $a$  dans une section  $j$  est de la forme :

$$a_j = \frac{\ell^2}{N} \sum k_i \frac{1}{r_i}$$

avec  $\frac{1}{r_i}$  courbure dans les différentes sections limitant les tronçons, sections sur appuis comprises,

$k_i$  coefficients des polynômes, déterminés en écrivant la continuité des courbures, des rotations et des flèches au droit de chaque section  $i$ ,

$N$  coefficient fonction du nombre de sections considérées.

Cette méthode est applicable à une poutre continue, à condition d'affecter le signe « moins » aux courbures des sections où le moment est négatif.

Par exemple, pour 10 sections de calcul équidistantes de  $0,1 \ell$ , la flèche à mi-portée peut être déterminée en calculant :

$$a\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\ell^2}{6\,000} \left( 5 \frac{1}{r_0} + 30 \frac{1}{r_1} + 60 \frac{1}{r_2} + 90 \frac{1}{r_3} + 120 \frac{1}{r_4} + 140 \frac{1}{r_5} + 120 \frac{1}{r_6} + \dots + 5 \frac{1}{r_{10}} \right) \quad (24)$$

avec  $\frac{1}{r_0}, \frac{1}{r_{10}}$  courbures dans les sections d'extrémité.

Pour un chargement **symétrique**, l'expression se simplifie et donne la flèche maximale à mi-portée :

$$a_{\max} = \frac{\ell^2}{600} \left[ \frac{1}{r_0} + 6 \frac{1}{r_1} + 12 \frac{1}{r_2} + 18 \frac{1}{r_3} + 24 \frac{1}{r_4} + 14 \frac{1}{r_5} \right] \quad (25)$$

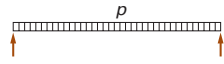
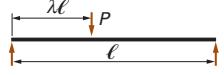
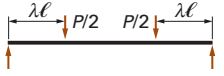
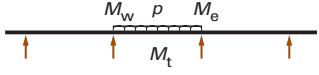

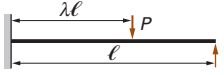
#### 3.2 Méthode B

Dans cette méthode, on ne calcule la courbure que dans une seule section, celle de moment maximal. On admet que la forme du diagramme des courbures est la même que celle des moments de flexion, ce qui conduit à :

$$a_{\max} = k \ell^2 \frac{1}{r_{\text{tot}}} \quad (26)$$

$\frac{1}{r_{\text{tot}}}$  courbure dans la section de moment maximal,  
 $k$  coefficient qui prend selon le cas considéré les valeurs du tableau 2.

Tableau 2 – Coefficient  $k$  de la méthode B

Système statique et chargement	$k$
	0,104
	$\frac{3-4\lambda^2}{48(1-\lambda)}$ si $\lambda = \frac{1}{2}$ $k = \frac{1}{12}$
	$0,125 - \frac{\lambda^2}{6}$
	$0,104 \left( 1 - \frac{\beta}{10} \right)$ avec $\beta = \frac{M_w + M_e}{M_t}$
	flèche à l'extrémité $\frac{\lambda(4-\lambda)}{12}$ si $\lambda = 1$ , $k = 0,25$
	flèche à l'extrémité $\frac{\lambda(3-\lambda)}{6}$ si $\lambda = 1$ , $k = \frac{1}{3}$