

# Béton précontraint

par **Robert CHAUSSIN**

*Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées*

*Professeur de Béton précontraint à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

*et au Centre des Hautes Études de la Construction*

*Direction Technique des Ouvrages d'Art au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées*

<b>1. Présentation générale.....</b>	<b>C 2 360 - 2</b>
<b>2. Matériaux utilisés .....</b>	<b>— 8</b>
<b>3. Matériel de précontrainte par post-tension .....</b>	<b>— 14</b>
<b>4. Calcul de la tension d'un câble en post-tension .....</b>	<b>— 21</b>
<b>5. Flexion des poutres isostatiques en l'absence de fissuration ....</b>	<b>— 29</b>
<b>6. Flexion en précontrainte partielle.....</b>	<b>— 42</b>
<b>7. Justifications à la flexion des poutres isostatiques vis-à-vis des états-limites ultimes.....</b>	<b>— 49</b>
<b>8. Résistance à l'effort tranchant .....</b>	<b>— 54</b>
<b>9. Structures hyperstatiques.....</b>	<b>— 60</b>
<b>10. Poutres continues sur appuis simples.....</b>	<b>— 66</b>
<b>Pour en savoir plus.....</b>	<b>Doc. C 2 360</b>

**A** lors que les origines de nombreuses techniques sont souvent incertaines et controversées, l'invention du béton précontraint est connue sans ambiguïté puisqu'un seul homme, E. Freyssinet, peut légitimement la revendiquer : c'est lui qui conçut et réalisa, dès 1908, le tirant de l'arche d'essai du Veurdre, ancêtre incontestable de tous les ouvrages en béton précontraint, perdu pendant la Première Guerre mondiale puis retrouvé par hasard en 1991 dans un jardin particulier des environs de Moulins ; c'est lui qui, en 1928, déposa les premiers brevets sur l'ancrage par adhérence, à l'origine de la précontrainte par prétension puis qui, au sein de la société FORCLUM, développa toutes les techniques permettant sa mise en œuvre effective (structure des moules, préétirage des fils, essorage et étuvage des bétons...) pour la réalisation de poteaux électriques ; c'est lui encore qui inventa le premier système opérationnel d'ancrage par post-tension et le vérin associé (brevets de 1939)... Si E. Freyssinet fut un constructeur remarquable, un pionnier à l'imagination débordante, un expérimentateur et un observateur sans égal, un travailleur acharné et exigeant il ne consacra jamais beaucoup de temps à publier sur ses idées ni surtout à les vulgariser en les structurant et en les détaillant de façon à en faciliter l'appropriation par le plus grand nombre. C'est à quelques-uns de ses brillants collaborateurs, parmi lesquels on peut citer Y. Guyon et P. Lebel, que revient le mérite d'avoir rendu accessible à la communauté des ingénieurs-construteurs l'ensemble de ces concepts nouveaux, d'en avoir fondé une théorie cohérente et d'en avoir dégagé des règles simples de prédimensionnement.

Le présent article s'inscrit modestement dans cette lignée. Son objet se limite à la précontrainte par câbles de structures en béton essentiellement constituées de poutres.

Les premiers paragraphes, après avoir montré comment réaliser la précontrainte d'une structure puis comment évaluer ses effets (§ 1), développent un certain nombre de notions incontournables sur les matériaux et les matériels utilisés (§ 2 et 3) ainsi que sur l'estimation de la tension dans les armatures actives (§ 4). À ce sujet, le lecteur pourra se reporter à l'article [C 2 372] qui traite des techniques de mise en œuvre du béton précontraint.

Les paragraphes 5, 6, 7 et 8 sont consacrés aux structures isostatiques : le paragraphe 5 est axé sur le prédimensionnement des poutres à la flexion, dans le domaine du comportement élastique non fissuré dont le respect constitue le fondement même de la précontrainte ; puis sont abordées la précontrainte partielle (§ 6), la résistance à rupture (§ 7) et la résistance vis-à-vis des sollicitations tangentes (§ 8).

Les derniers paragraphes traitent des structures hyperstatiques : après avoir montré comment on peut appréhender les réactions et les sollicitations que génère la précontrainte dans de telles structures (§ 9), on se restreint par la suite aux poutres continues sur appuis simples qui permettent, moyennant des développements analytiques assez légers, de dégager quelques principes fondamentaux, facilement extrapolables à des structures plus complexes (§ 10) ; enfin, l'article [C 2 365] se consacre au prédimensionnement de la précontrainte dans le cas des poutres à câbles filants, problème qui peut constituer un véritable casse-tête pour le projeteur s'il l'aborde de façon trop empirique.

Cet ensemble très limité n'a pour seule ambition que de donner à l'ingénieur quelques bases solides lui facilitant l'approche de problèmes plus complexes. Le caractère parfois un peu abstrait des raisonnements ne doit pas lui faire oublier, en tout cas, que la qualité d'un projet tient essentiellement dans sa conception de détail et qu'en ce domaine le bon sens et l'intuition, alliés à une bonne connaissance des matériaux et des techniques, sont souvent de meilleurs guides que de longs développements mathématiques, bien qu'ils ne bénéficient pas, comme ces derniers, de l'appui du sacro-saint ordinateur qu'il faut savoir cantonner à sa fonction de simple outil.

L'auteur tient à remercier **Monsieur Jacques FAUCHART**, auteur de nombreux ouvrages sur le béton précontraint sur lesquels il a pu s'appuyer pour la rédaction de son article.

## 1. Présentation générale

### 1.1 Définition et conventions

Le béton précontraint est né du raisonnement suivant : le béton est aujourd'hui le matériau de construction le plus économique. Il résiste bien à la compression, mais peu, et surtout de façon aléatoire, à la traction.

Il faut donc construire en béton, mais en évitant que ce matériau soit trop tendu, et risque de se fissurer.

Et pour cela, il faut le comprimer de façon artificielle et en permanence, dans les zones où les charges extérieures développent des tractions, de façon qu'au total le béton reste comprimé (ou assez peu tendu pour ne pas risquer de se fissurer) et donc résistant, en tous cas de charge.

L'effort de compression volontairement développé à cet effet est appelé **l'effort de précontrainte** (ou, en abrégé, la **précontrainte**).

Le remède ne doit pas pécher par excès : la compression totale du béton doit rester inférieure à une valeur raisonnable, de façon à éviter tout risque de fissuration longitudinale des éléments précontraints (alors que les tractions y développent généralement des fissures transversales).

Au total, un ouvrage en béton est dit en béton précontraint quand il est soumis à un système d'efforts créés artificiellement pour engendrer des contraintes permanentes qui, composées avec les contraintes dues aux charges extérieures, donnent des contraintes totales comprises entre des limites que le béton peut supporter indéfiniment, en toute sécurité.

La philosophie ainsi exposée est celle de la précontrainte totale. Bien entendu, la précontrainte totale d'un ouvrage ne peut être réalisée que pour des charges appartenant à un domaine limité, supposé parfaitement connu à l'avance.

Si ce domaine inclut des charges rarement atteintes dans la réalité, les principes précédents peuvent entraîner un surdimensionnement de la précontrainte, conduisant à faire travailler la matière dans des conditions peu rationnelles sous l'effet des charges effectivement appliquées pendant la majeure partie de la vie de l'ouvrage.

C'est pourquoi s'est développée progressivement la notion de précontrainte partielle : la décompression du béton n'y est interdite que sous l'effet des charges permanentes ou quasi permanentes.

Sous l'effet de charges plus agressives, on admet que des fissures puissent se former (comme en béton armé) à condition que leur ouverture demeure suffisamment limitée pour :

- qu'elles soient réversibles et se referment donc sous charges permanentes ou quasi permanentes ;
- que les risques de corrosion et de fatigue des armatures soient négligeables.

Dans tous les cas, la valeur minimale de la précontrainte résulte de la valeur plancher imposée à la contrainte normale du béton (comptée algébriquement positive lorsqu'elle est de compression) :

- sous l'effet des cas de charge les plus agressifs lorsqu'on est en précontrainte totale ;
- sous l'effet des seules charges permanentes ou quasi permanentes lorsqu'on est en précontrainte partielle.

La section minimale de béton découle, pour sa part, du plafonnement de la contrainte normale de compression du béton.

## 1.2 Modes de réalisation de la précontrainte

### 1.2.1 Gonflement de vérins prenant appui sur des culées fixes

On interpose entre les culées et la pièce de béton coulée entre elles des vérins dont le gonflement raccourcit et, par conséquent, comprime la pièce. Des cales introduites ensuite, entre les culées et la pièce, maintiennent celle-ci dans son état comprimé.

Ce procédé n'est économique que lorsque les culées le sont, soit, le plus souvent, quand du rocher en place peut en tenir lieu. Sinon, on peut relier les deux culées par un tirant qui les empêche de s'écarter sous l'action des vérins. Le tirant le moins coûteux est le câble en acier, d'où le procédé suivant (§ 1.2.2) qui est le plus courant, en pratique, et dont traite plus particulièrement le présent texte.

### 1.2.2 Mise en tension de câbles en acier par des vérins qui s'appuient sur le béton de la pièce à précontraindre

Sous l'action du vérin auquel il est attaché, le câble, logé dans un conduit, s'allonge et se tend à l'effort  $P$  (figure 1). Le vérin, s'appuyant sur le béton, exerce sur lui un effort de compression, égal à  $P$  en vertu de la loi d'action et réaction :  $P$  est donc l'effort de précontrainte.

Le câble, une fois tendu, est ancré sur le béton, ce qui assure la permanence de la compression.

La mise en tension du câble n'est effectuée qu'après que le béton ait été coulé et ait suffisamment durci pour pouvoir résister à l'effort  $P$ . Ce procédé est appelé, pour cela, **précontrainte par post-tension**.

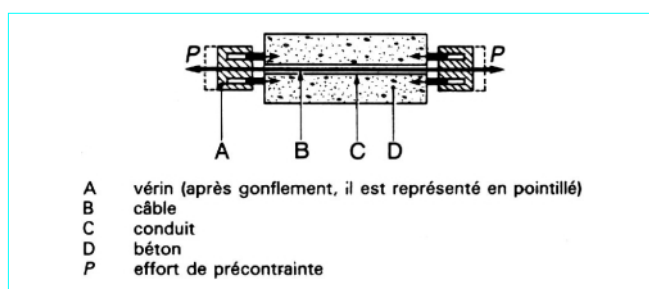


Figure 1 – Mise en tension d'un câble (post-tension)

### 1.2.3 Précontrainte par armatures adhérentes

Ce mode de précontrainte (aussi appelé **précontrainte par prétension**) consiste à tendre tout d'abord les armatures entre deux culées fixes.

On coule ensuite, tout autour d'elles et à leur contact direct, le béton de la pièce. Quand ce béton a suffisamment durci, on relâche la tension dans les armatures et leur raccourcissement :

- s'effectue librement en dehors de la pièce ;
- se trouve entravé à l'intérieur de la pièce par la mobilisation de l'adhérence, ce qui limite très fortement la perte de tension dans les aciers (en partie courante tout au moins) et assure du même coup la mise en compression du béton.

En raison du coût élevé des culées, ce procédé n'est utilisé que pour préfabriquer, en usine, des séries de pièces identiques, à armatures généralement rectilignes (poutrelles et planchers de bâtiments, poteaux de lignes électriques, traverses de voies ferrées, etc.).

## 1.3 Action des câbles de précontrainte sur le béton

### 1.3.1 Équilibre d'une structure précontrainte

Nous considérons une structure soumise à la seule action de sa précontrainte, en faisant abstraction de toutes les charges extérieures, notamment du poids propre.

Les câbles sont en équilibre. Or ils ne sont en contact qu'avec le béton de la structure (par l'intermédiaire de leurs gaines en partie courante et de leurs organes d'ancrage aux extrémités). Ils ne sont

donc soumis qu'aux forces  $\vec{\Phi}_i$  que le béton exerce sur eux. Leur équilibre implique que :

$$\text{Sys}(\vec{\Phi}_i) \sim \vec{0}$$

Le béton est également en équilibre. Il est en contact avec :

- les câbles qui exercent sur lui des forces  $\vec{F}_i$  directement opposées aux forces  $\vec{\Phi}_i$  ( $\vec{F}_i = -\vec{\Phi}_i$ ) ;
- les dispositifs d'appui de la structure qui lui transmettent des réactions d'appui  $\vec{R}_i$ .

L'équilibre du béton exige que :

$$\text{Sys}(\vec{F}_i) + \text{Sys}(\vec{R}_i) \sim \vec{0}$$

Comme  $\text{Sys}(\vec{F}_i) = \text{Sys}(-\vec{\Phi}_i) \sim \vec{0}$ , cela entraîne que :

$$\text{Sys}(\vec{R}_i) \sim \vec{0}$$

Rappelons que les  $\vec{R}_i$  représentent les réactions d'appui dues à la seule précontrainte.

Si la structure est isostatique, la nullité du système des réactions d'appui implique que chaque  $\vec{R}_i$  est nulle. Par contre, il n'en est généralement pas ainsi lorsque la structure est hyperstatique.

### 1.3.2 Équilibre du câble de précontrainte

La rigidité à la flexion d'un câble est faible et peut donc être négligée, ce qui revient à assimiler le câble à un fil parfait. Dans ces conditions, le **seul effort qu'il puisse transmettre est un effort de traction simple tangent à son tracé**.

1.3.2.1 Étude d'un tronçon élémentaire de câble

Considérons un tronçon MN de câble courbe, de longueur  $ds$ , compris entre les abscisses curvilignes  $s$  et  $s + ds$  (figure 2).

Remarquons qu'un tracé courbe arbitraire n'est possible que dans la mesure où le câble est incorporé à un milieu matériel (le béton) qui exerce sur lui une action de contact.

Le tronçon de câble MN est en équilibre sous l'effet :  
— de la force de tension  $P$  en M, tangente en M au tracé ;  
— de la force de tension  $P + dP$  en N, tangente en N au tracé ;  
— des forces de contact que le béton exerce sur lui entre M et N (par l'intermédiaire du conduit). Ces forces réparties ont une composante normale  $pds$  et une composante tangente  $qds$  (comptées algébriquement dans les sens indiqués par les flèches  $p^+$  et  $q^+$  de la figure 2).

Écrivons cet équilibre en projection sur la normale  $n$  en N. Si l'on néglige les termes du 2<sup>e</sup> ordre :

$$P d\alpha + pds = 0 \quad \text{d'où} \quad p = -P \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{P}{r} \quad (1)$$

$r$  désignant le rayon de courbure du tracé.

De même, en projection sur la tangente en N :

$$dP + qds = 0 \quad \text{d'où} \quad q = -\frac{dP}{ds} \quad (2)$$

Le signe  $-$  de l'expression (1) montre que la composante  $p$  est centrifuge, le signe  $-$  de l'expression (2) que  $q$  est orienté dans le sens où  $P$  va en décroissant.  $q$  représente physiquement la force tangente de frottement que le conduit exerce sur le câble au moment de la mise en tension.

1.3.2.2 Équilibre d'ensemble du câble

Le câble AB (figure 3), dans son ensemble, est en équilibre sous l'effet des forces qu'exerce sur lui le béton :

- forces concentrées sous ancrages  $P_A$  et  $P_B$  ;
- forces réparties radiales centrifuges ( $-P/r$ ) et tangentielles ( $-dP/ds$ ).

Ces forces ne sont autres que les forces  $\vec{\Phi}_i$  introduites au paragraphe 1.3.1.

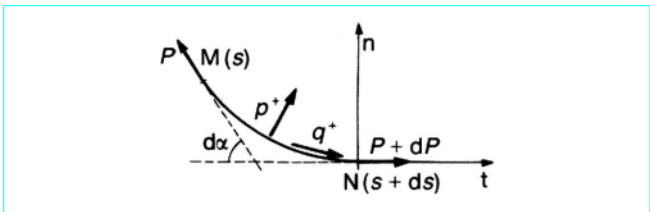


Figure 2 – Équilibre du tronçon MN

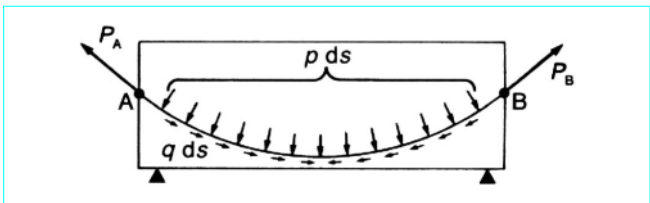


Figure 3 – Équilibre d'ensemble du câble.  
Forces  $\vec{\Phi}_i$  exercées par le béton sur le câble

Les forces  $\vec{F}_i$  que le câble exerce sur le béton sont directement opposées à ces forces  $\vec{\Phi}_i$ .

1.3.3 Équilibre du béton

Il existe deux grandes méthodes générales d'étude des effets de la précontrainte sur le béton d'une structure :

- la méthode directe, applicable dans tous les cas ;
- la méthode interne, qui ne vaut que pour les poutres ou les systèmes de poutres.

1.3.3.1 Méthode directe

Elle consiste à remplacer les câbles par les forces  $\vec{F}_i$ , précédemment analysées, qu'ils exercent physiquement sur le béton de la structure.

On est ainsi ramené à l'étude d'un cas de charge particulier : le cas de charge précontrainte. Les procédés habituels d'analyse structurale permettent de calculer les effets de ce cas de charge (solicitations, contraintes, réactions d'appui  $\vec{R}_i$ , etc.).

1.3.3.2 Méthode interne

Elle ne s'applique qu'aux poutres.

Commençons par examiner le cas d'une poutre isostatique et proposons-nous d'évaluer le système  $S$  des sollicitations développées par le câble de précontrainte, au droit d'une section  $\Sigma$  sur le béton de la poutre.

La section  $\Sigma$  partage la poutre en deux tronçons (figure 4) : le tronçon de gauche ( $g$ ) et celui de droite ( $d$ ).

Le béton n'étant soumis qu'aux forces  $\vec{F}_i$  que le câble exerce sur lui et qu'aux réactions d'appui  $\vec{R}_i$  générées par la précontrainte (ici nulles puisque la poutre est supposée isostatique), on a tout simplement :

$$S = \text{Sys}(\vec{F}_{ig})$$

Examinons alors l'équilibre du tronçon de câble AM. Cet équilibre est assuré par :

- les forces  $\vec{\Phi}_{ig}$  que le béton exerce sur le câble à gauche de la section droite ;
- la force de tension  $P\vec{t}$  du câble au point M ( $\vec{t}$  représentant le vecteur tangent unité au tracé orienté de la gauche vers la droite).

D'où 
$$\text{Sys}(\vec{\Phi}_{ig}) + P\vec{t} \sim \vec{0}$$

Soit 
$$\text{Sys}(-\vec{\Phi}_{ig}) = \text{Sys}(\vec{F}_{ig}) \sim P\vec{t}$$

Ainsi 
$$S \sim P\vec{t}$$

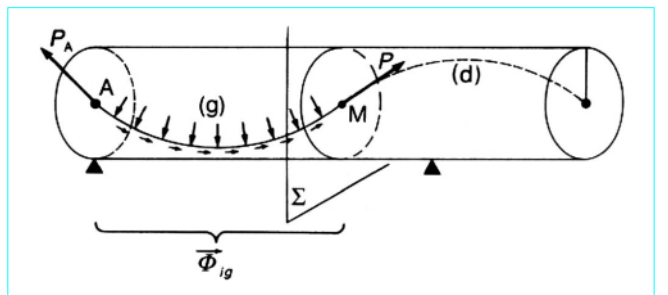


Figure 4 – Sollicitations développées par le câble dans la section droite  $\Sigma$

Le système des sollicitations dans la section droite se réduit à la force de tension du câble au point M (figure 5) :

$$N_p = P \cos \alpha \approx P$$

$$V_p = P \sin \alpha$$

$$M_p = P e_0 \cos \alpha \approx P e_0$$

Supposons maintenant que la poutre soit hyperstatique. Alors, les réactions  $\vec{R}_i$  sont généralement différentes de 0 et :

$$S = \text{Sys}(\vec{F}_{ig}) + \text{Sys}(\vec{R}_{ig}) = S_i + S_h$$

Pour ce qui est de  $S_i = \text{Sys}(\vec{F}_{ig})$ , le raisonnement tenu précédemment demeure valable :

$$S_i = \text{Sys}(\vec{F}_{ig}) \sim P \vec{t}$$

$S_i$  est le système des sollicitations isostatiques de précontrainte dans la section. Mais à ces sollicitations isostatiques viennent s'ajouter les sollicitations hyperstatiques de précontrainte  $S_h$  dévlopées par les réactions hyperstatiques de précontrainte  $\vec{R}_i$ .

## 1.4 Conditions de sécurité. Règlements

Comme la plupart des codes internationaux modernes (code modèle FIP-CEB 78, en cours de révision, Eurocode n° 2 en préparation), le règlement français BPEL 83 est un règlement semi-probabiliste basé sur la notion d'états-limites.

Les données de base (valeurs des actions à prendre en compte, performances mécaniques des matériaux mis en œuvre, etc.) de la justification d'une structure étant des grandeurs aléatoires, une sécurité absolue ne peut être assurée.

Partant de cette remarque, la réglementation actuelle propose la démarche suivante :

- recherche des phénomènes à éviter (par exemple : fissuration, déformations excessives, vibrations, plastification locale des matériaux, ruine) ;
- analyse des conséquences de chacun de ces phénomènes (par exemple : inconfort, diminution de la durée de vie escomptée des ouvrages, risques pour les usagers) ;
- définition de critères de *sécurité* réduisant d'autant plus la probabilité d'occurrence de ces phénomènes que les conséquences de leur apparition sont plus graves.

En pratique, à chaque phénomène à éviter correspond un état-limite. Selon la gravité des risques qui leurs sont associés, ces états-limites se rangent en deux grandes catégories : les états-limites de service (ELS) et les états-limites ultimes (ELU).

Vis-à-vis des ELS, on admet que les matériaux se comportent élastiquement.

Vis-à-vis des ELU, au contraire, on accepte généralement qu'ils entrent dans leur domaine de fonctionnement plastique.

Par ailleurs, les actions aussi bien que les caractères mécaniques des matériaux sont définis par différentes valeurs représentatives, en particulier par des valeurs dites caractéristiques.

À partir des valeurs représentatives des actions, on forme alors des combinaisons d'actions (ensemble d'actions à considérer simultanément pour le dimensionnement) dans lesquelles les valeurs caractéristiques  $F_i$  sont affectées de coefficients de prise en compte  $\gamma_{Fi}$  d'autant plus importants qu'on souhaite réduire la

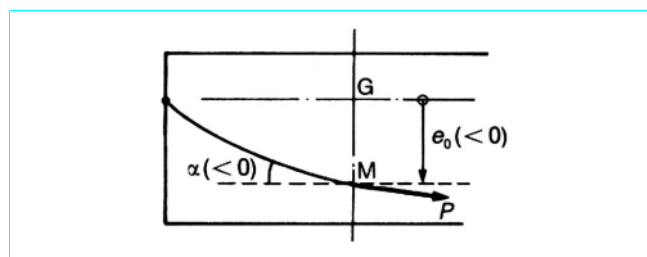


Figure 5 – Effets de la précontrainte (méthode interne)

probabilité d'atteinte des effets des combinaisons en cause (ces coefficients  $\gamma_{Fi}$  sont donc plus grands dans les combinaisons aux ELU que dans les combinaisons aux ELS).

Ces effets de *calcul* doivent être comparés aux capacités de résistance de la structure, elles-mêmes estimées à partir, non pas des valeurs caractéristiques des caractères mécaniques des matériaux  $f_{kj}$ , mais à partir de leurs valeurs de calcul, obtenues en divisant les premières par des coefficients de sécurité  $\gamma_{mj}$  d'autant plus importants qu'on vise une fiabilité plus grande.

Très souvent, les effets se réduisent à des sollicitations, et les critères de sécurité prennent la forme :

$$S_d(\gamma_{Fi} F_i) \leq S_r \left( \frac{f_{kj}}{\gamma_{mj}} \right)$$

avec  $S_d$  sollicitation de calcul,

$S_r$  sollicitation résistante.

### 1.4.1 États-limites

Un état-limite est celui dans lequel une condition requise d'une construction est strictement satisfaite.

Comme déjà vu, on distingue, selon la gravité des conséquences de leur atteinte, deux grandes catégories d'états-limites : les ELS et les ELU.

Les justifications aux ELS ont pour objet de s'assurer de la durabilité des structures et de leur aptitude à remplir la fonction pour laquelle elles ont été conçues.

Les justifications aux ELU permettent de vérifier leur résistance.

En pratique interviennent, dans les constructions précontraintes, les états-limites suivants :

ELS	<ul style="list-style-type: none"> <li>déformation</li> <li>décompression</li> <li>formation de fissures (par excès de traction, mais aussi de compression)</li> <li>ouverture de fissures</li> </ul>
ELU	<ul style="list-style-type: none"> <li>stabilité statique</li> <li>résistance</li> <li>stabilité de forme (flambement, déversement, etc.)</li> </ul>

### 1.4.2 Actions et valeurs représentatives

Selon leur nature, les actions sont classées en :

- actions permanentes (poids propre, poids des équipements fixes, précontrainte, etc.) ;
- actions variables (qui peuvent être cycliques comme la température climatique, ou intermittentes comme les charges d'exploitation ou les charges d'origine naturelle telles que la neige et le vent).

Hormis les actions accidentelles qui ne peuvent être définies que par une valeur nominale, ces actions sont toutes affectées, en principe, de deux valeurs caractéristiques, l'une maximale, l'autre minimale, selon le côté de la distribution que l'on considère.

Chaque valeur caractéristique d'une action est celle qui présente une probabilité faible, mais non nulle, acceptée *a priori*, d'être atteinte ou dépassée dans le sens défavorable au cours d'une certaine durée, dite *durée de référence*, dont l'ordre de grandeur est celui de la durée de vie escomptée pour l'ouvrage.

#### 1.4.2.1 Actions permanentes

La charge probable de poids propre  $g$  est évaluée à partir des dessins de coffrage et d'une masse volumique habituellement estimée à 2,5 t/m<sup>3</sup> pour le matériau *béton précontraint*, tout au moins lorsque l'on fait usage d'agréats traditionnels.

Il y aurait lieu, en principe, de considérer pour la charge de poids propre deux valeurs caractéristiques  $g_1$  et  $g_2$  encadrant la valeur probable  $g$  mais, sauf circonstances spéciales (notamment pièces minces pour lesquelles les imprécisions d'exécution possibles sont élevées en valeur relative), on se contente de la définir par sa valeur probable  $g$  qui a alors le caractère de charge nominale.

De la même façon, les **charges permanentes additionnelles** sont définies soit par leur valeur probable  $g'$  soit, si les incertitudes sont importantes ou si des modifications ultérieures sont envisageables, par des valeurs caractéristiques  $g'_1$  et  $g'_2$ .

La **précontrainte** enfin est, sauf prescription contraire du marché, représentée, pour les justifications aux ELS, par deux valeurs caractéristiques  $P_1$  et  $P_2$  encadrant la valeur probable  $P_m$  avec :

$$P_1 = 1,02 P_0 - 0,8 \Delta P$$

$$P_2 = 0,98 P_0 - 1,2 \Delta P$$

$$P_m = P_0 - \Delta P$$

expressions dans lesquelles  $P_0$  symbolise la précontrainte à l'*origine* et  $\Delta P$  la perte.

On a donc

$$P_1 = (1 + \lambda) P_m$$

$$P_2 = (1 - \lambda) P_m$$

L'ouverture relative  $\lambda$  de la *fourchette* de précontrainte, qui dépend beaucoup de la longueur des armatures et de leur tracé, est couramment de l'ordre de 0,10 lorsqu'on raisonne sur la valeur finale de la précontrainte (elle est bien entendu plus faible en situation d'exécution puisque, alors, seule une fraction des pertes est effectuée).

Pour les justifications vis-à-vis des ELU, au contraire, seule la valeur probable  $P_m$  de la précontrainte est à considérer, d'éventuels écarts par rapport à cette valeur n'ayant pratiquement aucune incidence sur la sécurité à rupture.

#### 1.4.2.2 Actions variables

Pour tenir compte de différentes probabilités d'occurrence ainsi que de l'application simultanée de plusieurs actions variables, on introduit pour elles, outre des valeurs caractéristiques  $Q_k$ , diverses valeurs représentatives dites :

- valeurs de combinaison, notées  $\psi_0 Q_k$  ;
- valeurs fréquentes, notées  $\psi_1 Q_k$  ;
- valeurs quasi permanentes, notées  $\psi_2 Q_k$ .

Chacune de ces valeurs représentatives se dédouble, en fait, en une valeur maximale et une valeur minimale, cette dernière étant nulle pour les actions intermittentes, ce qui justifie que, pour ces actions intermittentes, seule soit explicitée leur valeur maximale.

### 1.4.3 Sollicitations de calcul

Elles résultent de combinaisons d'actions, ensemble d'actions qu'il y a lieu de considérer simultanément, et se présentent sous la forme :

$$\gamma_{F_3} S \left( \sum_i \gamma_{F_{1i}} \gamma_{F_{2i}} F_i \right)$$

où  $F_i$  représente la valeur caractéristique de l'action n°  $i$ .

Les coefficients  $\gamma_{F_1} \geq 1$  permettent de couvrir les possibilités de dépassement des valeurs caractéristiques.

Les coefficients  $\gamma_{F_2} \leq 1$ , qui s'identifient, en fait, aux coefficients  $\psi$ , prennent en compte la probabilité extrêmement réduite d'occurrence simultanée de plusieurs actions variables affectées de leurs valeurs caractéristiques. Dans une combinaison donnée, seuls les coefficients  $\gamma_{F_2}$  relatifs aux actions permanentes et à l'une des actions variables considérée comme action de base peuvent atteindre la valeur 1.

Le coefficient  $\gamma_{F_3} \geq 1$  est destiné, quant à lui, à absorber les incertitudes sur les sollicitations provenant de la simplification des schémas de calcul.

Dans la mesure où le calcul des sollicitations est basé sur une analyse linéaire (ce qui est toujours le cas aux ELS, et presque toujours le cas aux ELU, bien qu'alors ce soit contestable),  $\gamma_{F_3}$  peut être intégré aux autres coefficients.

Dans ces conditions, les sollicitations de calcul sont les suivantes.

#### 1.4.3.1 Vis-à-vis des ELU

##### ■ Combinaisons fondamentales

En désignant par  $G_{\max}$  l'ensemble des actions permanentes défavorables et par  $G_{\min}$  l'ensemble des actions permanentes favorables, elles s'écrivent :

$$S \left\{ \gamma_p P_m + 1,35 G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q_1} Q_{1k} + \sum_{i>1} 1,3 \psi_{0i} Q_{ik} \right\}$$

avec  $\gamma_p = 1$  en général,

$= 1,35$  lorsque les armatures de précontrainte ne participent pas à la résistance vis-à-vis des sollicitations considérées et que cette valeur 1,35 est plus défavorable que la valeur 1 ;

$\gamma_{Q_1} = 1,5$  en général,

$= 1,35$  pour les charges d'exploitation de caractère particulier.

##### ■ Combinaisons accidentelles

$$S \left\{ P_m + F_A + G_{\max} + G_{\min} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum_{i>1} \psi_{2i} Q_{ik} \right\}$$

où  $F_A$  est la valeur nominale d'une action accidentelle.

#### 1.4.3.2 Vis-à-vis des ELS

Dans ce qui suit, la notation  $P_d$  représente la précontrainte de calcul, c'est-à-dire soit le couple  $P_1, P_2$  des valeurs caractéristiques, dans le cas général, soit la valeur probable  $P_m$  si le marché le prescrit.

##### ■ Combinaisons rares

$$S \left\{ P_d + G_{\max} + G_{\min} + Q_{1k} + \sum_{i>1} \psi_{0i} Q_{ik} \right\}$$

##### ■ Combinaisons fréquentes

$$S \left\{ P_d + G_{\max} + G_{\min} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum_{i>1} \psi_{2i} Q_{ik} \right\}$$



## ■ Combinaisons quasi permanentes

$$S \left\{ P_d + G_{\max} + G_{\min} + \sum \psi_{2i} Q_{ik} \right\}$$

Ainsi rangées par ordre d'agressivité décroissante, toutes ces combinaisons sont à considérer dans la mesure où leur sont associés des critères de vérification différents, ce qui est le cas pour la flexion.

### 1.4.4 Situations

Une structure connaît toujours plusieurs situations, caractérisées chacune par l'intervalle de temps pendant lequel peuvent être considérés comme constants les distributions ou les processus aléatoires de toutes les données de la sécurité.

Le plus souvent, on a à considérer :

- **une ou plusieurs situations transitoires** : la ou les situations d'exécution ;
- **une situation durable** : la situation d'exploitation (dans certains cas, on peut en envisager plusieurs si l'on prévoit des changements dans les conditions d'exploitation) ;
- éventuellement, **une ou plusieurs situations accidentelles**.

En principe, les actions et leurs valeurs représentatives changent quand on passe d'une situation à une autre et, dans chaque situation, il convient d'apporter les justifications nécessaires vis-à-vis des sollicitations de calcul précédemment définies, étant bien entendu qu'à chaque combinaison correspondent deux états extrêmes de sollicitations associés à des cas de charge différents.

La notion de situation est particulièrement importante en béton précontraint, où la période d'exécution doit faire l'objet de vérifications spécifiques.

En effet, les conditions auxquelles est alors soumise la structure sont souvent très différentes de celles que l'on rencontre en situation d'exploitation :

- la précontrainte, immédiatement après mise en tension des câbles, est nettement plus élevée qu'en période d'exploitation, puisqu'une partie des pertes différées (par retrait en fluage du béton et par relaxation des armatures) s'effectue entre-temps (§ 4.4) ;
- le béton, encore jeune, n'a pas atteint sa pleine résistance ;
- enfin, les charges extérieures appliquées à la structure ne sont pas les mêmes (du fait notamment que certaines charges réputées permanentes n'interviennent qu'à partir du moment où on les a mises en place).

Compte tenu du caractère passager de ces conditions singulières, les exigences réglementaires (sur les contraintes limites en particulier) sont alors réduites (§ 1.4.5).

### 1.4.5 Justifications vis-à-vis des états-limites de service

Ces justifications sont extrêmement simples dans leur principe. Les matériaux étant censés se comporter élastiquement, il suffit de calculer les contraintes qu'engendrent, dans les sections, les sollicitations de calcul et de s'assurer qu'elles respectent bien les contraintes limites définies réglementairement.

#### 1.4.5.1 Justifications à la flexion

Selon les exigences sur les contraintes limites, ces justifications sont rangées en trois classes. L'un des risques importants des constructions précontraintes étant celui de la corrosion sous tension des armatures actives, ces classes se différencient, en réalité, par les limitations imposées aux contraintes de traction affectant le béton (classes I et II) ou les armatures (classe III).

Les zones sensibles sont, bien entendu, celles qui entourent les câbles. C'est pourquoi a été introduite, dans les règles BPEL 83, la notion de section d'enrobage.

La section d'enrobage est la partie de la section droite qui est délimitée par deux parallèles à l'axe de flexion encadrant l'ensemble des armatures longitudinales de précontrainte à une distance de celles-ci égale à la distance minimale admise entre une armature et le parement le plus proche.

La limitation des tractions est évidemment plus stricte à l'intérieur de la section d'enrobage que sur le reste de la section droite.

#### 1.4.5.1.1 Contraintes limites de compression

Communes aux trois classes, elles valent, en règle générale, lorsque la précontrainte est représentée par ses deux caractéristiques  $P_1$  et  $P_2$  :

Situation	Exécution	Exploitation		
		Rares	Fréquentes	Quasi permanentes
Contraintes limites en compression	0,6 $f_{cj}$	0,6 $f_{cj}$	0,6 $f_{cj}$	0,5 $f_{cj}$

Quand la précontrainte, sur prescription du marché, n'est représentée que par sa valeur probable  $P_m$ , les valeurs précédentes sont minorées de 10 %.

#### 1.4.5.1.2 Contraintes limites de traction (figure 6)

En classe I, aucune décompression n'est tolérée : il s'agit de la précontrainte totale.

En classe II, on admet des tractions modérées dans le béton. Comme en classe I, ces contraintes se calculent sur la section non fissurée.

En classe III, enfin, les contraintes de traction du béton ne sont plus bornées. En revanche, la fissuration est maîtrisée par un plafonnement sévère des tensions dans les armatures passives et des surtensions dans les armatures de précontrainte, calculées sur la section fissurée. C'est le domaine de la précontrainte partielle.

Aussi bien en classe II qu'en classe III, un minimum d'armatures passives longitudinales assure la limitation de l'ouverture des fissures, donc leur réversibilité, même sous combinaisons rares, et, par voie de conséquence, leur refermeture quasi totale sous combinaisons fréquentes, au droit de la section d'enrobage, par l'exigence à ce niveau :

- d'un retour à des contraintes positives du béton en classe II ;
- de limitations très strictes (60 MPa) des contraintes dans les armatures passives, donc des allongements ( $0,3 \times 10^{-3}$ ) en classe III.

En situation de construction, les contraintes limites sont les mêmes que sous combinaisons rares (1<sup>re</sup> colonne de la figure 6).

#### 1.4.5.1.3 Armatures passives longitudinales

Elles résultent de la plus sévère des considérations suivantes.

■ **Ferrailage de peau**, sur toute la périphérie des sections, et pour toutes les classes, d'au moins 3 cm<sup>2</sup>/m (art. 6.1.31 des Règles BPEL).

■ **Ferrailage minimal** que nous qualifierons de *non-fragilité* (art. 6.1.32 des Règles BPEL), en zone tendue (figure 7) pour les classes II et III, dont la section  $A_s$  est donnée par la formule :

$$A_s = \frac{B_t}{1\,000} \times \left( \frac{N_{B_t}}{f_e} + \frac{f_{t_i}}{\sigma_{B_t}} \right)$$

avec  $B_t$  aire de la section du béton en traction,

$\sigma_{B_t}$  valeur absolue de la contrainte maximale de traction,

$N_{B_t}$  résultante des contraintes de traction correspondantes, toutes quantités évaluées sur la section non fissurée (même en classe III).

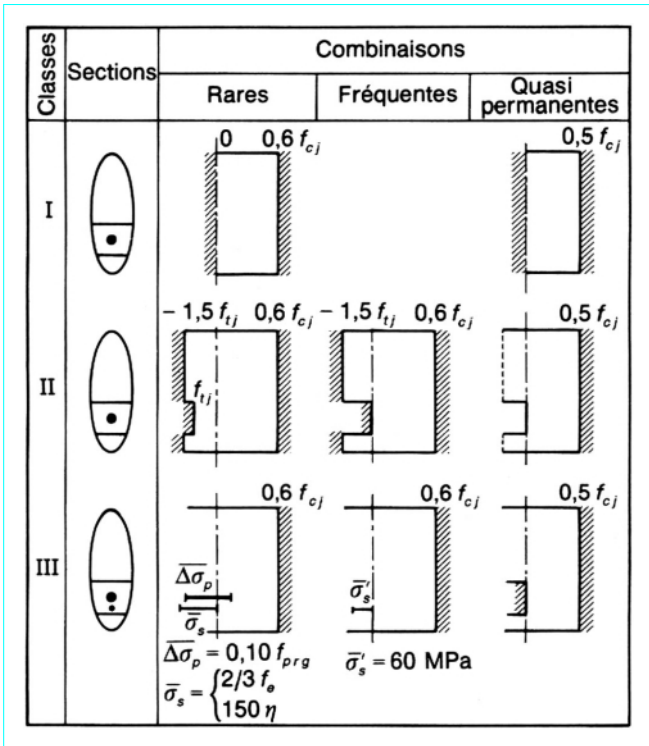


Figure 6 – Contraintes limites selon les classes en situation d'exploitation, lorsque la précontrainte de calcul vaut  $P_d = (P_1, P_2)$

Cette formule conduit, en pratique, à des pourcentages d'aciers passifs compris entre 0,4 % et 0,7 % en zone tendue.

■ **Équilibre mécanique de la section fissurée**, en classe III, presque toujours plus sévère pour cette classe que la condition de non-fragilité précédente.

#### 1.4.5.2 Justifications vis-à-vis de l'effort tranchant

Aux états-limites de service, il s'agit de s'assurer de la convenance, en tout point, de l'état des contraintes (en général assimilée à un état de contraintes planes dans une âme ou dans une membrure).

Les critères de sécurité correspondants sont développés au paragraphe 8.2.4.3.

### 1.4.6 Justifications vis-à-vis des états-limites ultimes

#### 1.4.6.1 Justifications à la flexion

Les matériaux pouvant alors sortir de leur domaine de comportement élastique, il convient de montrer que les sollicitations de calcul définies en 1.4.3.1 n'entraînent pas dans la section l'apparition d'un état-limite ultime caractérisé par l'atteinte d'une déformation limite (et non plus d'une contrainte limite) de l'un quelconque de ses matériaux constitutifs (béton, aciers passifs ou aciers de précontrainte).

Le principe de ces calculs est exposé au paragraphe 7.

Ces justifications ne sont jamais déterminantes pour les aciers de précontrainte ; elles le sont rarement pour les aciers passifs. Par contre, elles peuvent conduire à un renforcement sérieux de membrures en béton qui auraient été dimensionnées de façon trop étiquée sur la seule considération des ELS.

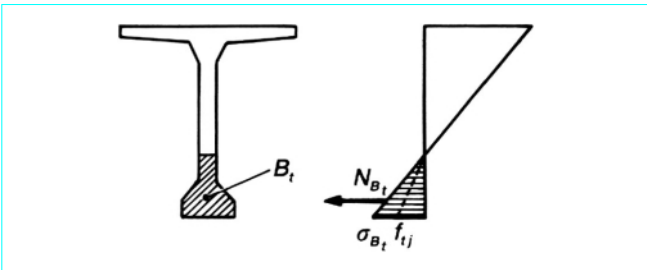


Figure 7 – Condition de non-fragilité

#### 1.4.6.2 Justifications à l'effort tranchant

On admet que, sous l'effet des sollicitations de calcul aux ELU, les âmes se fissurent et résistent selon le schéma classique du treillis de Ritter-Mörsh.

Ce schéma permet à la fois de dimensionner les armatures transversales et de contrôler l'état de compression des bielles de béton (§ 8.3 et article Béton armé. Pièces soumises à des sollicitations tangentes. Sollicitations d'adhérence [C 2 308] dans ce traité).

## 2. Matériaux utilisés

### 2.1 Généralités

Le béton précontraint exige l'emploi de matériaux de haute qualité, mis en œuvre avec soin. Il permet de les utiliser sous des contraintes élevées, notamment à la construction (c'est-à-dire au moment de la mise en tension des câbles).

#### 2.1.1 Acier pour câbles de précontrainte

L'acier pour câbles de précontrainte doit être de haute résistance, pour pouvoir être tendu à un taux initial très élevé (couramment compris entre 1 200 et 1 500 MPa, sauf pour les barres). Cette tension initiale, pas très éloignée de la contrainte de rupture, n'est pas dangereuse car elle diminue progressivement par suite des pertes de précontrainte. Par ailleurs, la tension utile finale est d'autant plus élevée que le sont davantage la tension initiale et donc la résistance de l'acier.

#### 2.1.2 Béton

Le béton doit, lui aussi, être de qualité exceptionnelle car, tant qu'il n'est pas précontraint, il risque de se fissurer sous l'effet de la gène qu'apportent les coffrages à son retrait. Pour éviter cela, il faut mettre ce béton en précontrainte très tôt alors que, jeune encore, il présente une résistance limitée.

Le béton doit donc être de haute résistance et acquérir celle-ci très vite. Il est en effet très sollicité, au moment des mises en tension :

- en section courante, car la précontrainte (les pertes n'étant pas encore effectuées) a sa valeur maximale ; de plus, les charges extérieures (dont l'effet est opposé à celui de la précontrainte) sont souvent incomplètes (par exemple, si des superstructures ne sont pas encore mises en place) ;
- localement, sous ancrages, zones où s'exerce un effort très concentré.

Pour limiter la sollicitation du béton jeune, on tend fréquemment les câbles en plusieurs phases successives : du tiers à la moitié des câbles à 7 j environ après coulage du béton (pour pouvoir décentrer



la poutre, qui peut alors porter son poids), et le reste à une date généralement comprise entre 15 et 30 j après coulage. De plus, on dispose souvent les ancrages dans une pièce d'about préfabriquée en béton fretté et suffisamment âgé pour pouvoir résister aux efforts localisés sous ancrages.

De toute façon, la mise en précontrainte constitue pour le béton une épreuve préalable déterminante (car en vraie grandeur) qui ne lui pardonnerait pas une éventuelle médiocrité.

## 2.2 Béton

### 2.2.1 Caractéristiques

#### 2.2.1.1 Résistance à la compression

Le repère est la résistance caractéristique  $f_{c28}$ , mesurée à 28 j d'âge, sur des éprouvettes cylindriques de 200 cm<sup>2</sup> de base et de 32 cm de hauteur. Un résultat est la moyenne arithmétique de trois mesures effectuées sur trois éprouvettes prélevées dans une même gâchée.

Si l'on dispose de  $n$  résultats (à partir de 3n éprouvettes) :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

on peut calculer facilement des estimateurs de la moyenne  $m$  et de l'écart-type  $s$  de la répartition :

$$m = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{n - 1}}$$

La résistance caractéristique est définie comme étant le fractile d'ordre  $p$  de la répartition probabiliste (avec  $p = 0,10$  si  $f_{c28} < 30$  MPa et  $p = 0,05$  si  $f_{c28} \geq 30$  MPa) à condition que cette répartition respecte une borne inférieure :

$$f_{c28} - 3,5 \text{ MPa} \quad \text{si} \quad f_{c28} < 30 \text{ MPa}$$

$$f_{c28} - 3 \text{ MPa} \quad \text{si} \quad f_{c28} \geq 30 \text{ MPa}$$

En pratique, pour un béton ayant fait l'objet d'épreuves préalables satisfaisantes, on considère que la résistance caractéristique requise  $f_{c28}$  est atteinte si :

$$m \geq f_{c28} + k_1$$

$$x_1 \geq f_{c28} - k_2$$

$k_1$  et  $k_2$  prenant, selon l'effectif  $n$  de l'échantillon, les valeurs données dans le tableau 1.

**Tableau 1 – Valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de l'effectif  $n$  de l'échantillon**

$n$	$f_{c28} < 30 \text{ MPa}$		$f_{c28} \geq 30 \text{ MPa}$	
	$k_1$ (MPa)	$k_2$ (MPa)	$k_1$ (MPa)	$k_2$ (MPa)
3	1,5	3,5	2,7	3
6	2	3,5	3,4	3
9	2,2	3,5	3,7	3
12	2,5	3,5	3,8	3
15	0,95 s	3,5	1,3 s	3

On obtient couramment  $f_{c28} = 30$  MPa (par exemple, pour des ouvrages coulés en place) et, avec un peu plus de soin, 35 ou 40 MPa.

À l'heure actuelle, l'utilisation de fluidifiants permet d'atteindre  $f_{c28} = 60$  MPa et même, moyennant l'adjonction de fumées de silice, 80 à 100 MPa.

Pour les bétons traditionnels, l'allure de la croissance de la résistance du béton  $f_{cj}$  en fonction de son âge ( $j$  = nombre de jours) est donnée par la formule du BPEL :

$$f_{cj} = 0,685 f_{c28} \lg(j + 1)$$

Les valeurs résultant de cette formule, considérées comme normalement respectées par tous les bétons sans prescription particulière, sont généralement pessimistes.

Par ailleurs, on admet, pour les calculs, qu'au-delà de 28 j, la résistance plafonne à sa valeur  $f_{c28}$ , bien qu'en pratique elle continue à augmenter.

#### 2.2.1.2 Résistance à la traction

On la prend égale à :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj} \text{ (en MPa)}$$

### 2.2.2 Ciments

Le béton doit être rapidement résistant. Le ciment doit, par ailleurs, être dépourvu de tout produit risquant de corroder l'acier des câbles et, particulièrement, de chlorures (l'emploi de CaCl<sub>2</sub> doit notamment être proscrire).

On emploie donc, de préférence le ciment Portland artificiel (obligatoire dans le cas de la pré-tension, les armatures de précontrainte étant alors en contact direct avec le béton) de classe 45, 55 ou HP, et éventuellement de sous-classe rapide lorsqu'une haute résistance initiale est nécessaire (article *Béton hydraulique. Variétés de bétons et constituants* [C 2 210] dans ce traité).

### 2.2.3 Déformations du béton

#### 2.2.3.1 Déformation sous chargement instantané

Soumettons un prisme de béton à une déformation croissante, et traçons le diagramme représentant le raccourcissement relatif  $\varepsilon = \Delta \ell / \ell$  en fonction de  $\sigma$  (figure 8).

Le diagramme obtenu est sensible à la vitesse de montée en déformation. C'est pourquoi il est indispensable d'opérer à vitesse normalisée.

Le fonctionnement est tout d'abord élastique (OI) :

$$\sigma = E_{ij} \varepsilon$$

avec  $E_{ij} = 11\,000 f_{cj}^{1/3}$  (où  $E_{ij}$  et  $f_{cj}$  sont en MPa).

Le module d'élasticité instantané  $E_{ij}$  est donc fonction, comme  $f_{cj}$ , de l'âge  $j$  du béton.

Puis la déformation  $\varepsilon$  croît beaucoup plus vite que  $\sigma$  : le béton se plastifie. La courbe  $\sigma(\varepsilon)$  passe par un maximum, dit *pic de contrainte*, pour une déformation de l'ordre de  $2 \times 10^{-3}$ , la rupture du béton ne survient que pour un raccourcissement estimé, en général, à  $\varepsilon_u = 3,5 \times 10^{-3}$ .

L'hypothèse classique du comportement élastique n'est valable que pour  $\sigma \leq 0,3 f_{cj}$ , mais reste pourtant acceptable jusqu'à  $0,6 f_{cj}$ .

Au-delà, il faut recourir à d'autres modèles représentant correctement le comportement du béton jusqu'à rupture.

En traction, le béton est fragile et ne présente pratiquement pas d'allongement plastique.

2.2.3.2 Retrait du béton

C'est le raccourcissement spontané du béton au cours de son durcissement en l'absence de toute contrainte. Ce raccourcissement peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r r(t)$$

avec  $\varepsilon_r$  retrait final,

$r(t)$  une fonction du temps variant de 0 à 1 quand le temps varie de 0 à  $\infty$  à partir du bétonnage.

Le retrait étant dû à l'évaporation progressive de l'eau non fixée dans la réaction d'hydratation du ciment, on conçoit facilement que  $\varepsilon_r$  dépend :

- de la composition du béton (fonction croissante du rapport E/C : eau/ciment) ;
- de l'hygrométrie  $\rho_h$  du milieu ambiant (fonction décroissante de  $\rho_h$  ; un béton conservé dans l'eau présente même un retrait négatif) ;
- des dimensions transversales de la pièce, représentées par son rayon moyen :  $r_m = B/u$ , B étant l'aire de la section droite de la pièce et u son périmètre en contact avec le milieu ambiant (fonction décroissante de  $r_m$ ).

Dans les conditions climatiques de la France métropolitaine, on admet souvent, pour  $\varepsilon_r$ , les valeurs forfaitaires suivantes :

- $3 \times 10^{-4}$  dans le quart Sud-Est ;
- $2 \times 10^{-4}$  dans le reste du territoire.

Par ailleurs, le BPEL propose, pour la loi d'évolution du retrait :

$$r(t) = \frac{t}{t + 9r_m}$$

avec  $t$  (j) âge du béton,  
 $r_m$  (cm) rayon moyen.

Si le béton est empêché d'effectuer son retrait, il se met en traction. Il faut donc éviter d'entraver ce retrait (notamment en libérant dès que possible le béton de ses coffrages, et donc en le précontrainant rapidement) ; il faut aussi empêcher que les diverses parties d'une même pièce aient des vitesses de retrait trop variables (ce qui se produit si leurs épaisseurs sont très différentes, ou si elles sont bétonnées à des époques différentes) ; il faut alors soigner la cure du béton en l'humidifiant en permanence durant une à deux semaines.

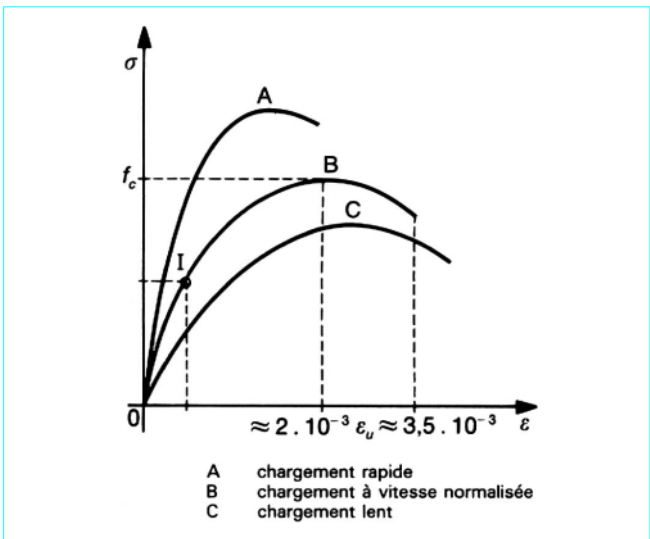


Figure 8 – Déformation du béton sous chargement instantané

Enfin, le raccourcissement de retrait provoque une diminution progressive de la tension dans les armatures de précontrainte.

2.2.3.3 Fluage du béton

Par définition, c'est le raccourcissement progressif du béton sous contrainte constante, retrait réduit. Ce phénomène est, lui aussi, lié à la migration de l'eau à l'intérieur du béton.

Pour mener à bien une expérience de fluage, il faut disposer de deux éprouvettes identiques, confectionnées simultanément à partir du même béton (figure 9) :

- l'éprouvette A sert de témoin de retrait ;
- l'éprouvette B est chargée à partir du temps  $t_0$  (qui représente, en fait, l'âge commun des deux éprouvettes, l'origine des temps étant la date de confection des deux éprouvettes) par une contrainte  $\sigma_0$  maintenue constante par la suite.

On peut ainsi observer, à chaque instant  $t$ , la déformation *mécanique*  $\varepsilon(t)$ , différence entre les déformations de l'éprouvette B et de l'éprouvette A.

À la déformation instantanée :

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_0}{E_i(t_0)}$$

$E_i(t_0)$  étant le module instantané du béton âgé de  $t_0$ , module précédemment noté  $E_{ij}$  vient se superposer une déformation de fluage  $\varepsilon_{fl}(t)$  qui tend vers une limite  $\varepsilon_{fl}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

On peut poser :  $\varepsilon_{fl} = \Phi \varepsilon_i$ .

Au temps infini, la déformation totale  $\varepsilon_v$  vaut donc :

$$\varepsilon_v = \varepsilon_i + \varepsilon_{fl} = (1 + \Phi) \varepsilon_i \tag{3}$$

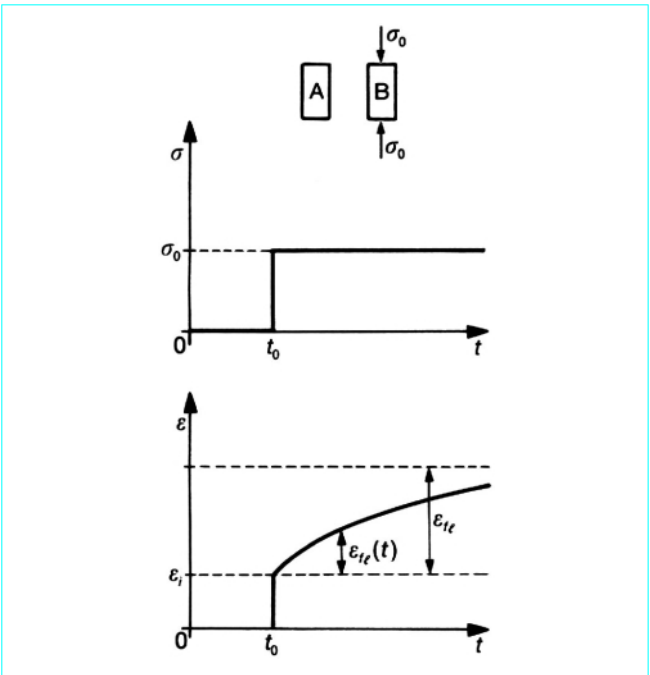


Figure 9 – Expérience de fluage

### 2.2.3.3.1 Formulation simplifiée

Elle consiste, en admettant que  $\Phi$ , a priori fonction de  $t_0$ , est une constante, à considérer le fluage comme un phénomène d'élasticité différée. On introduit alors deux pseudo-modules  $E_{fe}(t_0)$  et  $E_v(t_0)$  en posant :

$$\varepsilon_{fe} = \frac{\sigma_0}{E_{fe}(t_0)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_v = \frac{\sigma_0}{E_v(t_0)}$$

La relation (3) s'écrit alors :

$$\frac{\sigma_0}{E_v(t_0)} = \frac{\sigma_0}{E_i(t_0)} + \frac{\sigma_0}{E_{fe}(t_0)} = (1 + \Phi) \frac{\sigma_0}{E_i(t_0)}$$

D'où 
$$E_v(t_0) = \frac{E_i(t_0)}{1 + \Phi}$$

et 
$$E_{fe}(t_0) = \frac{E_i(t_0)}{\Phi}$$

Soit, en admettant que  $\Phi = 2$  :

$$E_v(t_0) = \frac{E_i(t_0)}{3}$$

$$E_{fe}(t_0) = \frac{E_i(t_0)}{2}$$

Cette formulation rustique suscite deux catégories de critiques :

- elle ne tient pas compte des facteurs, autres que le temps, qui influent sur le phénomène : composition du béton, hygrométrie du milieu ambiant, dimensions transversales des pièces ;
- elle ne permet pas, même en supposant constants ces autres facteurs, de trouver la réponse en déformation du béton à une histoire de chargement complexe.

Pour ce faire, il faut recourir à des modèles plus élaborés. Le plus communément utilisé est celui de la viscoélasticité linéaire.

### 2.2.3.3.2 Modèle de la viscoélasticité linéaire

Il est basé sur les deux hypothèses fondamentales suivantes.

■ **Hypothèse de proportionnalité** : dans une expérience de fluage pur (contrainte  $\sigma_0$  maintenue constante depuis  $t_0$ ), la réponse  $\varepsilon(t)$  est proportionnelle à  $\sigma_0$  :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 F(t_0, t)$$

avec  $F(t_0, t)$  fonction de fluage. Bien entendu,  $F(t_0, t_0) = \frac{1}{E_i(t_0)}$ .

■ **Hypothèse de superposition** (principe de Boltzmann) qui peut s'énoncer ainsi : l'effet d'une somme est égal à la somme des effets.

Si donc, après avoir chargé l'éprouvette B (figure 9) par  $\sigma_0$  à partir de  $t_0$ , on lui applique une variation de contrainte  $\Delta\sigma_1$  à partir de  $t_1$  (figure 10), on a, pour  $t \geq t_1$  :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 F(t_0, t) + \Delta\sigma_1 F(t_1, t)$$

Dès lors, la réponse à une histoire de chargement :

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \sigma'(\tau) d\tau$$

peut s'écrire :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) F(t_0, t) + \int_{t_0}^t \sigma'(\tau) F(\tau, t) d\tau$$

Cette modélisation présente l'avantage considérable d'être compatible avec l'hypothèse classique, dans la théorie des poutres, de la linéarité des distributions, sur les sections droites, tant des contraintes que des déformations. Elle se prête donc bien au calcul des effets structuraux du fluage bien qu'elle soit en contradiction sensible avec l'expérience lorsque le chargement est tel que la déformation  $\varepsilon(t)$  subisse des diminutions importantes avec le temps.

### 2.2.3.3.3 Conséquences du fluage

Comme le retrait, le fluage du béton entraîne tout d'abord une diminution progressive de la tension dans les armatures de précontrainte.

Il provoque ensuite des déformations différées dans les structures. Ainsi, une poutre indépendante est davantage comprimée en service, à vide (c'est-à-dire la majorité du temps), sur sa fibre inférieure que sur sa fibre supérieure. La poutre se cambré donc peu à peu vers le haut (figure 11). Il faut en tenir compte en donnant au fond du coffrage de la poutre une contreflèche négative (dirigée vers le bas).

Enfin, une poutre réalisée en plusieurs phases, selon des schémas statiques évolutifs de plus en plus hyperstatiques, voit graduellement se modifier les efforts qui la sollicitent, les déformations par fluage se trouvant entravées de plus en plus fortement par la création de nouvelles liaisons (c'est la redistribution par fluage).

Considérons, par exemple, une poutre réalisée en deux phases (figure 12) :

- deux consoles encastrées sur culées ;
- elles sont ensuite rendues continues à la clé.

Si les deux consoles étaient restées libres, leurs extrémités se seraient peu à peu abaissées sous l'action du fluage de leur béton. La réalisation de la continuité empêche cette déformation de s'effectuer librement.

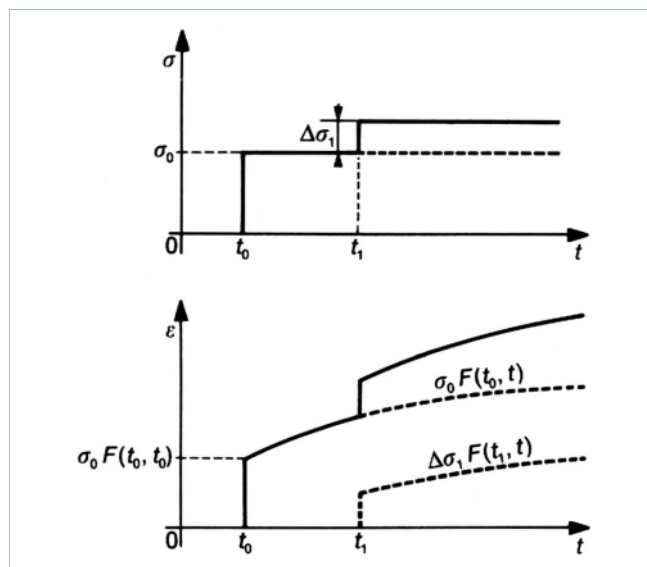


Figure 10 - Principe de superposition

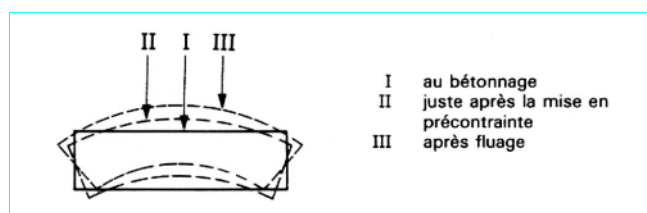


Figure 11 - Déformation d'une poutre dans le temps

Un moment fléchissant positif se crée donc progressivement à la clé, de façon à s'opposer à la différence des rotations des sections extrêmes en regard des deux consoles.

## 2.3 Armatures de précontrainte

### 2.3.1 Formes

On trouve les armatures de précontrainte sous trois formes :

- les fils ;
- les barres ;
- les torons.

#### 2.3.1.1 Fils

Par convention, les fils ont un diamètre inférieur ou égal à 12,2 mm, ce qui permet de les livrer en couronnes.

Ils peuvent être soit ronds et lisses (pour la post-tension) soit au contraire nervurés, ou crantés, ou ondulés afin d'améliorer leur adhérence au béton (pré-tension).

Les fils les plus couramment utilisés ont des diamètres de 5 mm, 7 mm ou 8 mm.

#### 2.3.1.2 Barres

De diamètre supérieur ou égal à 12,5 mm, elles ne sont livrées que rectilignes (et sous longueur maximale de l'ordre de 12 m).

Elles peuvent être soit lisses, soit nervurées, les nervurations faisant alors office de filetage grossier (cas des barres *Dywidag*).

Les diamètres les plus courants sont 26 mm, 32 mm et 36 mm.

Mais il existe des barres plus grosses (*Macalloy* Ø 40, 50 et même 75 mm). De telles armatures ne sont employées qu'en post-tension.

#### 2.3.1.3 Torons

Ce sont des ensembles de fils enroulés hélicoïdalement les uns sur les autres (cas des torsades à trois fils) ou autour d'un fil central en une ou plusieurs couches.

Les torons les plus courants sont à 7 fils et sont désignés par leur diamètre nominal (diamètre du cercle circonscrit aux fils dans une section droite).

Les diamètres les plus utilisés sont les suivants :

- 12,5 mm (fréquemment désigné par T13)
- 12,9 mm (T13S)
- 15,2 mm (T15)
- 15,7 mm (T15S)

Ces armatures sont employées aussi bien en pré-tension (dans les pièces importantes) qu'en post-tension.

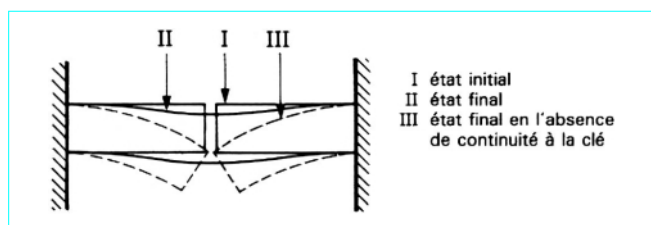


Figure 12 – Déformation par fluage d'une poutre réalisée en plusieurs phases

Enfin, par le passé, certains procédés de précontrainte (PCB notamment) ont utilisé des torons à plusieurs couches de fils périphériques (torons à 37 ou 61 fils).

### 2.3.2 Diagramme contraintes-déformations

Il est d'abord linéaire (phase élastique OI, la pente de la droite OI étant le module d'élasticité  $E_p$  de l'armature), puis il s'incurve, pour aboutir à un quasi-palier plastique (figure 13).

Enfin, la rupture survient pour une contrainte  $f_r$  et un allongement relatif  $\varepsilon_r$ .

On attache une importance fondamentale à ce qu'elle ne se produise que moyennant une striction importante (caractérisée par le coefficient de striction  $\zeta$ , réduction relative de l'aire de la section droite au niveau de la rupture).

Généralement, on exige :

$$\begin{aligned}\zeta &\geq 20 \% \\ \varepsilon_r &\geq 3,5 \%\end{aligned}$$

Le diagramme contraintes-déformations permet de définir une autre caractéristique importante de l'armature de précontrainte : sa limite conventionnelle d'élasticité  $f_e$ . C'est l'ordonnée du point d'intersection du diagramme avec la droite de pente 200 000 MPa passant par le point d'ordonnée nulle et d'abscisse  $10^{-3}$ . Pour les fils et les torons,  $f_e$  est compris entre 0,85 et 0,90  $f_r$ .

En pratique, ce que l'on obtient directement dans un essai de traction simple, c'est la relation forces - déformations d'une armature et non pas la relation contraintes - déformations. On passe de la première à la seconde en divisant les forces par la section nominale de l'armature, mais c'est purement conventionnel compte tenu des tolérances entre section réelle et section nominale. En fait, ce sont bien les forces qui intéressent directement le projeteur et le constructeur. C'est pourquoi les valeurs spécifiées pour une armature sont non pas  $f_r$  et  $f_e$  mais les forces correspondantes :

- $F_r$  charge rupture ;
- $F_e$  charge à la limite conventionnelle d'élasticité.

Les valeurs garanties sont notées  $F_{rg}$  et  $F_{eg}$ . Elles sont définies par la double condition :

- d'un fractile d'ordre 5 % ;
- d'une borne inférieure de 98 % pour  $F_{rg}$  et de 95 % pour  $F_{eg}$ .

### 2.3.3 Relaxation de l'acier

L'acier fortement tendu sous longueur constante voit sa tension décroître progressivement. Ce phénomène, appelé relaxation, est corrélatif du fluage (variation de longueur sous contrainte constante).

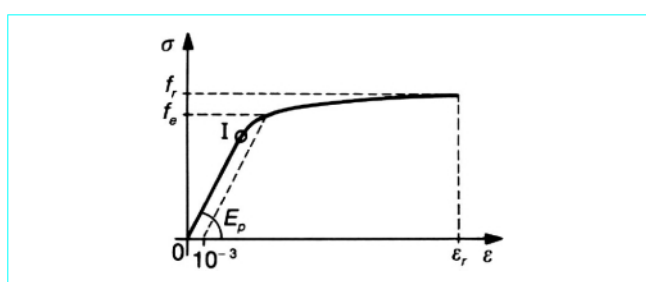


Figure 13 – Diagramme contraintes-déformations d'une armature de précontrainte

Son importance dépend très sensiblement de la température.

La perte relative de tension :

$$\rho(t) = \frac{\Delta\sigma(t)}{\sigma_i}$$

d'une armature tendue initialement à  $\sigma_i$  est, à température constante, fonction et du temps  $t$  et de  $\sigma_i$ .

### 2.3.3.1 Loi des temps

En exploitant les résultats d'essais, on trouve qu'en coordonnées bilogarithmiques les points expérimentaux s'alignent sur des droites (figure 14), autrement dit que :

$$\lg \rho = \beta + \gamma \lg t$$

ou

$$\rho = K t^\gamma$$

Cela est vérifié, même sur les essais les plus longs dont on dispose (plusieurs dizaines d'années). Il est bien évident, toutefois, qu'à partir d'un certain moment les diagrammes doivent s'infléchir et présenter une asymptote horizontale, faute de quoi une armature initialement tendue et maintenue à longueur constante non seulement perdrait toute sa tension, mais se retrouverait en compression.

Certains experts estiment que cette inflexion ne se manifeste qu'après quelques dizaines de milliers d'années, ce qui est d'un ordre de grandeur bien supérieur à celui de la durée de vie escomptée pour les ouvrages.

C'est pourquoi, dans la pratique, afin d'évaluer la perte finale par relaxation, il est nécessaire de se fixer un temps infini conventionnel.

C'est la valeur 500 000 h (soit environ 57 ans) qui a été retenue par le BPEL.

### 2.3.3.2 Loi des tensions initiales

Là encore, on trouve expérimentalement que  $\rho$  varie exponentiellement avec la tension initiale.

Toutefois, dans le domaine utile des tensions comprises entre  $0,6 f_{prg}$  et  $0,8 f_{prg}$ , on peut linéariser l'exponentielle.

### 2.3.3.3 Influence de la température

La plupart des experts estiment, à l'heure actuelle, que la température accélère la relaxation sans modifier sa valeur finale réelle.

Quoi qu'il en soit, compte tenu de l'importance de ce facteur, il convient, pour caractériser un acier, d'opérer dans des conditions bien définies de température. En pratique, on mesure la relaxation isotherme à 20 °C d'une éprouvette tendue initialement à  $0,7 F_r$ . La perte relative de tension observée dans ces conditions à 1 000 h et notée  $\rho_{1\,000}$  sert de base aux calculs de relaxation.

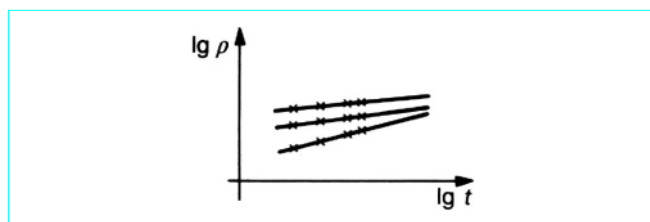


Figure 14 – Diagrammes expérimentaux de relaxation

### 2.3.3.4 Formule pratique d'évaluation de la tension finale

Compte tenu des indications précédentes, la perte de tension finale d'une armature soumise à une température proche de la température climatique est donnée par :

$$\Delta\sigma_p = 6\rho_{1\,000} \left( \frac{\sigma_i}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_i$$

Le résultat est à diviser par 100 si, comme c'est souvent le cas,  $\rho_{1\,000}$  est exprimé en pour-cent.

Le coefficient  $\mu_0$  dépend de la nature et du mode d'élaboration de l'acier.

Les armatures étant rangées pratiquement en deux catégories dites RN (relaxation normale) et TBR (très basse relaxation),  $\mu_0$  prend les valeurs suivantes :

- 0,43 pour les TBR ;
- 0,30 pour les RN.

Dans le cas où la température de l'armature serait sensiblement supérieure à la température climatique, il conviendrait de majorer l'estimation précédente, compte tenu de l'effet accélérateur de la température et du caractère conventionnel du *temps infini* retenu par la réglementation.

## 2.3.4 Corrosion sous tension

En plus du phénomène habituel de corrosion par oxydation (la formation continue de rouille réduisant progressivement la section résistante, ce qui accroît la contrainte de traction jusqu'à ce que se produise la rupture), l'acier des câbles de précontrainte, très fortement tendu, est exposé, s'il n'est pas bien protégé (notamment par une injection de mortier de ciment fortement basique), à un autre phénomène : la corrosion sous tension, qui provoque une rupture fragile, brutale (sans que rien ne l'ait laissé prévoir).

Cette corrosion semble être due à la destruction des liaisons inter-cristallines par certains agents dilatants (l'hydrogène naissant, par exemple) ou corrosifs.

L'essentiel à retenir pour le constructeur est qu'un câble de précontrainte, fortement tendu, et non protégé, se rompt inéluctablement. En revanche, on ne connaît pas de cas de rupture de câbles bien protégés (par une bonne injection).

## 2.3.5 Résistance à la fatigue

Une armature tendue en moyenne à  $\sigma_m$  résiste à un nombre de cycles de variations de tension  $\left( \pm \frac{\delta\sigma}{2} \right)$  d'autant plus faible que  $\sigma_m$  et  $\delta\sigma$  sont plus élevés.

Pour assurer la pérennité des constructions en béton précontraint, on doit donc limiter les variations de tension  $\delta\sigma$  dans les armatures. Celles-ci ne peuvent devenir importantes qu'en cas de fissuration du béton.

C'est donc en précontrainte partielle (classe III) qu'il faut montrer vigilant et procéder, pour les structures exposées à la fatigue, à des vérifications spécifiques.

## 2.3.6 Élaboration

On part du fil machine, produit sidérurgique obtenu par laminage à chaud de lingots, dont les caractéristiques mécaniques insuffisantes pour un emploi en précontrainte sont améliorées par une succession de traitements thermiques et mécaniques.



Tableau 2 – Caractéristiques des armatures utilisées en post-tension

Nature (§ 2.3.1.3)	Classe (MPa)	Ø (mm)	A (mm <sup>2</sup> )	F <sub>prg</sub> (kN)	F <sub>peg</sub> (kN)	0,8 F <sub>prg</sub> (kN)	0,9 F <sub>peg</sub> (kN)	0,6 F <sub>prg</sub> (kN)
T 13	1 860	12,5	93	173	154	138,4	138,6	103,8
T 13S	1 860	12,9	100	186	166	148,8	149,4	111,6
T 15	1 770	15,2	139	246	220	196,8	198,0	147,6
T 15S	1 770	15,7	150	265	236	212,0	212,4	159,0
fil Ø 7 mm	1 670	7	38,5	64,3	57	51,4	51,3	38,6

Les traitements mécaniques utilisés sont :

- le laminage généralement suivi d’une trempe soit au plomb, soit à l’huile. Dans ce dernier cas, un revenu (réchauffage à 400 °C) est indispensable pour redonner à l’acier une ductilité suffisante ;
- le tréfilage, étréage à froid à travers une succession de filières de diamètres décroissants. Ce traitement modifie la texture de l’acier en orientant ses fibres dans le sens longitudinal. Il conduit à un état de surface très lisse, favorable à la résistance à la corrosion sous tension. Autrefois, le tréfilage était précédé d’un patentage (réchauffage à 850 °C suivi d’une trempe isotherme aux alentours de 450 °C). Cette opération, qui donnait à l’acier une structure très fine, est malheureusement abandonnée de nos jours, pour des raisons d’économie, au détriment de la ductilité.

Après tréfilage, différents traitements thermomécaniques permettent d’améliorer les performances des armatures (vieillessement artificiel pour augmenter  $f_e$  ; *stress-relieving* ou bleuissement pour accroître  $f_e$  et  $f_r$  ; stabilisation, étréage à chaud qui permet de diminuer la relaxation).

2.3.7 Homologation

Les spécifications relatives aux armatures de précontrainte sont définies par le fascicule n° 4, titre II du CCTG (Cahier des Clauses Techniques Générales).

Ces armatures doivent bénéficier d’une homologation délivrée par le Ministère de l’Équipement sur proposition de la Commission Inter-ministérielle de la Précontrainte. L’homologation est subordonnée à la vérification préalable et au suivi dans le temps d’un certain nombre de caractères :

- géométriques : sections nominales (A) ou diamètres nominaux (Ø) ;
- mécaniques :  $F_r$ ,  $F_e$ ,  $\epsilon_r$ ,  $\zeta$ ,  $\rho$  ;
- technologiques : absence de défauts ; résistances à la fatigue, à la corrosion sous tension, aux contraintes multiaxiales.

Les armatures homologuées sont rangées en classes de résistance et en sous-classes de relaxation.

Les classes de résistance (exprimées en MPa) et les catégories d’armatures qui s’y rattachent sont résumées dans le tableau suivant :

Classe (MPa)	1960	1860	1770	1670	1570	1230	1030
Armatures	torons						
					fils		barres

Pour les fils et les torons, les sous-classes de relaxation sont définies par :

$\rho_{1\,000} = 8\%$  en ce qui concerne la sous-classe RN

$\rho_{1\,000} = 2,5\%$  en ce qui concerne la sous-classe TBR

Le tableau 2 récapitule les principales caractéristiques des armatures les plus couramment utilisées en post-tension [les valeurs encadrées 0,8 F<sub>prg</sub> ou 0,9 F<sub>peg</sub> correspondent à la force à l’origine (§ 4.1) ; la colonne 0,6 F<sub>prg</sub> donne un ordre de grandeur de la force utile, toutes pertes faites].

3. Matériel de précontrainte par post-tension

3.1 Généralités

En post-tension, les câbles sont, le plus souvent, logés dans des évidements tubulaires ménagés à l’intérieur du béton par le moyen de conduits. Même quand elles sont placées à l’extérieur du béton, comme cela se pratique depuis quelques années pour certaines structures, les armatures de précontrainte sont, quasi systématiquement, isolées du milieu ambiant par un conduit. Lorsque le durcissement est suffisant, les câbles sont mis en tension à l’aide de vérins prenant appui sur le béton qu’ils compriment.

Grâce à des organes d’ancrage, on effectue alors un transfert d’appui et l’on bloque les déformations relatives entre aciers et béton, ce qui permet de récupérer les vérins.

Dans le vide qui subsiste entre le câble et son conduit on injecte un coulis de ciment (ou éventuellement un produit souple : cire ou graisse).

3.2 Armatures

3.2.1 Nature

Les câbles sont généralement constitués, à l’heure actuelle, de torons parallèles. En France, le seul procédé utilisant encore des fils parallèles est le procédé BBR (unités n Ø 7, n représentant le nombre de fils de diamètre 7 mm).

Dans certains cas, enfin, on emploie des barres qui peuvent être lisses en partie courante (et filetées à leurs extrémités : barres *Dywidag* et *Macalloy*), ou filetées sur toute leur longueur (barres *Macalloy*) ou encore nervurées au laminage, les nervurations faisant office de filetage grossier (barres *Dywidag*). Compte tenu de leur rigidité qui leur interdit toute courbure trop prononcée, les barres ne sont guère utilisées, aujourd’hui, que sous forme droite pour réaliser des unités de faible longueur (clouage, étriers actifs, etc.).

3.2.2 Mise en place

Deux grands modes de mises en place sont envisageables : pose d’unités prêtes à l’emploi ; enfilage sur chantier, avant ou après bétonnage, dans des conduits préalablement positionnés dans les coffrages et fixés aux carcasses de ferrailage.

### ■ Unités prêtes à l'emploi

Les armatures sont enfilées en usine dans des gaines souples et éventuellement munies de leurs ancrages. Les unités ainsi réalisées sont livrées sur le chantier enroulées sur tourets (câbles à fils ou à torons).

Cette méthode, très souvent utilisée autrefois, est pratiquement abandonnée aujourd'hui, sauf dans le cas du procédé BBR.

### ■ Enfilage sur chantier

Les conduits une fois mis en place dans les coffrages et solidement arrimés aux carcasses de ferrailage, l'enfilage peut être réalisé soit avant soit après le bétonnage.

Deux variantes sont alors possibles :

— préfaçonnage du câble (assemblage des armatures coupées à longueur) dans un atelier forain contigu au chantier, puis mise en place par traction à l'aide d'un treuil par l'intermédiaire d'un tire-câble (*chaussette*) ou d'un anneau soudé sur l'extrémité des armatures ;

— poussage des armatures une à une dans le conduit au moyen d'un pousseur à galets métalliques.

## 3.3 Conduits

### 3.3.1 Précontrainte intérieure au béton

Il s'agit le plus souvent de conduits métalliques.

Lorsque les armatures sont enfilées sur chantier, ce sont :

— soit des tubes en acier laminé dont l'épaisseur est couramment comprise entre 1 et 2 mm ; ces tubes sont cintrables sur machines ; l'assemblage entre éléments successifs se fait par emboîture ;

— soit des gaines rigides cintrables à la main ; elles sont en feuillard à enroulement hélicoïdal ou cylindrique ; leur épaisseur est comprise entre 0,4 et 0,6 mm ; la nervuration, qui augmente la rigi-

dité et l'adhérence au béton, fait office de filetage grossier et permet le raccordement entre tronçons par vissage d'un manchon de gaine de diamètre immédiatement supérieur.

Dans le cas d'unités prêtes à l'emploi, on utilise des gaines enroulables, en feuillard plus mince (dont l'épaisseur est comprise entre 0,2 et 0,4 mm).

Pour les unités les plus courantes constituées de fils ou de torons, les caractéristiques minimales des conduits sont précisées dans le tableau 3.

Il arrive enfin que l'on ait recours à des conduits en matière plastique. C'est rare pour des câbles constitués de plusieurs armatures (multitorons ou multifils), mais par contre fréquent dans le cas des monotorons : on les utilise alors sous la forme de torons *gainés protégés*. Le toron sort d'usine muni de sa gaine, généralement en polyéthylène, remplie de son produit de protection, graisse ou cire. Ce type d'armature, qui fait l'objet d'une fabrication industrielle et qui permet de s'affranchir des servitudes d'une injection au coulis de ciment sur chantier, est parfaitement adapté à la réalisation de la précontrainte des dalles de bâtiment, de certains réservoirs ou des hourdis de pont.

### 3.3.2 Précontrainte extérieure au béton

Les conduits doivent alors être parfaitement étanches pour assurer le confinement du produit de protection, qu'il s'agisse d'un coulis de ciment, d'une cire ou d'une graisse. Les gaines en feuillard ne peuvent donner satisfaction à cet égard.

On utilise parfois des tubes métalliques raccordés par emboîtement (l'étanchéité aux joints étant assurée par des manchons thermorétractables), ou bien par soudure ou encore par sertissage, mais ces deux derniers types d'opérations sont délicats à réaliser correctement à proximité d'une paroi.

**Tableau 3 – Caractéristiques minimales des conduits**

Type d'armatures	Nombre d'armatures constituant l'unité	Gainés enroulables		Gainés rigides cintrables à la main		Tubes rigides (acier)	
		$\varnothing_i$ (mm)	$e$ (mm)	$\varnothing_i$ (mm)	$e$ (mm)	$\varnothing_e$ (mm)	$e$ (mm)
Fils 7 mm	$n = 9$ $n = 14$ $n = 18$ $n = 22$ $n = 30$ $n = 54$ $n = 84$	35 45 50 55 60 80 100	0,3 0,3 0,4 0,4 0,4 0,4 0,4	40 46 50 60 65 90 110	0,4 0,4 0,4 0,4 0,4 0,6 0,6	76 89 108	2 2 2
Fils 8 mm	$n = 12$	45	0,3	50	0,4		
Torons T12,5 (T13) ou T12,9 (T13S)	$n = 7$ $n = 12$ $n = 19$ $n = 31$ $n = 55$	45 60 75	0,3 0,4 0,4	50 65 80 105 140	0,4 0,4 0,6 0,6 0,6	55 76 84 108 139,7	2 2 2 2 2
Torons T15,2 (T15) ou T15,7 (T15S)	$n = 4$ $n = 7$ $n = 12$ $n = 19$ $n = 37$	50 60 75	0,4 0,4 0,4	50 65 80 95 130	0,4 0,4 0,6 0,6 0,6	55 76 80 101,6 139,7	2 2 2 2 2
$\varnothing_e$ diamètre extérieur $\varnothing_i$ diamètre intérieur $e$ épaisseur							

Le plus souvent, on emploie des gaines en polyéthylène à haute densité (PEhd) dont les tronçons sont assemblés par thermofusion (soudure au miroir ou colliers électrosoudables).

Si l'on veut se réserver la possibilité de remplacer ultérieurement un câble tout en l'injectant au coulis de ciment, le conduit, prolongé à ses extrémités par des cônes d'épanouissement, est isolé de la structure par des tubes de réservation au niveau des déviateurs et par des trompettes ou *tromplaques* coffrantes dans les massifs d'ancrage.

## 3.4 Vérins

Le vérin est un mécanisme constitué d'un cylindre et d'un piston, délimitant une chambre à l'intérieur de laquelle on peut injecter de l'huile, ce qui fait coulisser les deux pièces l'une par rapport à l'autre. Le cylindre prend appui sur le béton, alors que le câble est fixé au piston dont le mouvement assure la mise en tension de l'unité (figure 15).

Le piston peut tirer :

- soit directement sur les armatures qui sont fixées sur lui, à titre provisoire, par coincement ou par vissage ;
- soit sur une tête mobile elle-même solidaire du câble et faisant office, ultérieurement, de tête d'ancrage (cas du procédé BBR).

## 3.5 Ancrages

Selon leur fonction, on distingue plusieurs catégories d'ancrages :

a) les **ancrages actifs**, qui permettent de bloquer le câble à l'extrémité par laquelle on effectue la mise en tension ; une fois ce blocage réalisé, on peut dégonfler le vérin et le récupérer ; toute unité de précontrainte comporte au moins un ancrage actif ;

b) les **ancrages fixes**, qui interdisent tout mouvement significatif, par rapport au béton, de l'extrémité du câble opposée à celle par laquelle se fait la mise en tension ; deux variétés d'ancrages fixes sont à distinguer :

— les ancrages extérieurs, qui demeurent accessibles après bétonnage,

— les ancrages incorporés au béton de la structure, qui se subdivisent eux-mêmes en ancrages fonctionnant par butée et en ancrages par adhérence ;

c) les **coupleurs**, qui permettent, dans le cas d'ouvrages construits en plusieurs phases, de réaliser la continuité de deux tronçons de câbles, le premier tendu au cours de la phase  $n$ , le second au cours de la phase  $n + 1$  ;

d) les **dispositifs de raboutage**, qui assurent le raccordement de deux tronçons distincts d'armatures mis en tension simultanément par l'une ou/et l'autre de leurs extrémités libres.

Dans certains cas particuliers, on peut avoir recours à d'autres types d'ancrages :

— des **ancrages intermédiaires** pour ancrer provisoirement une armature en partie courante, dans le cas des dalles de bâtiment ;

— des **ancrages de jonction**, encore appelés **ancrages par le milieu**, pour réaliser la mise en tension simultanée de deux tronçons de câble par leurs extrémités en regard.

### 3.5.1 Ancrages actifs

Ils se regroupent en deux familles : les ancrages le long du fil et les ancrages préfabriqués.

#### 3.5.1.1 Ancrages le long du fil

Ils sont indépendants du câble et ne sont solidarisés aux armatures qu'après mise en tension de ces dernières.

Appartiennent à cette famille les ancrages par coincement que l'on retrouve dans la plupart des grands procédés modernes utilisant des câbles constitués de  $n$  torons parallèles ; après mise en tension, les torons sont bloqués dans une tête d'ancrage percée de  $n$  trous tronconiques au moyen de mors métalliques (figure 16) constitués de deux ou trois éléments appelés clavettes [procédés *Freyssinet K* et *Monogroupe* ; *VSL* ; *CCL* ; *SEEE-FUC* (figure 17) ; *LH* ; *PAC* ; *CONA*].

Se rattachent également à cette famille les ancrages par vissage des procédés à barres.

#### 3.5.1.2 Ancrages préfabriqués

Ils sont fixés à l'extrémité du câble (soit en usine, soit plus rarement sur chantier) avant sa mise en tension et l'on vient les bloquer par des cales sur le béton.

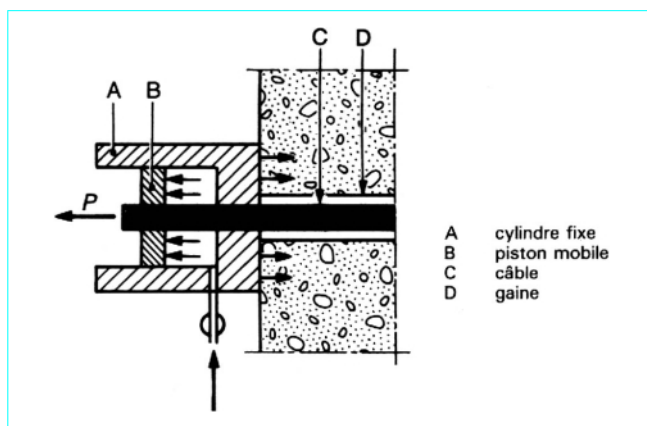


Figure 15 – Schéma de principe d'un vérin

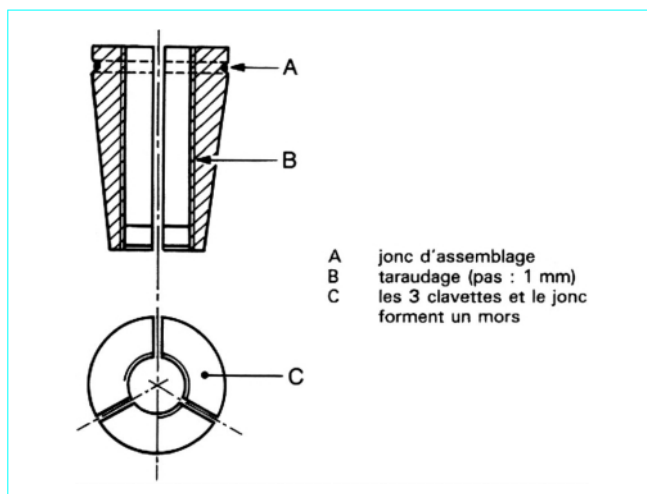


Figure 16 – Mors d'ancrage : principe

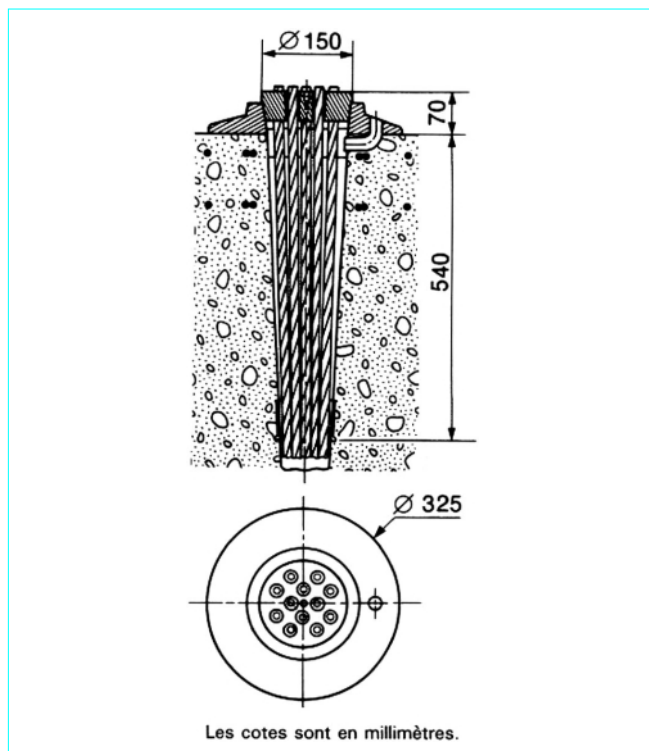


Figure 17 – Ancrage actif 12 T15 SEEE-FUC

Les ancrages les plus typiques de cette catégorie sont ceux du système *BBR-B* (figure 18) : les câbles sont, dans ce cas, constitués de  $n$  fils parallèles (généralement de 7 mm de diamètre) ; à leur extrémité, les fils s'appuient, par l'intermédiaire de boutons forgés à froid, sur une tête d'ancrage métallique percée de  $n$  trous. Cette tête est filetée extérieurement, ce qui permet de visser sur elle la tige de traction du vérin et ainsi de tendre le câble. Des cales en acier, en forme de demi-coquilles, sont alors introduites entre la tête d'ancrage et la plaque d'appui pour assurer la permanence de la déformation imposée aux armatures, donc de leur tension.

Avec ces ancrages préfabriqués, la pièce à précontraindre voit son encombrement augmenter d'une surlongueur égale à l'allongement  $\Delta\ell$  que subit le câble lors de sa mise en tension (de l'ordre de 7 mm par m).

On peut tourner cette difficulté en partant de câbles de longueur réduite, plus courts au départ que la pièce à précontraindre, les têtes d'ancrage étant logées, avant la mise en tension, à l'intérieur d'une trompette de diamètre adéquat. C'est ce qui se pratique avec les procédés *BBR-V* et *SEEE-FU* (figure 19). Ce dernier est, pour les torons, l'équivalent du procédé *BBR* pour les fils, les boutons d'extrémité étant remplacés par des manchons filés obtenus en forçant à froid, à travers une filière, un tube épais en acier qui vient se mouler sur le toron par déformation plastique. Dans un cas comme dans l'autre, c'est le vissage d'un écrou sur la tête d'ancrage filetée extérieurement qui en assure le blocage.

Signalons enfin que les unités à ancrages préfabriqués sont difficilement enfilaables, sauf si l'on effectue sur chantier le boutonnage des fils ou le filage des manchons, mais alors la précision sur la longueur des armatures individuelles est moins bonne.

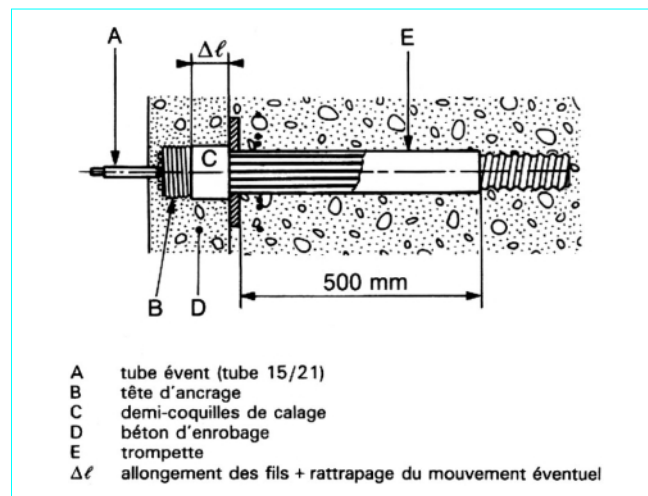


Figure 18 – Ancrage actif BBR-B

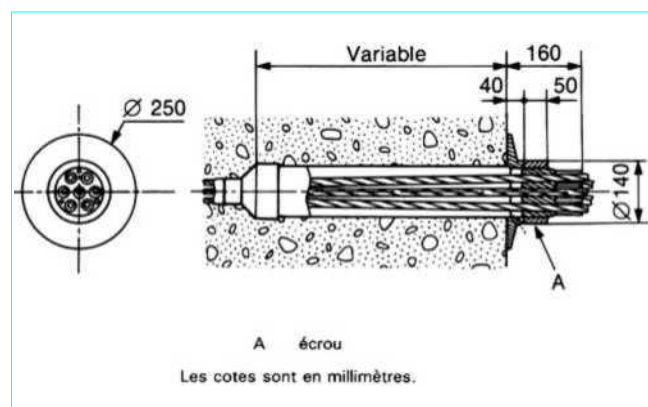


Figure 19 – Ancrage actif 7 T15 SEEE-FU

### 3.5.2 Ancrages fixes

#### 3.5.2.1 Ancrages extérieurs fixes

Le plus souvent, ils sont constitués des mêmes éléments que les ancrages actifs. En ce qui concerne les ancrages à clavettes, il suffit de bloquer ces dernières dans leur logement conique, au contact du toron, à l'aide d'un tube pousse-clavettes et d'un marteau.

#### 3.5.2.2 Ancrages fixes intérieurs au béton

Pour des ancrages fixes incorporés au béton, la solution précédemment décrite d'auto-blocage des clavettes doit être rigoureusement proscrite. En effet, la laitance vient s'infiltrer entre les clavettes constitutives du mors et leur interdit le mouvement de quelques millimètres vers l'avant, indispensable pour assurer le blocage définitif du toron lorsqu'on le met en tension par son extrémité opposée.

Différentes solutions sont alors utilisées faisant appel :

— soit à la butée sur une tête d'ancrage ou sur une plaque métallique par l'intermédiaire de boutons pour les fils ou de manchons filés pour les torons (figure 20).

On peut également boucler les armatures, en contact direct avec le béton sur une certaine longueur, autour d'une plaque galbée (figure 21) ;

— soit essentiellement à l'adhérence, dans le cas des torons. Les torons sont alors épanouis hors de leur conduit sur une longueur suffisante, et détoronnés à leur extrémité pour former un bulbe (figure 22). Le bon fonctionnement de ce type d'ancrage suppose un dégraissage efficace des torons sur leur longueur de scellement ainsi qu'un bétonnage soigné de la zone en question.

### 3.5.3 Coupleurs

#### 3.5.3.1 Fonctionnement

Ce type de dispositif, parfois utilisé dans les ouvrages construits à l'avancement (figure 23), permet d'accrocher un nouveau câble, dit *secondaire*, mis en tension au cours d'une phase de travaux ( $n + 1$ ), à l'extrémité d'un câble, dit *primaire*, déjà tendu au cours de la phase de travaux  $n$ .

Le coupleur doit donc remplir une double fonction :

- assurer l'ancrage actif du câble primaire ;
- transmettre jusqu'à l'extrémité en cause du câble primaire l'effort de tension appliqué ultérieurement au câble secondaire.

Pour que cette deuxième fonction soit assurée, il convient d'éviter toute possibilité de butée directe du coupleur sur le béton secondaire, coulé au cours de la phase  $n + 1$ , donc de l'en isoler par un capot (figure 24).

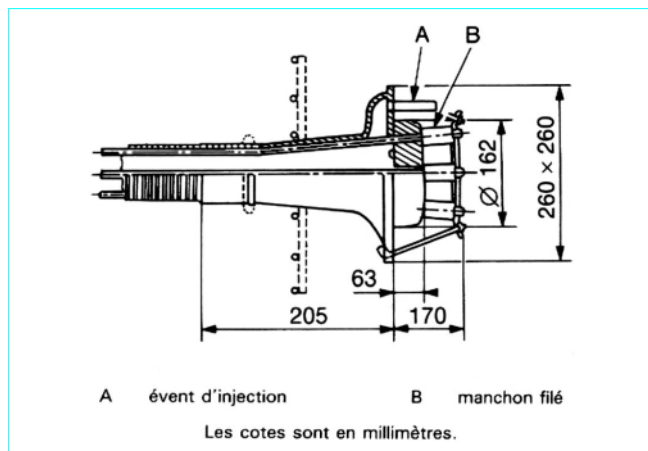


Figure 20 – Ancrage fixe, noyé dans le béton Freyssinet système K (12 T 15)

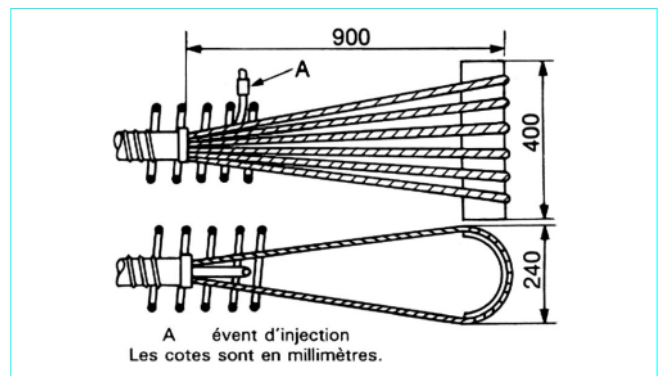


Figure 21 – Ancrage VSL à boucle (12 T 15)

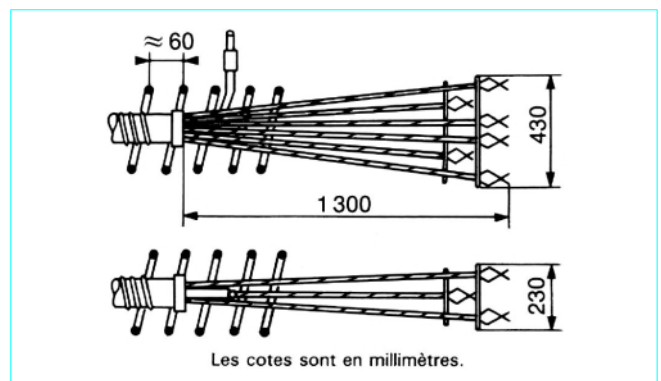


Figure 22 – Ancrage VSL par adhérence (12 T 15)

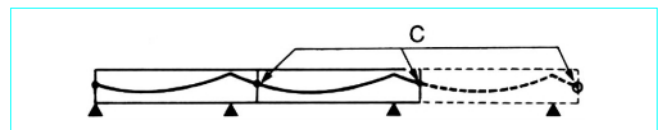


Figure 23 – Exemple d'utilisation de coupleurs C dans une construction à l'avancement

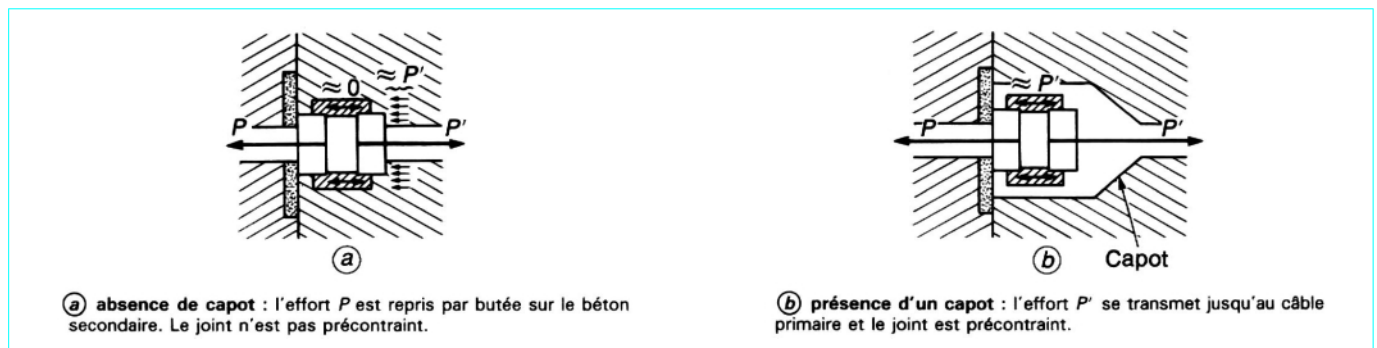


Figure 24 – Nécessité d'isoler le coupleur du béton secondaire



### 3.5.3.2 Morphologie des coupleurs

Les coupleurs actuellement utilisés se regroupent en deux grandes familles : les coupleurs *multi-armatures* et les coupleurs *mono-armatures*.

#### ■ Coupleurs multi

Ils assurent globalement le couplage des  $n$  fils ou torons parallèles constitutifs du câble.

Schématiquement ils comportent :

- pour le câble primaire, une tête d'ancrage actif prenant appui sur le béton par l'intermédiaire d'une plaque métallique ;
- pour le câble secondaire, une tête d'ancrage fixe ;
- un dispositif de connexion pour solidariser ces deux têtes d'ancrage.

Le dispositif de connexion en question peut consister en un manchon fileté intérieurement se vissant sur les deux têtes d'ancrage en regard fileté extérieurement [procédés *BBR-B* (figure 25) ; *SEEE-FU*].

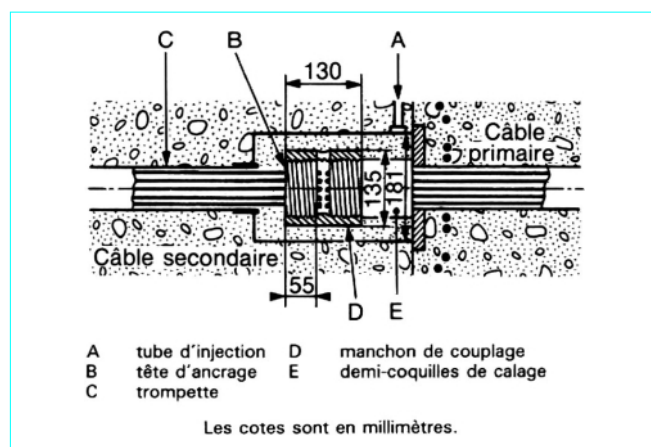


Figure 25 – Coupleur 30 Ø 7 BBR-B

Pour les systèmes à torons, il s'agit souvent d'une bague de couplage interposée entre l'ancrage actif du câble primaire et sa plaque d'appui sur le béton. Cette bague est munie, sur sa périphérie, d'une couronne dentée. Les torons du câble secondaire s'enclenchent entre les dents de la couronne et s'appuient sur elles par l'intermédiaire de manchons filés [procédés *Freyssinet K* (figure 26) ; *CCL*].

Dans le cas du système *VSL*, la couronne dentée constitue, avec la tête d'ancrage du câble primaire, une pièce unique.

#### ■ Coupleurs mono

Utilisés par beaucoup de procédés à torons [*Freyssinet K* ; *CCL* ; *PAC* ; *LH*], ils sont constitués (figure 27) :

- d'une tête d'ancrage actif pour le câble primaire ;
- d'autant de petits manchons de raccordement individuels (figure 28) que l'unité comporte de torons.

Ces manchons, qui contiennent un double jeu de clavettes, assurent le raboutage de chacun des torons du câble secondaire avec son homologue du câble primaire.

Une fois le câble secondaire mis en tension, la tête d'ancrage actif du câble primaire ne joue pratiquement plus aucun rôle mécanique.

### 3.5.3.3 Problèmes posés par l'utilisation des coupleurs

Ces problèmes sont de différentes natures.

#### ■ Problèmes mécaniques

La distribution des contraintes au voisinage d'une section de couplage s'écarte notablement des distributions traditionnelles de la résistance des matériaux. En effet, la mise en tension du câble primaire provoque un gauchissement de la section de joint, alors section d'extrémité. Lorsqu'on tend le câble secondaire, en supposant même qu'il transmette au droit du coupleur une force  $P'$  rigoureusement égale à la force ancrée  $P$  du câble primaire, la section de joint ne peut retrouver sa forme plane initiale car elle en est empêchée par le béton secondaire coulé à son contact. En ce qui concerne les contraintes normales isostatiques développées par le couplage, on peut montrer, en élasticité, que si l'on désigne par  $\sigma_P$  la distribution linéaire de contraintes équilibrant l'effort isostatique de précontrainte  $P$ , elles valent  $\sigma_P/2$  sur la hauteur des sections proches du joint, sauf à l'aplomb de la plaque d'appui du câble primaire sur le béton. Au droit de cette plaque, elles présentent un pic dont le volume équilibre, bien évidemment, la force  $P/2$  (figure 29).

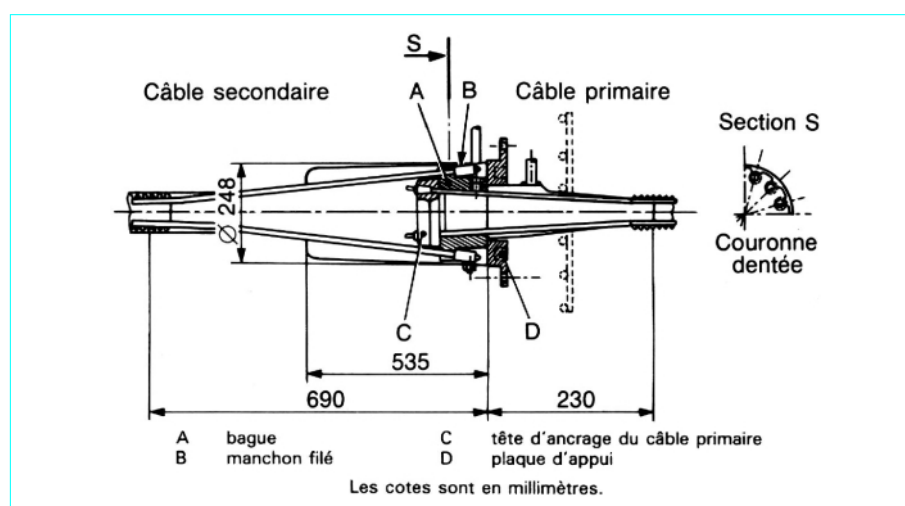


Figure 26 – Coupleur Freyssinet K 12 T15

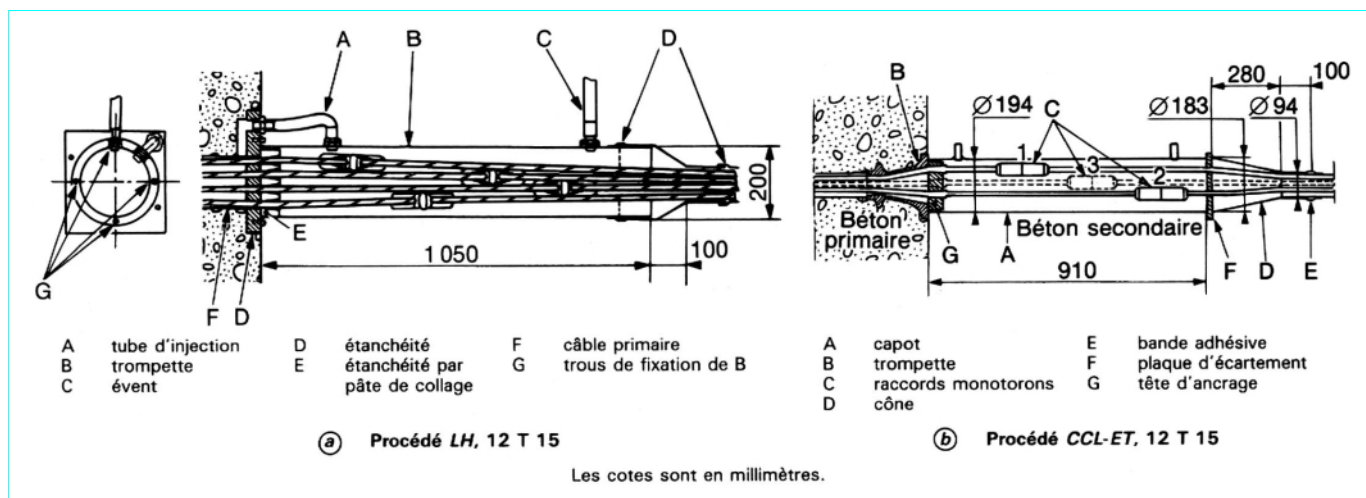


Figure 27 - Coupleurs mono

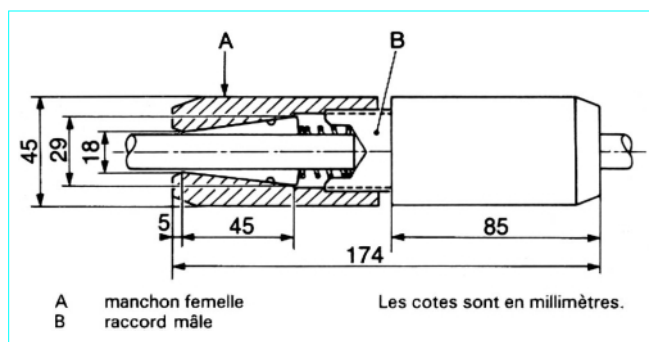


Figure 28 - Raccord monotron T15 du procédé PAC

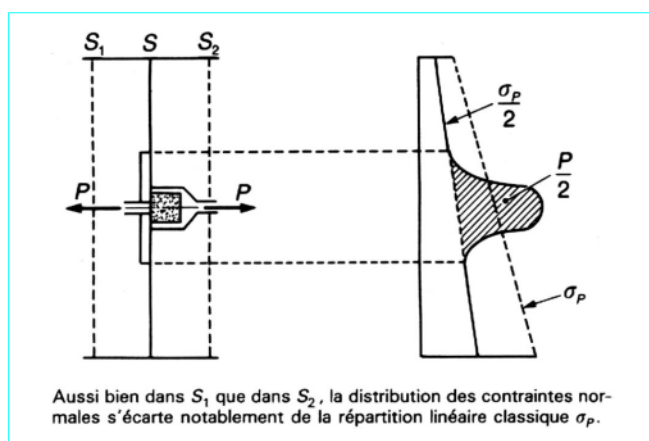


Figure 29 - Distribution des contraintes

Par ailleurs, d'importantes contraintes de cisaillement se manifestent dans la zone en question. Il est donc prudent de prévoir un ferrailage passif longitudinal confortable dans les sections de couplage.

### ■ Limites d'emploi

Les coupleurs, et tout particulièrement les coupleurs *multi*, ne sont pas conçus pour tolérer un décollement de l'ancrage actif primaire de sa plaque d'appui sur le béton, un tel décollement ne pouvant survenir que si, à la mise en tension du câble secondaire, la force  $P'$  qu'il transmet au droit du coupleur est supérieure à la force ancrée  $P$  du câble primaire.

En effet, les tensions individuelles des différentes armatures constitutives du câble présentent une certaine dispersion. En cas de décollement, le coupleur trouve donc une position d'équilibre qui ne respecte pas strictement l'alignement avec l'axe commun aux deux tronçons de câble couplés. Il apparaît ainsi dans les armatures, à proximité immédiate de leurs points d'ancrage, des cassures angulaires qui, si elles sont trop importantes, peuvent entraîner des ruptures prématurées.

Avec des couplages mono, le risque de rupture est plus faible qu'avec des couplages multi du fait que, dans la tête d'ancrage décollée, les clavettes sont à la limite du déclavetage et n'exercent plus l'effet aggravant d'étreinte latérale qui subsiste intégralement dans les coupleurs multi.

Le phénomène de décollement est rare dans le cas d'une précontrainte intérieure au béton, dans la mesure où les tronçons de câbles raccordés sont suffisamment longs et présentent un tracé ondulé, les frottements relativement importants empêchant alors la force secondaire de dépasser la force primaire.

En revanche, ce phénomène est fréquent avec des câbles extérieurs au béton, surtout lorsqu'ils sont rectilignes ; les frottements pratiquement nuls le long du câble secondaire ne peuvent plus compenser les pertes par rentrée d'ancrage et par relaxation du câble primaire. Le risque corrélatif de rupture peut se trouver sensiblement augmenté si les tracés théoriques des deux tronçons à coupler ne sont pas rigoureusement coaxiaux mais présentent une cassure angulaire, même légère, au droit du coupleur.

### ■ Problème pratiques

Les organes de couplage supportent généralement assez mal d'être sollicités par des efforts de traction excentrés. Il est donc indispensable d'assurer un alignement aussi parfait que possible entre les deux tronçons de câbles couplés et, pour ce faire, de ménager des portions de tracés strictement rectilignes de part et d'autre des coupleurs. Dans cette zone, les armatures de maintien des gaines doivent être rapprochées pour que l'alignement ne soit pas détruit pendant le bétonnage.

L'injection des câbles couplés est par ailleurs assez délicate, surtout lorsqu'on veut la réaliser à l'avancement, tronçon par tronçon, en suivant la progression du chantier de construction. Généralement, il vaut mieux injecter le tronçon  $n$  avant de tendre le tronçon  $n + 1$ . On peut alors limiter efficacement la pénétration du coulis au seul tronçon  $n$  concerné et éviter la contamination du tronçon  $n + 1$ , qui rendrait problématique son injection ultérieure.

### 3.5.4 Agrément des procédés de précontrainte

Ne peuvent être utilisés, dans les marchés publics de travaux, que des procédés bénéficiant d'un agrément délivré par le Ministère de l'Équipement, sur proposition de la Commission Interministérielle de la Précontrainte. Cette commission est également habilitée à délivrer des autorisations de distribution ou d'emploi.

L'agrément est subordonné à la fourniture d'essais permettant d'apprécier les performances du système, et à l'établissement d'un plan d'assurance de la qualité (PAQ) concernant tant la production des organes d'ancrage que l'entretien du matériel de mise en œuvre et le suivi de la qualification du personnel de l'entreprise distributrice. L'application du PAQ est contrôlée par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.

D'un point de vue pratique, l'agrément s'accompagne de la publication d'une notice technique décrivant les dispositifs agréés, définissant leurs conditions d'emploi et précisant toutes les données numériques utiles au projeteur, notamment :

- les dimensions des ancrages ;
- les forces maximales à la mise en tension ;
- les rentrées d'ancrage ;
- les entre-axes à respecter entre ancrages et leurs distances minimales aux parois ;
- les caractéristiques des vérins.

## 3.6 Injection et cachetage

Le plus souvent, la protection définitive des câbles est assurée par injection d'un coulis de ciment. Cette injection doit être réalisée dès que possible après la mise en tension des armatures. Il est souhaitable que le délai entre ces deux opérations ne dépasse pas un mois, ce qui correspond au temps pendant lequel la protection provisoire par huile soluble, appliquée en usine, puis renouvelée périodiquement sur chantier, demeure efficace.

### 3.6.1 Coulis d'injection

Il s'agit d'un mélange de ciment (généralement du CPA), d'eau et éventuellement de certains adjuvants. Les caractéristiques d'un coulis sont :

- la fluidité, mesurée par le temps d'écoulement au cône de Marsh ; cette fluidité doit être suffisante pour éviter que ne se forment des bouchons en cours d'injection ;
- l'exsudation ; la quantité d'eau exsudée à la surface d'une éprouvette de coulis au repos durant 3 h doit être au plus égale à 2 % du volume total ; cette eau doit être complètement réabsorbée 24 h après ;
- le temps pendant lequel le coulis demeure injectable (dans des conditions normales de température, il peut être de plusieurs heures avec certaines formulations bien étudiées).

### 3.6.2 Opération d'injection

Le câble, muni d'évents en ses points hauts et bas, ainsi qu'à ses extrémités préalablement obturées, soit par un cachetage, soit par un capot (provisoire ou définitif), subit, le plus souvent, un lavage

à l'eau qui permet d'éliminer l'huile soluble, d'humidifier le conduit et, moyennant une légère montée en pression, de détecter d'éventuels défauts d'étanchéité. Cette eau est ensuite éliminée par soufflage à l'air comprimé, déshuilé.

Le coulis est alors injecté par le ou les points bas, les événements successifs n'étant fermés que lorsque la consistance du produit qui en sort est comparable à celle du produit injecté.

En général, la pression d'injection est limitée à 1,5 MPa. Après obturation du dernier événement, une pression résiduelle de 0,5 MPa est maintenue pendant une minute au moins.

### 3.6.3 Cachetage

C'est l'opération qui assure la protection et l'étanchéité au niveau des ancrages. Elle est au moins aussi importante que l'injection : on a constaté, sur des ouvrages anciens, que des câbles même mal injectés pouvaient se comporter parfaitement si l'on interdisait la pénétration de l'eau par leurs extrémités. En revanche, toute circulation d'eau à l'intérieur des conduits est catastrophique pour la conservation des armatures de précontrainte.

Plusieurs solutions sont utilisées :

- réalisation d'un cachetage en béton, armé par des aciers laissés en attente ; il peut être mis en place avant l'injection (et doit alors présenter une résistance suffisante pour tenir la pression d'injection) ou, au contraire, après l'injection, le confinement du coulis pendant cette opération étant alors assuré par un capot provisoire ;
- utilisation d'un capot métallique étanche définitif, injecté de coulis en même temps que le conduit ; ce capot doit lui-même recevoir une protection anti-corrosion efficace.

## 4. Calcul de la tension d'un câble en post-tension

La force de précontrainte varie à la fois :

- dans l'espace, avec l'abscisse le long du câble, du fait des frottements ;
- dans le temps, à cause du retrait et du fluage du béton d'une part, de la relaxation des aciers d'autre part.

Ainsi, les pertes de tension se trouvent ventilées en deux catégories :

- les pertes instantanées ;
- les pertes différées.

### 4.1 Tension à l'origine

C'est celle qu'on impose aux armatures devant un ancrage actif et le dispositif d'épanouissement associé (trompette ou *tromplaque*), côté béton, au moment de la mise en tension, avant le transfert de l'effort à l'ancrage (figure 30).

Il s'agit donc de la tension en O,  $\sigma_{p0}$ , inférieure à la tension en A,  $\sigma_{pA}$  (à l'entrée de la tête d'ancrage) du fait des frottements entre les armatures et :

- la tête d'ancrage, de A à B, d'une part ;
- la trompette d'épanouissement, de B à O, d'autre part.

La perte de tension entre A et O, définie dans la notice technique du procédé considéré, est couramment de l'ordre de 2 %, de sorte que :

$$\sigma_{p0} \approx 0,98 \sigma_{pA}$$

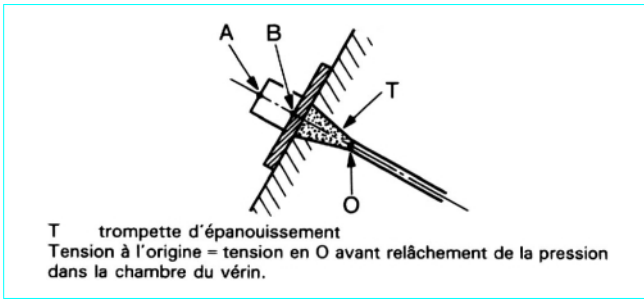


Figure 30 – Définition de l'origine des tensions

ou, si l'on raisonne en forces ( $P = A_p \sigma_p$ ,  $A_p$  représentant la section nominale du câble) :

$$P_0 \approx 0,98 P_A$$

Notons que la force  $P_A$ , elle-même, est inférieure au produit de la section du piston par la pression dans la chambre à cause des frottements internes du vérin. Une courbe de correspondance entre pression et force appliquée  $P_A$  par le vérin permet de tenir compte de ce dernier phénomène.

Il n'en demeure pas moins que, sur le chantier, pour obtenir  $P_0 = A_p \sigma_{p0}$  en O, il faut appliquer en A une force  $P_A$  supérieure d'environ 2 %.

Pour le projeteur,  $P_0$  constitue la valeur de référence puisque c'est elle qui fait l'objet de limitations réglementaires.

La contrainte à l'origine correspondante est plafonnée à la plus faible des valeurs suivantes :

- 0,80  $f_{prg}$  pour les fils et torons, 0,70  $f_{prg}$  pour les barres ;
- 0,90  $f_{peg}$  ;
- ce qu'indique la notice technique du procédé de précontrainte utilisé.

Sauf cas très particulier, les câbles sont toujours tendus au maximum autorisé, pour des raisons évidentes d'économie.

## 4.2 Pertes instantanées

### 4.2.1 Pertes par frottement

#### 4.2.1.1 Courbure du tracé

L'étude de l'équilibre d'un tronçon élémentaire de câble courbe (§ 1.3.2.1) nous a permis d'établir les deux équations suivantes :

$$P d\alpha + p ds = 0 \quad (4)$$

$$\text{et} \quad dP + q ds = 0 \quad (5)$$

Si l'on admet qu'entre  $q$  et  $p$  existe la relation fondamentale du frottement solide :

$$|q| = f|p|$$

avec  $f$  coefficient de frottement du câble sur son conduit,

l'équation (5) s'écrit :

$$dP = \pm f P d\alpha \quad (6)$$

$$\text{soit} \quad \frac{dP}{P} = \pm f d\alpha \quad (7)$$

Convenons ici que  $d\alpha$  représente la déviation angulaire arithmétique (essentiellement positive) entre les deux extrémités du tronçon MN (figure 2) et supposons que le câble complet, orienté de la gauche vers la droite, soit mis en tension par son extrémité gauche O (que l'on confond géométriquement, dans la pratique, avec le point A, figure 31).

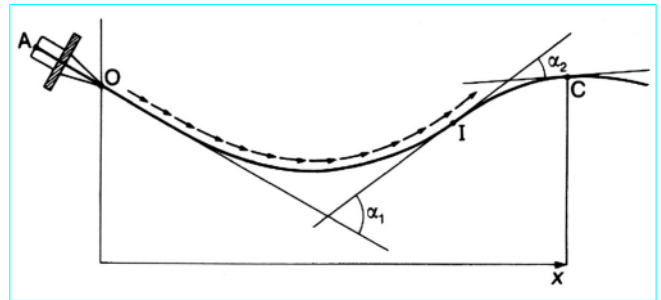


Figure 31 – Frottements le long du câble lors de la mise en tension

Il est alors évident que, lors de la mise en tension, le déplacement du câble par rapport au béton s'effectue de la droite vers la gauche et que l'action tangentielle de contact du conduit sur les armatures, s'opposant à ce mouvement, s'exerce de la gauche vers la droite ; la tension diminue donc entre le point O et le point courant C d'abscisse  $x$  du tracé et le signe à retenir dans l'équation (7) est le signe - .

D'où, par intégration de (7) :

$$P(x) = P_0 \exp(-f\alpha) \quad (8)$$

$\alpha$  fonction de  $x$  désignant la somme des déviations angulaires arithmétiques entre le point O et le point C d'abscisse  $x$ . Remarquons qu'en général  $\alpha$  n'est pas l'angle entre les tangentes en O et en C du tracé. Ce n'est cet angle que lorsque la courbure conserve un signe constant entre O et C.

Ainsi sur la figure 31 :  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

#### 4.2.1.2 Déviations parasites

Un conduit ne suit jamais parfaitement son tracé théorique ; il *festonne* entre ses points de fixation sous l'effet de son poids, de la poussée du béton, des incertitudes de positionnement des attaches.

À la déviation angulaire théorique  $\alpha$  entre O et C vient donc se superposer une déviation parasite sensiblement proportionnelle à la distance entre O et C, donc de la forme  $\varphi x$ .

$\varphi$  est le coefficient de perte en ligne.

Compte tenu de ce phénomène, la formule (8) se généralise donc ainsi :

$$P(x) = P_0 \exp[-(f\alpha + \varphi x)] \quad (9)$$

ou, si l'on raisonne sur les contraintes :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp[-(f\alpha + \varphi x)] \quad (10)$$

Dans la section d'abscisse  $x$ , la perte de tension par frottement vaut, par conséquent :

$$\Delta\sigma_\varphi(x) = \sigma_{p0} [1 - \exp[-(f\alpha + \varphi x)]] \quad (11)$$

soit, si l'exposant est faible :

$$\Delta\sigma_\varphi(x) \approx \sigma_{p0}(f\alpha + \varphi x) \quad (12)$$

#### 4.2.1.3 Valeurs des coefficients de frottement

##### ■ Cas de la précontrainte intérieure au béton

Pour les câbles constitués de fils ou de torons, on peut, lorsque les armatures sont huilées et que les conduits (gaines ou tubes métalliques) sont en bon état, utiliser les valeurs moyennes des coefficients  $f$  et  $\varphi$  données dans le tableau 4, où  $R$  représente le rayon de courbure (en m) du tracé.

**Tableau 4 – Valeurs moyennes des coefficients  $f$  et  $\varphi$**

Cas	Nature des armatures	$f$		$\varphi$ ( $\text{m}^{-1}$ )
		$3 \leq R \leq 6$ (m)	$R \geq 6$ (m)	
I Câbles ne traversant pas de joints ou surfaces de reprise	Fils tréfilés ronds et lisses	$\frac{22-R}{100}$	0,16	0,002
	Torons	$\frac{24-R}{100}$	0,18	
II Câbles traversant de nombreux joints ou reprises de bétonnage	Fils tréfilés ronds et lisses	$\frac{24-R}{100}$	0,18	0,003
	Torons	$\frac{26-R}{100}$	0,20	

Dans le cas de barres logées à l'intérieur de gaines de faible diamètre, les coefficients de frottement sont nettement supérieurs, surtout lorsqu'il s'agit de barres nervurées.

En ce qui concerne les torons gainés graissés (§ 3.3.1), les valeurs utilisables sont les suivantes :

$$f = 0,05 \quad \varphi = 0,001 \text{ m}^{-1}$$

#### ■ Cas de la précontrainte extérieure au béton

À l'extérieur du béton, il n'y a pas de déviations angulaires parasites et l'on admet  $\varphi = 0$ .

Dans la mesure où les dispositifs de déviation sont conçus pour permettre, à l'intérieur de certaines limites de tolérance sur le tracé, d'éviter tout point anguleux au droit des raccords avec les parties rectilignes, les valeurs de  $f$  à retenir sont comprises dans les fourchettes suivantes :

- $0,20 \leq f \leq 0,30$  lorsqu'on emploie des tubes métalliques ;
- $0,12 \leq f \leq 0,15$  lorsqu'on emploie des tubes en PEhd.

### 4.2.2 Pertes à la mise en charge de l'ancrage (rentrée d'ancrage)

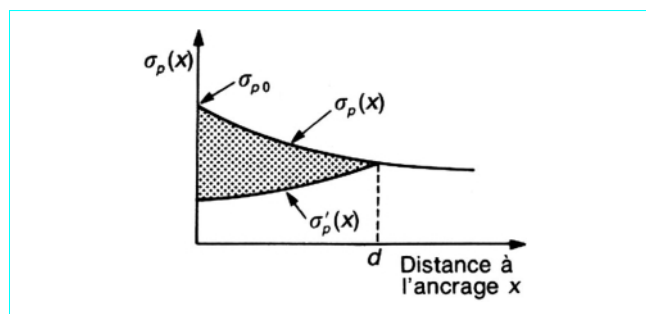
Lors du report de l'effort du vérin à l'ancrage, le câble subit toujours un léger raccourcissement  $g$  :

— faible dans le cas des ancrages par calage ou vissage ;  $g$ , de l'ordre de 2 mm, est alors la conséquence de la déformation du corps d'ancrage et du tassement des cales ou des filets ;

— plus important dans le cas des ancrages par coincement : les torons et les clavettes subissent un déplacement vers l'intérieur de la pièce qui peut atteindre 6 mm et même davantage lorsque le vérin n'est pas muni d'un système de clavetage hydraulique (permettant d'enfoncer de force les mors dans leur logement conique avant relâchement de la pression dans la chambre du vérin).

Les notices techniques des procédés de précontrainte définissent, pour chaque type d'ancrage, la valeur probable de  $g$ .

Le mouvement de rentrée vers l'intérieur du béton est contrarié par le frottement du câble sur sa gaine, comme à la mise en tension, mais en sens inverse. Son influence diminue donc à partir de l'ancrage jusqu'à s'annuler à une distance  $d$  de celui-ci (figure 32) à partir duquel la tension demeure inchangée.



**Figure 32 – Tension le long du câble, avant et après relâchement de la pression dans le vérin**

Avant rentrée d'ancrage, la tension à l'abscisse  $x$  était donnée par la formule (10) :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp[-(f\alpha + \varphi x)]$$

qui s'écrit encore :

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp[-K(x)] \quad (13)$$

avec  $K(x)$  fonction croissante de  $x$  :  $(f\alpha + \varphi x)$ .

L'allongement relatif de l'armature, à l'abscisse  $x$ , valait :

$$\varepsilon_p(x) = \frac{\sigma_p(x)}{E_p} \quad (14)$$

Après rentrée d'ancrage, la tension à l'abscisse  $x (< d)$  n'est plus que :

$$\sigma'_p(x) = \sigma_p(d) \exp[-K(d) + K(x)] \quad (15)$$

ou

$$\sigma'_p(x) = \sigma_{p0} \exp[-2K(d) + K(x)] \quad (16)$$

et l'allongement :

$$\varepsilon'_p(x) = \frac{\sigma'_p(x)}{E_p} \quad (17)$$

On peut écrire que  $g$  est la somme des pertes d'allongement  $[\varepsilon_p(x) - \varepsilon'_p(x)]dx$  des tronçons  $dx$  entre 0 et  $d$ , soit :

$$g = \int_0^d [\varepsilon_p(x) - \varepsilon'_p(x)] dx \quad (18)$$

ou

$$g = \frac{1}{E_p} \int_0^d [\sigma_p(x) - \sigma'_p(x)] dx \quad (19)$$

L'intégrale figurant dans (19) représente l'aire tramée sur la figure 32. L'équation (19), compte tenu de (13) et (16), permet de calculer  $d$ , donc  $\sigma'_p(x)$  ou, ce qui revient au même, la perte par rentrée d'ancrage :

$$\Delta\sigma_g(x) = \sigma_p(x) - \sigma'_p(x) \quad (20)$$

### 4.2.3 Pertes par déformation instantanée du béton

#### 4.2.3.1 Principe général

Toute action permanente  $j$  appliquée postérieurement à la réalisation de l'ancrage d'un câble de précontrainte provoque dans le béton adjacent une variation de contrainte  $\Delta\sigma_{bj}$ , donc de

$$\text{raccourcissement } \Delta\varepsilon_{bj} = \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}}.$$



Le câble considéré subit la même variation de déformation, d'où une perte (ou un gain si  $\Delta\sigma_{bj} < 0$ ) de tension :

$$E_p \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}} \quad (21)$$

Les actions permanentes  $j$  précédemment évoquées peuvent résulter de :

- la mise en tension d'un nouveau câble ;
- l'application d'un supplément de poids propre dans le cas d'une construction par phases ;
- la mise en place de superstructures.

Sauf dans les cas rares où plusieurs câbles seraient tendus de façon rigoureusement simultanée, il faudrait donc faire, en principe, le calcul de ces pertes câble par câble, ce qui serait très laborieux.

On se contente, en pratique, d'une évaluation plus sommaire qui se justifie par la faible importance relative des pertes en question.

Pour ce faire, on regroupe les câbles en familles homogènes. Sont considérés comme appartenant à une même famille tous les câbles de tracé comparable tendus au cours d'une même phase de construction. Les câbles d'une famille  $[\Phi]$  donnée sont tous affectés d'une même perte moyenne par déformation élastique du béton résultant :

- de l'application de charges permanentes additionnelles ou de la mise en tension d'autres familles  $[\Phi']$  postérieurement à la réalisation de l'ancrage des câbles de  $[\Phi]$  ; les pertes partielles correspondantes se calculent par la formule (21) ;
- de l'échelonnement des mises en tension des différents câbles appartenant à  $[\Phi]$ .

#### 4.2.3.2 Pertes par échelonnement des mises en tension des câbles d'une même famille $[\Phi]$

Supposons que la famille en question comporte  $N$  câbles de même puissance passant sensiblement au même niveau dans une section donnée. La mise en tension de ces  $N$  câbles provoque, dans le béton adjacent, une variation de contrainte normale  $\Delta\sigma_{bi}$ .

Chaque câble apporte à cette variation de contrainte une contribution  $\frac{\Delta\sigma_{bi}}{N}$ , la variation correspondante de déformation du béton étant  $\frac{\Delta\sigma_{bi}}{NE_i}$ , où  $E_i$  représente le module instantané du béton.

Du fait que les  $N$  câbles ne sont pas tendus en même temps (il faudrait pour cela disposer d'au moins  $N$  vérins sur le chantier), le  $n^e$  câble mis en tension subit le raccourcissement dû aux  $(N-n)$  câbles tendus après lui :

$$\frac{(N-n)}{N} \frac{\Delta\sigma_{bi}}{E_i}$$

La perte de tension vaut donc :

$$E_p \frac{(N-n)}{N} \frac{\Delta\sigma_{bi}}{E_i}$$

et sa perte de force :

$$A_p E_p \frac{(N-n)}{N} \frac{\Delta\sigma_{bi}}{E_i}$$

avec  $A_p$  section du câble en question.

La perte globale de force pour les  $N$  câbles est ainsi :

$$\sum_{n=1}^N A_p E_p \frac{(N-n)}{N} \frac{\Delta\sigma_{bi}}{E_i} = A_p E_p \frac{N(N-1)}{2N} \frac{\Delta\sigma_{bi}}{E_i}$$

D'où, pour la famille considérée, une perte moyenne de tension (que l'on obtient en divisant la perte de force par la section  $NA_p$  des  $N$  câbles) :

$$\frac{1}{2} \frac{E_p}{E_i} \frac{(N-1)}{N} \Delta\sigma_{bi} \quad (22)$$

Cette expression tend vers :

$$\frac{1}{2} \frac{E_p}{E_i} \Delta\sigma_{bi} \quad (23)$$

lorsque  $N$  augmente indéfiniment.

En fait, c'est la formule (23), majorante de la formule (22) que l'on applique dans la pratique pour estimer les pertes par échelonnement des mises en tension au sein d'une famille de câbles.

#### 4.2.3.3 Récapitulation et simplification des formules de calcul

Les formules (21) et (23) peuvent se résumer sous la forme suivante :

$$\Delta\sigma_e = E_p \sum_j k_j \frac{\Delta\sigma_{bj}}{E_{ij}} \quad (24)$$

avec  $\Delta\sigma_{bj}$  variation de contrainte du béton adjacent à la famille  $[\Phi]$  de câbles étudiée, dans la section considérée, sous l'effet des actions permanentes appliquées au jour  $j$  ;

$k_j$  coefficient multiplicateur égal à :

- 1/2 pour  $\Delta\sigma_{bj}$  dû à la mise en tension des câbles mêmes de la famille  $[\Phi]$  et aux charges permanentes mobilisées simultanément,
- 1 pour les variations  $\Delta\sigma_{bj}$  générées par les actions permanentes appliquées postérieurement à la mise en tension de  $[\Phi]$ .

Assez fréquemment, on peut considérer que l'on n'a qu'une famille de câbles et que le seul  $\Delta\sigma_{bj}$  intéressant la structure est celui qui résulte de la mise en tension des câbles en question et de la mobilisation simultanée du poids propre de la structure. Alors  $\Delta\sigma_{bj}$  se confond avec  $\sigma_{bi}$ , contrainte initiale du béton adjacent et la formule (24) se réduit à :

$$\Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_{bi} \quad (25)$$

Si l'on se contente d'une évaluation sommaire de  $\Delta\sigma_e$  (très souvent suffisante compte tenu de la petitesse de ce terme), on confond  $\sigma_{bi}$  avec  $\sigma_b$ , contrainte finale (après stabilisation des pertes) du béton au niveau des câbles dans l'ouvrage soumis à ses seules charges permanentes.

Comme  $E_p/E_{ij}$  est, en pratique, voisin de 6, l'ordre de grandeur de la perte par déformation instantanée du béton est donné par :

$$\Delta\sigma_e \approx \frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_b \approx 3\sigma_b \quad (26)$$

### 4.3 Tension initiale

C'est celle qui subsiste dans le câble une fois effectuées toutes les pertes instantanées analysées :

$$\sigma_i(x) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_\phi(x) - \Delta\sigma_g(x) - \Delta\sigma_e(x) \quad (27)$$

## 4.4 Pertes de tension différées

### 4.4.1 Pertes par retrait

Les câbles, liés au béton à leurs extrémités par les ancrages, et tout au long de leur tracé par le coulis d'injection, sont astreints à subir les mêmes variations de déformations que le béton adjacent.

Si  $t_0$  est l'âge du béton au moment de la mise en tension d'un câble, la partie non encore effectuée du retrait vaut :

$$\varepsilon_r [1 - r(t_0)]$$

avec  $\varepsilon_r$  retrait final,

$r(t)$  loi d'évolution du retrait en fonction du temps (§ 2.2.3.2).

La perte finale de tension par retrait est donc, pour le câble considéré :

$$\Delta\sigma_r = E_p \varepsilon_r [1 - r(t_0)] \quad (28)$$

Très souvent, on peut négliger  $r(t_0)$  devant 1, ce qui conduit à la formule simplifiée :

$$\Delta\sigma_r \approx E_p \varepsilon_r \quad (29)$$

### 4.4.2 Pertes par fluage

La contrainte du béton au niveau des armatures de précontrainte n'est pas constante dans le temps, même si l'on fait abstraction des charges variables appliquées à la structure pendant des durées trop brèves pour avoir une influence significative sur le fluage.

Cette contrainte  $\sigma_b(t)$  varie à cause (figure 33) :

- des différentes phases de construction qui se traduisent par l'application de nouvelles charges permanentes ;
- des pertes différées de toute nature qui entraînent une évolution progressive de la tension dans les câbles.

Si l'on désigne par  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_{\min}$  les valeurs extrêmes qu'elle présente, il est facile de montrer, dans le cadre des hypothèses de la viscoélasticité linéaire (§ 2.2.3.3.2) que la déformation totale du béton satisfait, à tout instant à :

$$\sigma_{\min} F(t_0, t) \leq \varepsilon(t) \leq \sigma_{\max} F(t_0, t)$$

avec  $t_0$  âge du béton au moment de la mise en tension des armatures considérées.

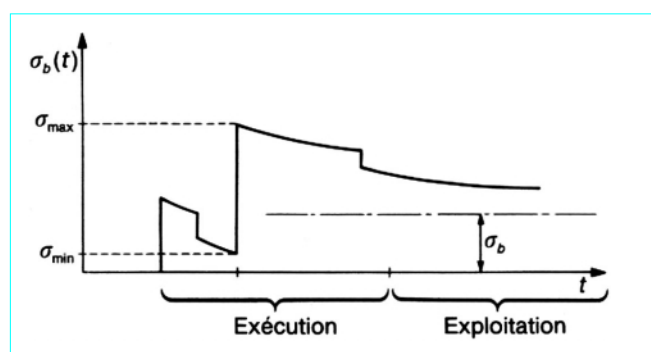


Figure 33 – Variation de la contrainte du béton  $\sigma_b(t)$  au niveau d'un câble

Pour  $t$  infini, la déformation finale de fluage, si l'on se contente de la formulation simplifiée exposée au paragraphe 2.2.3.3.1, respecte donc la double inégalité :

$$\frac{\sigma_{\min}}{E_{fe}(t_0)} \leq \varepsilon_{fe} \leq \frac{\sigma_{\max}}{E_{fe}(t_0)}$$

soit :

$$\Phi \frac{\sigma_{\min}}{E_i(t_0)} \leq \varepsilon_{fe} \leq \Phi \frac{\sigma_{\max}}{E_i(t_0)}$$

Cet encadrement conduit, de façon logique, à l'estimation :

$$\varepsilon_{fe} \approx \frac{\Phi}{E_i(t_0)} \frac{(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})}{2}$$

où, si l'on admet  $\Phi \approx 2$  et en reprenant pour  $E_i(t_0)$  la notation plus habituelle  $E_{ij}$  :

$$\varepsilon_{fe} \approx \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{E_{ij}}$$

En pratique,  $\sigma_{\min}$  se confond très souvent avec la contrainte finale  $\sigma_b$  du béton adjacent aux armatures dans l'ouvrage soumis à ses seules charges permanentes (état à vide) de sorte que :

$$\varepsilon_{fe} \approx \frac{\sigma_{\max} + \sigma_b}{E_{ij}}$$

La perte finale par fluage vaut donc :

$$\Delta\sigma_{fe} = E_p \varepsilon_{fe} \approx \frac{E_p}{E_{ij}} (\sigma_{\max} + \sigma_b) \quad (30)$$

Lorsque  $\sigma_{\max} \leq 1,5 \sigma_b$ , on peut, par simplification, se contenter de l'estimation (par excès) :

$$\Delta\sigma_{fe} \approx 2,5 \sigma_b \frac{E_p}{E_{ij}} \quad (31)$$

et comme  $\frac{E_p}{E_{ij}} \approx 6$  :

$$\Delta\sigma_{fe} \approx 15 \sigma_b \quad (32)$$

### 4.4.3 Pertes par relaxation

Comme on l'a vu au paragraphe 2.3.3.4, la perte de tension finale due à la relaxation peut être estimée par la formule :

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left( \frac{\sigma_i}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_i \quad (33)$$

avec  $\rho_{1000}$  (%) relaxation garantie à 1 000 h,  
 $\mu_0$  coefficient valant 0,43 pour les armatures à très basse relaxation, 0,30 pour les armatures à relaxation normale.

### 4.4.4 Pertes différées totales

Pour tenir compte de l'interaction du retrait et du fluage avec la relaxation des armatures, les pertes différées finales sont évaluées par la formule :

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fe} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_p \quad (34)$$

Si l'on a besoin de connaître les pertes différées à un instant quelconque ( $t$  jours après la mise en tension), on peut admettre que :

$$\Delta\sigma_d(t) = r(t)\Delta\sigma_d \tag{35}$$

$r(t)$  étant la fonction déjà définie au paragraphe 2.2.3.2 :

$$r(t) = \frac{t}{t + 9r_m}$$

4.5 Tension à un instant  $t$  quelconque

En valeur probable, elle s'établit ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_p(x,t) &= \sigma_{p0} - \Delta\sigma_i(x) - \Delta\sigma_d(x,t) \\ &= \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p(x,t) \end{aligned} \tag{36}$$

avec  $\Delta\sigma_p$  perte totale de tension à l'abscisse  $x$  et au temps  $t$ .

Les valeurs caractéristiques de la tension (§ 1.4.2.1) sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{p1}(x,t) &= 1,02\sigma_{p0} - 0,8\Delta\sigma_p(x,t) \\ \sigma_{p2}(x,t) &= 0,98\sigma_{p0} - 1,2\Delta\sigma_p(x,t) \end{aligned} \tag{37}$$

4.6 Exemple

Le câble considéré est un câble 7 T15 parabolique filant assurant, avec 5 autres câbles du même type, la précontrainte d'une poutre de 28 m de portée.

Il passe sensiblement à 0,18 m de la fibre inférieure en milieu de travée et à 1,50 m de cette même fibre à la verticale de l'appui (figure 34).

La poutre, en simple té, coulée sur cintre, est constituée d'un béton de résistance  $f_{c28} = 30$  MPa. Les câbles sont mis en tension lorsque le béton a atteint un âge  $j$  tel que  $f_{cj} = 24$  MPa (on peut admettre  $j \approx 14$  jours). Les superstructures sont posées à 28 j. Un calcul sommaire, au stade du prédimensionnement, et basé sur une estimation de la force moyenne transmise par un toron T15 égale à :

- 0,16 MN, toutes pertes faites (à  $t_\infty$ ) ;
- $0,16 \times 1,2 = 0,192$  MN à 14 j ;

fait apparaître en section médiane, au niveau du barycentre des câbles (à 0,14 m de la fibre inférieure), les contraintes dans le béton indiquées dans le tableau 5.

Nous nous proposons, à partir de ces éléments, d'évaluer la tension du câble considéré dans la section médiane, compte tenu des caractéristiques définies ci-après.

Tableau 5 – Contraintes dans le béton en section médiane				
	En exploitation ( $t_\infty$ ) $P = 6 \times 7 \times 0,16 = 6,72$ MN (1)		En construction (14 j) $P_c = 1,2$ $P = 8,06$ MN	
	Contraintes partielles (MPa)	Contraintes cumulées (MPa)	Contraintes partielles (MPa)	Contraintes cumulées (MPa)
Précontrainte $P$ (ou $P_c$ )	16,0		19,3	
Poids propre	- 9,1	6,9	- 9,1	
Superstructures	- 3,4 (= $\Delta\sigma_{28}$ )	3,5 (= $\sigma_b$ )		10,1 (= $\sigma_{max}$ )

(1)  $P$  = nombre de câbles  $\times$  nombre de torons  $\times$  force transmise par un toron.

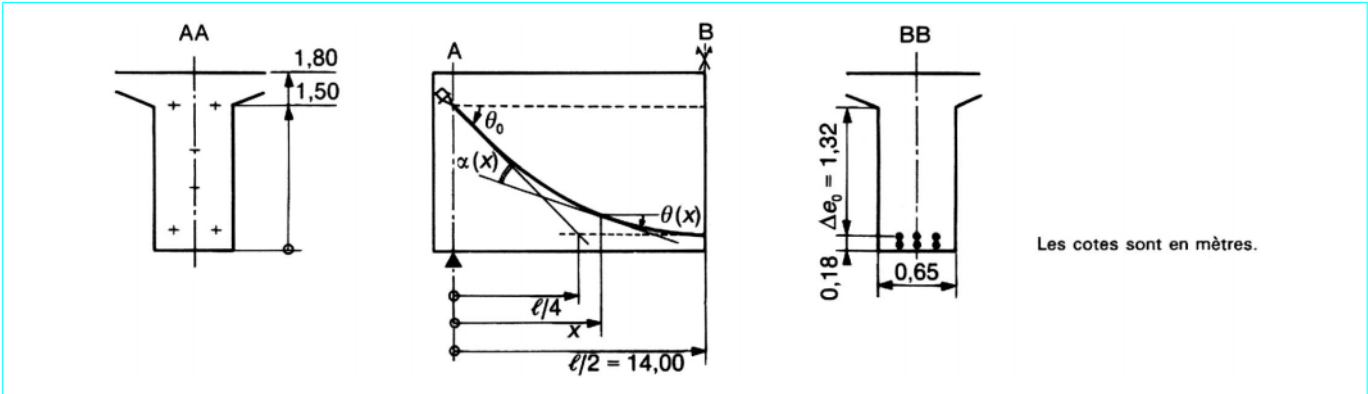


Figure 34 – Schéma du câble étudié

Pour les armatures T15 de classe 1770, TBR (tableau 2).

$$\begin{aligned}f_{prg} &= 1\,770 \text{ MPa} \\f_{peg} &= \frac{220 \times 10^{-3}}{139 \times 10^{-6}} = 1\,583 \text{ MPa} \\p_{1000} &= 2,5 \% \\E_p &= 190\,000 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Pour le procédé :

$$g = 6 \text{ mm}$$

Pour les frottements (tableau 4) :

$$f = 0,18 ; \quad \varphi = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

#### 4.6.1 Tension à l'origine

D'après le paragraphe 4.1, on a :

$$\sigma_{p0} = \inf \left\{ \begin{aligned} 0,8 \times 1\,770 &= 1\,416 \text{ MPa} \\ 0,9 \times 1\,583 &= 1\,425 \text{ MPa} \end{aligned} \right\} = 1\,416 \text{ MPa}$$

#### 4.6.2 Pertes instantanées

##### ■ Frottements

La déviation angulaire à l'abscisse  $x$  (figure 34) vaut :

$$\alpha(x) = \theta(x) - \theta_0 \approx \tan \theta(x) - \tan \theta_0$$

Le câble étant parabolique,  $\tan \theta(x) = de_0/dx$  est une fonction linéaire de  $x$  et :

$$\alpha(x) = ax$$

$a$  est facile à déterminer en se plaçant à  $x = \ell/2$  :

$$\alpha\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\theta_0 \approx \frac{4\Delta e_0}{\ell}$$

$$\text{et} \quad a = \frac{2}{\ell} \alpha\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{8\Delta e_0}{\ell^2} = \frac{8 \times 1,32}{28^2} = 0,0135 \text{ m}^{-1}$$

D'où :

$$K(x) = f\alpha(x) + \varphi x = (0,18 \times 0,0135 + 0,002) x = 0,0044 x$$

$$\text{soit} \quad K(x) = kx \quad \text{avec} \quad k = 0,0044 \text{ m}^{-1}$$

Pour  $x = \ell/2 = 14 \text{ m}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_p(\ell/2) &= \sigma_{p0} \exp(-k\ell/2) = 1\,416 \exp(-0,0044 \times 14) \\ &= 1\,331 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \Delta\sigma_\varphi(\ell/2) = 1\,416 - 1\,331 = 85 \text{ MPa}$$

Accessoirement, pour  $x = \ell$  :

$$\sigma_p(\ell) = \sigma_{p0} \exp(-k\ell) = 1\,416 \exp(-0,0044 \times 28) = 1\,252 \text{ MPa}$$

##### ■ Rentrée d'ancrage

Calculons la longueur  $d$  sur laquelle se fait sentir la rentrée d'ancrage.

$$\text{On a} \quad \sigma_p(x) = \sigma_{p0} \exp(-kx)$$

et, d'après (16) :

$$\sigma'_p(x) = \sigma_{p0} \exp[-k(2d-x)]$$

La formule (19) devient donc :

$$E_p g = \sigma_{p0} \int_0^d [\exp(-kx) - \exp k(x-2d)] dx$$

Cette équation en  $d$  peut se résoudre rigoureusement. Elle s'écrit en effet :

$$E_p g = \frac{\sigma_{p0}}{k} [1 - \exp(-kd)]^2$$

$$\text{D'où} \quad \exp(-kd) = 1 - \sqrt{\frac{E_p g k}{\sigma_{p0}}}$$

soit :

$$\begin{aligned}d &= -\frac{1}{k} \ln \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_p g k}{\sigma_{p0}}} \right] \\ &= -\frac{1}{0,0044} \ln \left[ 1 - \sqrt{\frac{190\,000 \times 6 \times 10^{-3} \times 0,0044}{1\,416}} \right]\end{aligned}$$

$$d = 13,95 \text{ m}$$

Dans la pratique, pour trouver ce résultat, on préfère souvent raisonner de la façon suivante :  $E_p g$  est égal à l'aire du triangle curviligne tracé sur la figure 35.

En assimilant les branches d'exponentielles à des segments de droite :

$$E_p g = \frac{1}{2} (\sigma_{p0} - \sigma'_{p0}) \times d$$

avec

$$\sigma'_{p0} = \sigma_{p0} \exp(-2kd)$$

D'où

$$E_p g = \frac{\sigma_{p0}}{2} [1 - \exp(-2kd)] \times d$$

Soit encore, en se limitant au premier terme du développement en série de l'exponentielle :

$$E_p g \approx \frac{\sigma_{p0}}{2} \times 2kd \times d$$

et finalement :

$$d = \sqrt{\frac{E_p g}{\sigma_{p0} k}} = \sqrt{\frac{190\,000 \times 6 \times 10^{-3}}{1\,416 \times 0,0044}} \approx 13,50 \text{ m}$$

On retrouve le même ordre de grandeur que dans le calcul précédent avec, cependant, une différence significative montrant qu'il est illusoire de rechercher une trop grande précision dans ce type d'estimation.

Pour la suite, retenons la valeur  $d = 13,95 \text{ m}$  *a priori* plus précise.

On remarque ici que l'effet de la rentrée d'ancrage se fait sentir presque jusqu'au milieu de la poutre.

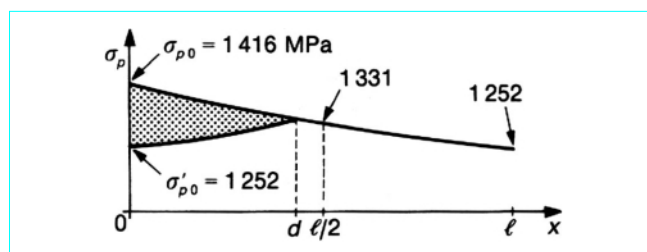


Figure 35 – Tensions dans le câble avant et après rentrée d'ancrage

En O, après rentrée d'ancrage, la tension vaut :

$$\sigma'_{p0} = \sigma_{p0} \exp(-2kd) = 1\,416 \exp(-2 \times 0,004\,4 \times 13,95) \\ = 1\,252 \text{ MPa}$$

Ainsi (figure 35), après relâchement de la pression dans la chambre du vérin, la tension est-elle sensiblement symétrique par rapport à la section médiane, ce qui prouve qu'il est inutile de tendre le câble par deux extrémités. On montre facilement que prévoir deux ancrages actifs serait même défavorable si l'on avait  $d > \ell/2$ .

Dans le cas présent, au niveau de la section médiane :

$$\Delta\sigma_g(\ell/2) = 0$$

■ Déformations instantanées du béton

- Échelonnement des mises en tension (à 14 j).

On a  $E_{ij} = 11\,000 f_{cj}^{1/3}$

soit  $E_{i14} = 11\,000 \times 24^{1/3} = 31\,700 \text{ MPa}$

et  $\Delta\sigma_{b14} = 10,1 \text{ MPa}$  (tableau 5)

D'où, selon (24), avec  $k_{14} = 1/2$  :

$$\Delta\sigma_{e14} = 190\,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{10,1}{31\,700} \approx 30 \text{ MPa}$$

- Pose des superstructures (à 28 j).

Alors  $E_{i28} = 11\,000 \times 30^{1/3} \approx 34\,200 \text{ MPa}$

et  $\Delta\sigma_{b28} = -3,4 \text{ MPa}$  (tableau 5)

D'où, puisque  $k_{28} = 1$  :

$$\Delta\sigma_{e28} = -190\,000 \times \frac{3,4}{34\,200} \approx -19 \text{ MPa}$$

- Les pertes totales par déformations instantanées du béton s'élèvent ainsi à :

$$\Delta\sigma_e = \Delta\sigma_{e14} + \Delta\sigma_{e28} = 30 - 19 = 11 \text{ MPa}$$

On remarque la faible valeur de cette perte, qu'on aurait pu évaluer par la formule plus grossière (26) :

$$\Delta\sigma_e \approx 3\sigma_b = 3 \times 3,5 \approx 11 \text{ MPa} \text{ (tableau 5)}$$

La coïncidence quasi parfaite des deux valeurs est un hasard heureux, la seule justification véritable de l'utilisation de la formule (26) étant la petitesse du terme  $\Delta\sigma_e$  en regard des autres pertes.

4.6.3 Tension initiale

Les pertes instantanées valent donc :

$$\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_\phi + \Delta\sigma_g + \Delta\sigma_e = 85 + 0 + 11 = 96 \text{ MPa}$$

et la tension initiale :

$$\sigma_i = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_i = 1\,416 - 96 = 1\,320 \text{ MPa}$$

4.6.4 Pertes différées

■ Retrait

En se contentant de la formule simplifiée (29) avec  $\varepsilon_r = 2 \times 10^{-4}$  (§ 2.2.3.2) :

$$\Delta\sigma_r = E_p \varepsilon_r = 190\,000 \times 2 \times 10^{-4} = 38 \text{ MPa}$$

■ Fluage

La formule (30), avec  $E_{ij} = E_{i14} = 31\,700 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_{\max} = 10,1 \text{ MPa}$  ;  $\sigma_b = 3,5 \text{ MPa}$  (tableau 5), donne :

$$\Delta\sigma_{fl} = \frac{E_p}{E_{ij}} (\sigma_{\max} + \sigma_b) = \frac{190\,000}{31\,700} (10,1 + 3,5) \approx 82 \text{ MPa}$$

■ Relaxation

En utilisant la formule (33) :

$$\Delta\sigma_\rho = \frac{6}{100} \rho_{1\,000} \left( \frac{\sigma_i}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_i = \frac{6}{100} \times 2,5 \left( \frac{1\,320}{1\,770} - 0,43 \right) \times 1\,320 \\ \Delta\sigma_\rho \approx 63 \text{ MPa}$$

■ Pertes différées totales

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_\rho$$

soit  $\Delta\sigma_d = 38 + 82 + \frac{5}{6} \times 63 = 173 \text{ MPa}$

4.6.5 Récapitulation des valeurs de la tension en section médiane

Les tensions les plus intéressantes pour le projeteur sont :

— la tension initiale :

$$\sigma_i = 1\,320 \text{ MPa}$$

— la tension finale :

$$\sigma_\infty = \sigma_i - \Delta\sigma_d = 1\,320 - 173 = 1\,147 \text{ MPa}$$

Ce sont là des valeurs probables. Les valeurs caractéristiques associées, définies par les relations (34), sont données dans le tableau 6, ainsi que les forces correspondantes  $P$  pour le câble :  $P = A_p \sigma_p$  (avec  $A_p = 7 \times 139 = 973 \text{ mm}^2$ ).

On peut remarquer que, pour un toron T15, de section  $139 \text{ mm}^2$ , les forces probables :

— initiale  $1\,320 \times 139 \times 10^{-6} = 0,184 \text{ MN}$

— et surtout finale  $1\,147 \times 139 \times 10^{-6} = 0,159 \text{ MN}$

sont proches des forces estimées au niveau du prédimensionnement (respectivement 0,192 MN et 0,16 MN). Une deuxième approximation, pour affiner le calcul des tensions, paraît, dans le cas présent, tout à fait inutile.

Tableau 6 – Tensions et forces en section médiane

Valeurs	Tensions (MPa)	Force par câble 7T15 (MN)
<b>Initiales :</b>		
— probable	$\sigma_{im} = 1\,320$	$P_{im} = 1,28$
— caractéristique maximale	$\sigma_{i1} = 1\,368$	$P_{i1} = 1,33$
— caractéristique minimale	$\sigma_{i2} = 1\,272$	$P_{i2} = 1,24$
<b>Finales :</b>		
— probable	$\sigma_{pm} = 1\,147$	$P_{pm} = 1,12$
— caractéristique maximale	$\sigma_{p1} = 1\,229$	$P_{p1} = 1,20$
— caractéristique minimale	$\sigma_{p2} = 1\,065$	$P_{p2} = 1,04$



#### 4.6.6 Ordres de grandeur

Le câble traité dans l'exemple précédent présente une longueur assez modeste et un tracé particulièrement simple (sans déviation en plan notamment). Les pertes qu'il subit donnent donc une idée, plutôt par défaut, des pertes (en particulier par frottement) que l'on rencontre dans la pratique courante des ouvrages d'art où l'on a souvent affaire à des unités dont la longueur est comprise entre 40 et 120 m.

##### ■ Tension finale

Dans notre exemple :

$$\frac{\sigma_{pm}}{\sigma_{p0}} = \frac{1\,147}{1\,416} = 0,81 \quad \text{soit} : \quad \frac{\Delta\sigma_p}{\sigma_{p0}} = 0,19$$

Fréquemment, en fait, dans les ponts :

$$\begin{aligned} 0,65 &\leq \frac{\sigma_{pm}}{\sigma_{p0}} \leq 0,80 \\ \text{ou} \quad 0,20 &\leq \frac{\Delta\sigma_p}{\sigma_{p0}} \leq 0,35 \end{aligned} \quad (38)$$

##### ■ Tension initiale

$$\text{Ici} \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_{p0}} = \frac{1\,320}{1\,416} = 0,93 \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_{p0}} = 0,07$$

Le plus souvent, dans le domaine des ouvrages d'art :

$$\begin{aligned} 0,75 &\leq \frac{\sigma_i}{\sigma_{p0}} \leq 0,90 \\ \text{ou} \quad 0,10 &\leq \frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_{p0}} \leq 0,25 \end{aligned} \quad (39)$$

##### ■ Fourchette de précontrainte

Son ouverture relative  $\lambda$  (§ 1.4.2.1) se définit par :

$$\lambda = \frac{\sigma_{p1} - \sigma_{pm}}{\sigma_{pm}}$$

avec  $\sigma_{pm}$  tension probable :  $\sigma_{pm} = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p$  ;  
 $\sigma_{p1}$  tension caractéristique maximale :

$$\sigma_{p1} = 1,02 \sigma_{p0} - 0,8 \Delta\sigma_p$$

$\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda = \frac{0,02 \sigma_{p0} + 0,2 \Delta\sigma_p}{\sigma_{p0} - \Delta\sigma_p} = \frac{0,02 + 0,2 \frac{\Delta\sigma_p}{\sigma_{p0}}}{1 - \frac{\Delta\sigma_p}{\sigma_{p0}}}$$

Compte tenu des valeurs pratiques définies par (38) et (39), on a ainsi les ordres de grandeur :

— pour la tension finale :

$$7 \% \leq \lambda \leq 14 \%$$

— pour la tension initiale :

$$4 \% \leq \lambda_i \leq 9 \%$$

Si l'on a besoin, au stade d'un prédimensionnement, d'une estimation de l'ouverture relative de la fourchette de précontrainte, on peut, par conséquent, tabler sur les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\approx 10 \% \\ \lambda_i &\approx 6 \% \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

##### ■ Pourcentages courants d'armatures de précontrainte

Les câbles constitués de fils ou de torons présentent une tension utile (finale) de l'ordre de  $\sigma_p = 1\,000$  MPa.

La précontrainte moyenne d'une poutre dont la section droite a une aire  $B$  est, par ailleurs, de l'ordre de :

$$\sigma_G = \frac{P}{B} \approx 3 \text{ à } 6 \text{ MPa}$$

$$\text{Par conséquent} \quad \frac{A_p \sigma_p}{B} \approx 3 \text{ à } 6 \text{ MPa}$$

$$\text{et} \quad \frac{A_p}{B} \approx 0,3 \text{ à } 0,6 \%$$

Comme 1 % d'acier représente 78,5 kg d'armatures par m<sup>3</sup> de béton, les ratios courants d'armatures de précontrainte sont compris entre 25 kg/m<sup>3</sup> et 50 kg/m<sup>3</sup>.

## 5. Flexion des poutres isostatiques en l'absence de fissuration

### 5.1 Généralités

Comme vis-à-vis de toute sollicitation, il y a lieu de procéder, en ce qui concerne les sollicitations normales, à deux catégories de justifications :

- aux ELU pour s'assurer de la résistance de la structure ;
- aux ELS pour vérifier le respect des conditions d'exploitation et de durabilité.

Alors qu'aux ELS on se limite au domaine de fonctionnement élastique des matériaux, on admet, aux ELU, la plastification des sections.

Dans le présent paragraphe, nous nous bornerons à l'étude vis-à-vis des ELS, les ELU étant traités au paragraphe 7.

Les matériaux étant alors censés se comporter élastiquement, le principe des justifications est extrêmement simple : il suffit de calculer les contraintes qui apparaissent dans les sections sous l'effet des sollicitations de calcul et de vérifier qu'elles ne dépassent pas les contraintes limites réglementaires (§ 1.4.5.1).

Tant que les contraintes de traction dans le béton restent modérées (ce que nous supposons ici), le calcul s'effectue à partir des caractéristiques des **sections non fissurées** :

- sections nettes en ce qui concerne les contraintes développées par les charges permanentes et par la précontrainte ;
- sections homogénéisées pour les contraintes dues aux charges variables.

Les **sections nettes** s'obtiennent en soustrayant des **sections brutes** les vides tels que trous, encoches et conduits ménagés pour le passage ou l'ancrage des armatures de précontrainte.

Les **sections homogénéisées** se déduisent des sections nettes, précédemment définies, en leur ajoutant la section des armatures de précontrainte multipliée par le coefficient d'équivalence instantané

$$n_i = \frac{E_p}{E_i} \quad . \quad \text{L'introduction de ces sections homogénéisées permet de}$$

prendre en compte les variations de tension qui affectent les armatures de précontrainte lorsque des charges variables sont appliquées à la structure. En pratique, les caractéristiques des sections brutes, nettes et homogénéisées sont souvent très voisines et l'on peut les confondre **au stade du prédimensionnement**. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

## 5.2 Notations

Considérons une poutre de fibre moyenne  $Gx$  (supposée horizontale) et de plan moyen  $Gxy$ , fléchie et précontrainte dans ce plan.  $Gy$  (axe vertical de symétrie de la section droite) et  $Gz$  sont les axes principaux d'inertie de la section (figure 36).

### 5.2.1 Section droite

Nous désignons par :

- $B$  son aire ;
- $v$  et  $v'$  les distances de son centre de gravité aux fibres extrêmes ( $v + v' = h$ ) ;
- $I$  son moment d'inertie par rapport à  $Gz$  ;
- $\frac{I}{v}$  et  $\frac{I}{v'}$  ses modules d'inertie ;
- $\rho = \frac{I}{Bvv'}$  son rendement géométrique.

### 5.2.2 Sollicitations appliquées à la section

#### 5.2.2.1 Sollicitations développées par les actions extérieures

Les actions extérieures (autres que la précontrainte) développent dans la section un moment fléchissant  $M$ , compté algébriquement positif s'il comprime la fibre supérieure.  $M$  est la somme de :

- $M_g$  moment de poids propre ;
- $M'_g$  moment dû aux charges permanentes additionnelles ;
- $M_q$  moment généré par les actions variables de toutes natures.

Selon le cas de charge considéré,  $M$  varie entre :

- une valeur minimale :  $M_m = M_g + M'_g + M_{mq}$  ;
- et une valeur maximale :  $M_M = M_g + M'_g + M_{Mq}$ .

Posons :  $\Delta M = M_M - M_m = M_{Mq} - M_{mq}$ . Cette quantité est toujours positive ou nulle.

#### 5.2.2.2 Sollicitations développées par la précontrainte

La précontrainte est exercée par le câble tendu à  $P$  et excentré de  $e_0$  par rapport à  $G$ .  $e_0$  est compté algébriquement sur l'axe  $Gy$ . Il est donc positif lorsque le câble est au-dessus du centre de gravité.

Les sollicitations normales développées par la précontrainte sont alors (§ 1.3.3.2) :

$$\begin{cases} N_p = P \cos \alpha \approx P \\ M_p = Pe_0 \cos \alpha \approx Pe_0 \end{cases}$$

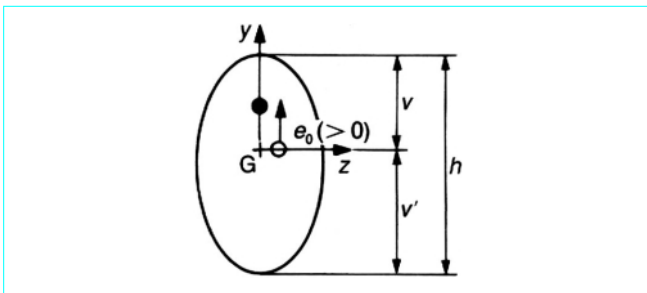


Figure 36 – Caractéristiques d'une section droite

S'il y a, en réalité, plusieurs câbles distincts (tendus à  $P_i$  et excentrés de  $e_{0i}$ ), le **câble** représente le câble unique fictif qui exercerait le même effort résultant ( $P = \sum P_i$  ;  $Pe_0 = \sum P_i e_{0i}$ ).

Dans ce qui suit,  $\cos \alpha$  est toujours assimilé à 1.  $P$  est par ailleurs supposé constant dans une section donnée, c'est-à-dire indépendant du cas de charge appliqué, ce qui n'est pas rigoureusement exact, mais s'avère suffisant au niveau d'un prédimensionnement (§ 5.1).

### 5.2.3 Contraintes normales dans le béton

Toutes les contraintes et contraintes limites définies ci-après sont comptées algébriquement positives s'il s'agit de compressions.

Sous un cas de charge donné, elles varient linéairement avec  $y$  entre  $\sigma$  sur la fibre supérieure et  $\sigma'$  sur la fibre inférieure (figure 37).

Elles sont notées :

- $\sigma_1$  et  $\sigma'_1$  lorsque le moment extérieur est  $M_m$  ;
- $\sigma_2$  et  $\sigma'_2$  lorsque le moment extérieur est  $M_M$ .

Compte tenu des conventions adoptées pour le signe des moments :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\geq \sigma_1 \\ \sigma'_2 &\leq \sigma'_1 \end{aligned}$$

Le problème du dimensionnement consiste généralement à faire en sorte que les contraintes sur les fibres extrêmes respectent des **contraintes limites** :

- $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_1$  pour celles qui interviennent lorsque le moment appliqué est  $M_m$  ;
- $\bar{\sigma}_2$  et  $\bar{\sigma}'_2$  pour celles qui interviennent lorsque le moment appliqué est  $M_M$  ;
- $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_2$  au-dessous desquelles on ne doit pas descendre sont en pratique assez voisines de 0 et dites **contraintes limites de traction** ;
- $\bar{\sigma}_2$  et  $\bar{\sigma}'_1$  sont, au contraire, des **contraintes limites de compression** qu'il s'agit de ne pas dépasser.

## 5.3 Centre et ligne de pression

En un cas de charge réel quelconque, une section est soumise aux sollicitations suivantes :

- un effort normal  $n = P$  dû à la seule précontrainte ;
- un moment fléchissant  $m = Pe_0 + M$  somme du moment de précontrainte  $Pe_0$  et du moment fléchissant extérieur  $M$ .

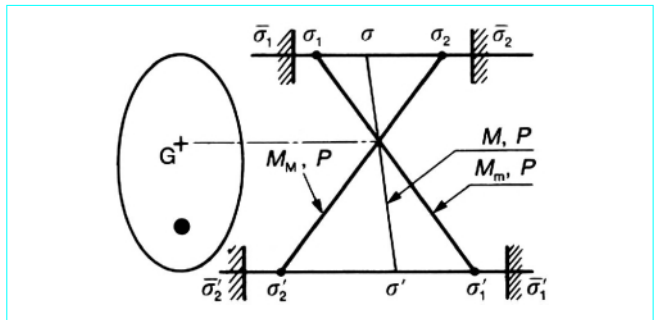


Figure 37 – Contraintes et contraintes limites dans une section

Cela équivaut à l'effet d'une force normale de compression  $P$ , appliquée en un point de Gy appelé **centre de pression** et d'ordonnée :

$$e = \frac{m}{n} = e_0 + \frac{M}{P}$$

Le lieu de ces points lorsque la section décrit la poutre est la **ligne de pression**.

Si l'on suppose que, partout,  $M = 0$ , ce qui revient à ne considérer que l'effet de la précontrainte sur la poutre, la ligne de pression est dite **ligne de précontrainte** et se confond (pour une poutre isostatique) avec le tracé du câble ( $e = e_0$ ).

L'effet d'un moment fléchissant extérieur  $M$  est donc de déplacer le centre de pression sur Gy, à partir du câble, de la quantité algébrique  $\frac{M}{P}$  (figure 38).

L'expression du moment fléchissant dans une section ( $m = Pe_0 + M$ ) montre qu'au stade du projet il est possible de compenser une modification permanente  $\delta M$  du moment fléchissant extérieur par simple déplacement du câble de la quantité :

$$\delta e_0 = - \frac{\delta M}{P}$$

À la limite, supposons que le projeteur ait « oublié » dans son dimensionnement l'effet des charges permanentes ( $g$  et  $g'$ ). Pour rattrapper cette omission, il lui suffit, en gardant la même section et le même câble, de décaler l'excentricité de ce dernier de :

$$\delta e_0 = - \frac{(M_g + M'_g)}{P}$$

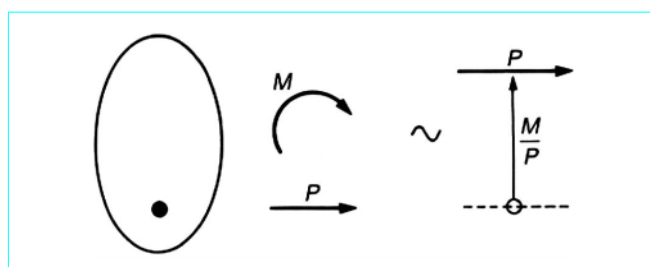


Figure 38 – Centre de pression

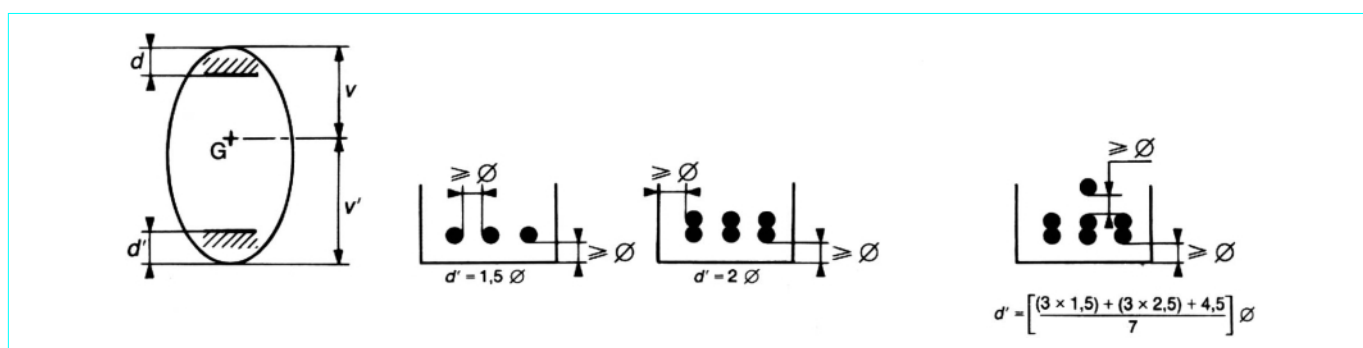


Figure 39 – Définition de  $d$  et  $d'$

Cette opération lui permet de compenser la charge permanente, c'est-à-dire d'annuler son effet. Autrement dit, la charge permanente ne coûte rien, ni en acier, ni en béton, ce qui montre bien le caractère actif de la précontrainte.

Cette faculté de compensation des charges permanentes a néanmoins ses limites : les effets desdites charges doivent être suffisamment faibles pour que la variation d'excentricité à donner au câble ne fasse pas sortir ce dernier hors du béton ou ne l'y laisse pas trop mal enrobé.

Il faut donc :

$$-(v' - d') \leq e_0 \leq v - d \quad (41)$$

avec  $d$  et  $d'$  distances minimales entre le barycentre des câbles réels et les fibres extrêmes, supérieure et inférieure.

$d$  et  $d'$  dépendent :

- du nombre de câbles nécessaire pour réaliser la force de précontrainte  $P$  ;
- des règles de groupement et d'enrobage imposées aux câbles.

À cet égard, pour les unités de précontrainte les plus courantes (de force utile, toutes pertes faites, comprise entre 0,6 MN et 3 MN) logées dans des conduits de diamètre  $\varnothing$  compris entre 5 cm et 10 cm, on admet :

- des groupements en paquets de deux dans le sens vertical ;
- des distances libres entre paquets ou conduits isolés au moins égales à  $\varnothing$  tant verticalement qu'horizontalement ;
- des enrobages au moins égaux à  $\varnothing$ .

La figure 39 donne, pour quelques configurations, des valeurs de  $d$  et  $d'$ .

## 5.4 Contraintes normales du béton

### 5.4.1 Expression générale

À l'ordonnée  $y$  s'exerce la contrainte normale :

$$\sigma(y) = \frac{P}{B} + (Pe_0 + M) \frac{y}{I} = \frac{P}{B} + Pe \frac{y}{I} = \frac{P}{B} \left( 1 + \frac{ey}{\rho_{vv'}} \right) \quad (42)$$

Au niveau de  $G$  ( $y = 0$ ), quel que soit le cas de charge appliqué, on a :

$$\sigma_G = \frac{P}{B}$$

Le fait que tout diagramme de contraintes  $(\sigma, \sigma')$  passe par  $\sigma_G = \frac{P}{B}$  s'exprime par :

$$\sigma_G = \frac{P}{B} = \frac{\sigma v' + \sigma' v}{h} \quad (43)$$

#### 5.4.2 Respect des contraintes limites

Compte tenu de l'expression (42) des contraintes, il s'exprime, dans une section droite, par les conditions suivantes :

— sur la fibre supérieure ( $y = +v$ ) :

$$\bar{\sigma}_1 \leq \frac{P}{B} \left( 1 + \frac{e}{\rho v'} \right) \leq \bar{\sigma}_2 \quad (44)$$

— sur la fibre inférieure ( $y = -v'$ ) :

$$\bar{\sigma}_2' \leq \frac{P}{B} \left( 1 - \frac{e}{\rho v} \right) \leq \bar{\sigma}_1' \quad (45)$$

Les relations (44) et (45) peuvent se mettre sous la forme :

$$-c' = -\rho v' \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}_1}{P} \right) \leq e \leq \rho v \left( \frac{B \bar{\sigma}_2}{P} - 1 \right) = +\gamma \quad (46)$$

$$-\gamma' = -\rho v \left( \frac{B \bar{\sigma}_1'}{P} - 1 \right) \leq e \leq \rho v' \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}_2'}{P} \right) = +c \quad (47)$$

Le segment  $[-c', +c]$  de Gy (figure 40) est le **noyau limite de traction** (car  $c$  et  $c'$  sont définis à partir des contraintes limites de traction  $\bar{\sigma}_2$  et  $\bar{\sigma}_1$ ).

De même, le segment  $[-\gamma', +\gamma]$  de Gy est le **noyau limite de compression**.

Les doubles inégalités (46) et (47) expriment que le centre de pression doit appartenir à l'intersection  $[-\Gamma', +\Gamma]$  de ces deux segments :

$$[-\Gamma', +\Gamma] = [-c', +c] \cap [-\gamma', +\gamma]$$

$[-\Gamma', +\Gamma]$  est dit **noyau limite au sens strict**.

Ces différents noyaux limites engendrent, lorsque la section décrit la poutre, des **fuseaux limites** de traction, de compression, au sens strict (intersection des deux précédents). En tout cas de charge, la ligne de pression doit demeurer à l'intérieur du fuseau limite au sens strict :

$$-\Gamma' \leq e \leq +\Gamma \quad (48)$$

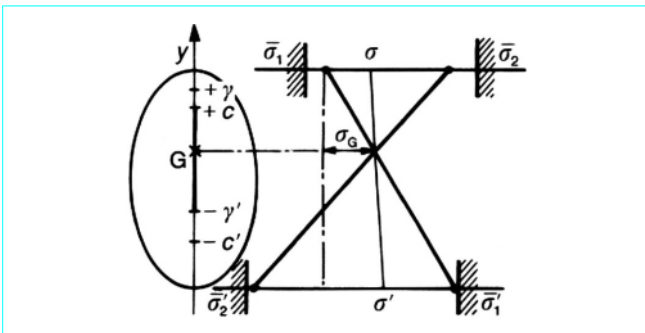


Figure 40 – Contraintes et noyaux limites

Dans une section donnée, l'excentricité du centre de pression vaut  $e = e_0 + M/P$ ,  $M$  étant susceptible de varier, selon le cas de charge, entre  $M_m$  et  $M_M$ . On doit donc avoir :

$$-\Gamma' \leq e_0 + \frac{M_m}{P} \leq e \leq e_0 + \frac{M_M}{P} \leq +\Gamma$$

soit

$$-\Gamma' - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq \Gamma - \frac{M_M}{P} \quad (49)$$

Le segment  $\left[ -\Gamma' - \frac{M_m}{P}, \Gamma - \frac{M_M}{P} \right]$  de Gy est le **noyau de passage**

au sens strict, intersection du noyau de passage de traction

$\left[ -c' - \frac{M_m}{P}, c - \frac{M_M}{P} \right]$  et du noyau de passage de compression

$\left[ -\gamma' - \frac{M_m}{P}, \gamma - \frac{M_M}{P} \right]$ .

Ces différents noyaux de passage définissent, pour l'ensemble de la poutre, des **fuseaux de passage** de traction, de compression, au sens strict.

L'équation (49) exprime que, pour que les contraintes limites soient respectées partout et sous tout cas de charge, il faut que le câble soit à l'intérieur du fuseau de passage au sens strict.

Dans la pratique, le concept de noyau (ou fuseau) au sens strict est lourd à manier. Au niveau du prédimensionnement, seule est facilement exploitable la notion de noyau (ou fuseau) de traction qui permet de définir la précontrainte  $P$  et son excentricité  $e_0$ . Le noyau (ou fuseau) de compression conditionne, pour sa part, les caractéristiques à donner aux sections droites ( $I/v$ ,  $I/v'$ ), mais pour effectuer leur dimensionnement, il est beaucoup plus simple d'écrire directement, dans les zones déterminantes, le respect des contraintes limites de compression  $\bar{\sigma}_2$  et  $\bar{\sigma}_1'$  (§ 5.6).

C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous ne conserverons que les notions de noyaux (ou fuseaux) de traction. Nous les désignons simplement par :

- noyau (ou fuseau) limite ;
- noyau (ou fuseau) de passage ;

sans préciser qu'ils sont de traction, puisqu'aucune ambiguïté n'est possible.

#### 5.5 Valeur minimale de la précontrainte dans une section

Nous supposons ici que la géométrie de la section est donnée et que ses modules d'inertie ( $I/v$  et  $I/v'$ ) sont suffisants, voire surabondants, de telle sorte qu'aucun problème ne se pose du côté des compressions.

Il s'agit simplement, dans ces conditions, de satisfaire à :

$$e_2 = c' - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq c - \frac{M_M}{P} = e_1 \quad (50)$$

Pour que la double inégalité (50) soit possible, il faut que  $e_2 \leq e_1$ , autrement dit, que le **fuseau de passage** soit **ouvert**, ce qui s'écrit encore :

$$P \geq \frac{M_M - M_m}{c + c'} = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (51)$$

La valeur minimale absolue possible pour  $P$  est donc :

$$P_I = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (52)$$

Si l'on adopte  $P = P_I$ , le fuseau de passage, au niveau de la section considérée, se referme en un point ( $e_1 = e_2$ ) par lequel doit passer obligatoirement le câble ( $e_0 = e_1 = e_2$ ). En d'autres termes, l'excentricité du câble est imposée :

$$e_0 = c - \frac{M_M}{P_I} = -c' - \frac{M_m}{P_I} \quad (53)$$

Il reste à vérifier qu'elle satisfait aux conditions pratiques définies par (41). C'est presque toujours le cas lorsque les moments extrêmes sont de signes contraires ( $M_M \geq 0, M_m \leq 0$ ).

La double expression de  $e_0$  donnée par (53) nous montre en effet qu'alors :

$$-c' \leq e_0 \leq c$$

Comme le plus souvent :  $c \leq v - d$ ;  $c' \leq v' - d'$ , la double inégalité (41) est bien respectée.

### 5.5.1 Section sous-critique

C'est une section où la solution  $P = P_I$  est possible du fait que l'excentricité  $e_0$  donnée par (53) satisfait à (41).

La double expression (53) de l'excentricité nous montre que (figure 41) :

- le centre de pression est à l'ordonnée  $+c$  lorsqu'on applique à la section le moment extérieur  $M_M$ , ce qui signifie que, sous cette sollicitation, la contrainte limite de traction  $\bar{\sigma}_2$  est atteinte sur la fibre inférieure ;
- le centre de pression se retrouve à l'ordonnée  $-c'$  sous l'effet de  $M_m$  (atteinte de la contrainte limite de traction  $\bar{\sigma}_1$  sur la fibre supérieure).

Dans une section sous-critique, on atteint donc les contraintes limites de traction sous les deux cas de charge extrêmes.

### 5.5.2 Section sur-critique

Lorsque l'excentricité associée à  $P_I$  ne respecte pas les conditions pratiques (41), la solution  $P = P_I$  est à rejeter, car elle conduirait à un câble mal enrobé.

La section est alors dite sur-critique.

Cette situation peut se rencontrer lorsque les moments extrêmes  $M_M$  et  $M_m$  ont tous deux le même signe.

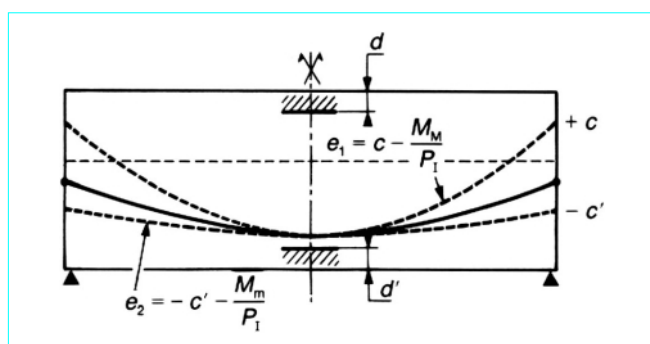


Figure 41 – Fuseau de passage dans le cas où la section la plus sollicitée est sous-critique

#### 5.5.2.1 Section sur-critique soumise à des moments extérieurs positifs ( $M_M$ et $M_m \geq 0$ )

Supposons les conditions (41) non satisfaites. L'expression :

$$e_0 = -c' - \frac{M_m}{P_I}$$

montre que  $e_0 < 0$  et que c'est donc la valeur plancher :  $-(v' - d')$  qui n'est pas respectée par  $e_0$ , ce qui s'écrit encore :

$$e_0 = c - \frac{M_M}{P_I} \leq -(v' - d')$$

ou

$$P_I \leq \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (54)$$

Le fuseau de passage sort de la zone autorisée vers le bas (figure 42).

Pour l'y faire remonter, il suffit d'augmenter  $P$ . Le fuseau s'ouvre ( $e_1 > e_2$  pour  $P > P_I$ ) et la valeur  $P_{II}$  à retenir est celle qui amène la ligne  $e_1$  à tangenter la ligne d'enrobage minimal, soit :

$$c - \frac{M_M}{P_{II}} = -(v' - d')$$

ou

$$P_{II} = \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (55)$$

La valeur associée de l'excentricité est :

$$e_0 = -(v' - d') \quad (56)$$

Dans la section considérée, on a :

$$e_2 = -c' - \frac{M_m}{P_{II}} < e_0 = c - \frac{M_M}{P_{II}}$$

Quand agit le moment extérieur  $M_M$ , le centre de pression remonte depuis le câble de la quantité  $M_M/P_{II}$  et se retrouve à l'ordonnée  $+c$  ; on atteint donc la contrainte limite de traction  $\bar{\sigma}_2$ .

Par contre, lorsqu'on applique  $M_m$ , l'ordonnée du centre de pression  $e_0 + M_m/P_{II}$  est supérieure à  $-c'$  et la contrainte  $\sigma_1$  qui apparaît sur la fibre supérieure est plus grande que  $\bar{\sigma}_1$  ( $\sigma_1 > \bar{\sigma}_1$ ).

Ainsi, dans une telle section sur-critique, on ne peut obtenir qu'une **contrainte limite de traction** : la contrainte limite de traction sur la fibre inférieure (fibre vers laquelle le câble est excentré).

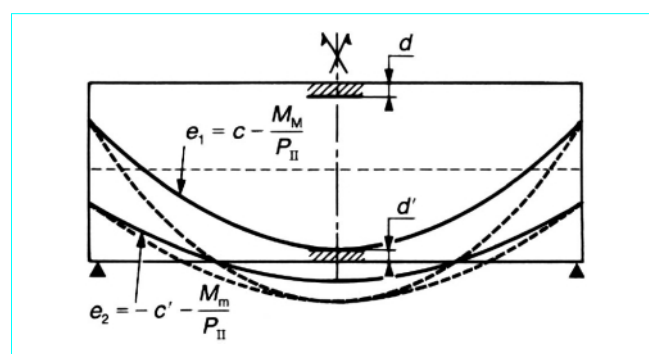


Figure 42 – Détermination de la précontrainte pour une section sur-critique soumise à des moments positifs



### 5.5.2.2 Section sur-critique soumise à des moments extérieurs négatifs ( $M_m$ et $M_M \leq 0$ )

Si cette fois-ci les conditions (41) ne sont pas satisfaites, c'est que le câble associé à  $P_I$  sort de la poutre vers le haut (figure 43). On a :

$$e_0 = -c' - \frac{M_m}{P_I} \geq v - d$$

$$\text{soit } P_I \leq \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (57)$$

On démontre, comme précédemment, qu'il faut augmenter  $P$  jusqu'à la valeur :

$$P_{II} \leq \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (58)$$

Le câble correspondant étant excentré au maximum vers le haut dans la section considérée :

$$e_0 = v - d \quad (59)$$

La seule contrainte limite de traction que l'on atteint, dans ce cas, est la contrainte  $\bar{\sigma}_1$  sur la fibre supérieure (fibre vers laquelle le câble est excentré) sous l'effet du moment extérieur  $M_m$ .

### 5.5.3 Caractère d'une section

Pour déterminer le caractère d'une section, autrement dit pour savoir si elle est sous-critique ou sur-critique, on peut opérer de deux façons différentes.

— On calcule  $P_I$  par l'équation (52) et l'excentricité associée  $e_0$  par (53).

Si cette excentricité satisfait aux conditions pratiques (41), c'est que la section est sous-critique et l'on prend  $P = P_I$ . Sinon, elle est sur-critique, et, selon le signe des moments, on adopte soit  $P = P_{II}$ , soit  $P = P_{II}'$ , le câble correspondant étant excentré au maximum vers le bas ou vers le haut.

— On calcule  $P_I$  puis, soit  $P_{II}$  soit  $P_{II}'$  selon le signe des moments extérieurs appliqués. Comme le montrent (54) et (55), d'une part, (57) et (58) d'autre part, la section est sous-critique si  $P_I$  est la plus grande de ces forces. Dans le cas contraire, elle est sur-critique.

### 5.5.4 Expressions développées de $P$

Les formules (52), (55) et (58) ne sont guère pratiques à utiliser du fait que leurs seconds membres contiennent implicitement  $P$  par l'intermédiaire de  $c$  et  $c'$ .

En effet, comme le montrent (46) et (47) :

$$\left. \begin{aligned} c &= \rho v \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}_2'}{P} \right) \\ c' &= \rho v' \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}_1}{P} \right) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Mais il est très facile, dans tous les cas, d'expliciter  $P$ .

#### 5.5.4.1 Section sous-critique

En remplaçant, dans (52),  $c$  et  $c'$  par leurs expressions (60) on obtient :

$$P = \frac{\Delta M}{c + c'} = \frac{\Delta M}{\rho h - \frac{\rho v B \bar{\sigma}_2'}{P} - \frac{\rho v' B \bar{\sigma}_1}{P}}$$

D'où l'on tire :

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{B(v \bar{\sigma}_2' + v' \bar{\sigma}_1)}{h}$$

ou encore, puisque  $B = \frac{I}{\rho v v'}$  :

$$P = \frac{\Delta M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}_2' + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h}$$

D'où les trois expressions équivalentes de la force sous-critique ( $P = P_I$ ) :

$$P = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (61)$$

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{B(v \bar{\sigma}_2' + v' \bar{\sigma}_1)}{h} \quad (62)$$

$$P = \frac{\Delta M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}_2' + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h} \quad (63)$$

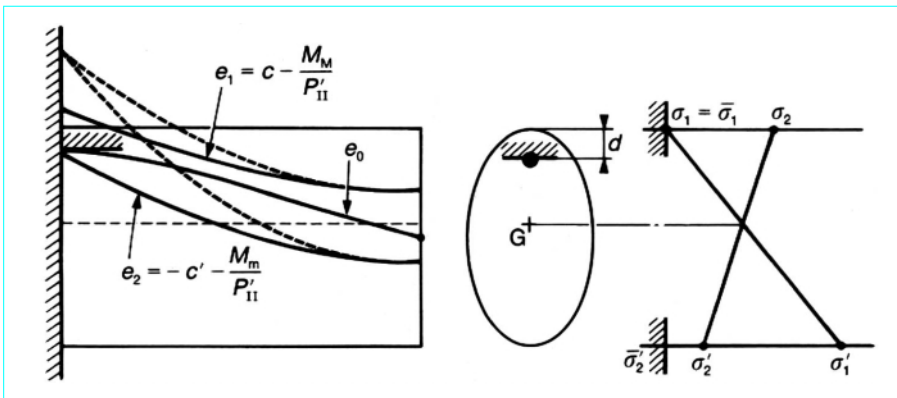


Figure 43 – Section sur-critique soumise à des moments négatifs.  
Contrainte limite de traction associée  $\bar{\sigma}_1$

### 5.5.4.2 Section sur-critique

En opérant comme précédemment, on obtient :

— pour une section sur-critique soumise à des moments positifs ( $P = P_{II}$ ) :

$$P = \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (64)$$

$$P = \frac{M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} \quad (65)$$

— pour une section sur-critique soumise à des moments négatifs ( $P = P'_{II}$ ) :

$$P = \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (66)$$

$$P = \frac{-M_m + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{v + \rho v' - d} \quad (67)$$

### 5.5.5 Cas particulier important ( $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}'_2 = 0$ )

Si l'on suppose  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}'_2 = 0$ , les formules (60) donnent :

$$c = \rho v$$

$$c' = \rho v'$$

Le noyau limite se réduit au **noyau central** (dit **tiers central** dans le cas d'une **section rectangulaire** puisque  $\rho$  vaut 1/3 pour une telle section).

Alors, dans l'hypothèse sous-critique,  $P$  vaut, d'après (61), (62) ou (63) :

$$P = P_I = \frac{\Delta M}{\rho h} \quad (68)$$

Si la section est sur-critique, on obtient :

$$P = P_{II} = \frac{M_M}{v' + \rho v' - d'} \quad (69)$$

si les moments sont positifs ;

$$P = P'_{II} = \frac{-M_m}{v + \rho v' - d} \quad (70)$$

si les moments sont négatifs.

Par comparaison avec les formules (62), (65) et (67), on peut apprécier les économies que l'on fait sur  $P$  lorsqu'on tolère des contraintes de traction dans le béton ( $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_2 < 0$ ).

### 5.5.6 Remarques diverses

#### 5.5.6.1 Tendance à la sur-criticité

On a vu (§ 5.5.3) que la condition de sur-criticité d'une section soumise à des moments positifs pouvait s'écrire :

$$P_{II} - P_I \geq 0$$

Explicitons donc cette quantité  $P_{II} - P_I$  à partir des expressions (63) et (65) :

$$\begin{aligned} P_{II} - P_I &= \frac{M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} - \frac{\Delta M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h} \\ &= \frac{M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} - \frac{\left(M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2\right) - \left(M_m - \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1\right)}{\rho h} \\ &= \frac{-\left(M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2\right)(v' - \rho v' - d') + \left(M_m - \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1\right)(v' + \rho v - d')}{(v' + \rho v - d') \rho h} \end{aligned}$$

En pratique :  $v' - \rho v' - d' \geq 0$  et  $v' + \rho v - d' \geq 0$ .  $P_{II} - P_I$  apparaît comme une fonction linéaire de  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_2$ , les coefficients affectant ces deux variables étant négatifs. Autrement dit,  $P_{II} - P_I$  est une fonction décroissante de  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_2$ . Plus ces contraintes limites  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_2$  sont négatives, plus il est probable que l'on ait  $P_{II} - P_I \geq 0$ .

En d'autres termes, **plus on admet des contraintes de traction importantes** (en valeur absolue), **plus on risque d'avoir affaire à des sections déterminantes sur-critiques**.

#### 5.5.6.2 Application des résultats précédents aux conditions réglementaires

Si l'on se reporte à la définition des classes données au paragraphe 1.4.5.1, on peut déduire de ce qui précède les conclusions suivantes concernant les sections déterminantes :

- déjà en classe I (peu utilisée), elles sont souvent sur-critiques ;
- en classe II, elles le sont très fréquemment ;
- et en classe III, pratiquement toujours.

Ainsi, la plupart du temps, les câbles doivent y être excentrés au maximum et la section d'enrobage englobe l'une des fibres extrêmes.

Par exemple, dans une section déterminante relevant de la classe III, en supposant que les moments extérieurs soient positifs, la condition de **non-décompression** de la section d'enrobage sous combinaisons quasi permanentes intéresse la fibre inférieure. C'est cette condition qui permet donc d'évaluer la valeur minimale de la précontrainte par application de la formule (69).

## 5.6 Section minimale de béton

On obtient la section minimale de béton lorsqu'on atteint les contraintes limites de compression  $\bar{\sigma}_2$  et  $\bar{\sigma}'_1$ .

Dans ce qui suit, on suppose que l'on s'astreint, de façon systématique, à adopter les valeurs minimales précédemment trouvées pour la précontrainte ( $P_I$ ,  $P_{II}$  ou  $P'_{II}$ ).

### 5.6.1 Cas d'une section sous-critique

On prend alors  $P = P_I$  et l'on atteint les deux contraintes limites de traction  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}'_2$ . Pour obtenir les deux contraintes limites de compression, il faut et il suffit que les variations de contrainte sur

la fibre supérieure ( $\Delta\sigma = \Delta M \frac{v}{I}$ ) et sur la fibre inférieure ( $\Delta\sigma' = \Delta M \frac{v'}{I}$ ), quand on passe de l'un des moments extrêmes à l'autre, soient respectivement égales à (figure 44) :

$$\Delta\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 \quad \text{et à} \quad \Delta\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}_1' - \bar{\sigma}_2'$$

$$\text{D'où} \quad \Delta M \frac{v}{I} = \Delta\bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \Delta M \frac{v'}{I} = \Delta\bar{\sigma}'$$

et :

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}} \quad (71)$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}'} \quad (72)$$

### 5.6.2 Cas d'une section sur-critique soumise à des moments positifs

On prend  $P = P_{II}$  et l'on atteint  $\bar{\sigma}_2'$  (mais pas  $\bar{\sigma}_1$ , comme on l'a vu au paragraphe 5.5.2.1).

Pour obtenir  $\bar{\sigma}_1'$  en fibre inférieure (figure 45), il faut et il suffit que l'on ait  $\Delta\sigma' = \Delta M \frac{v'}{I} = \Delta\bar{\sigma}'$ , soit, comme dans le cas sous-critique :

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}'} \quad [\text{équation (72)}]$$

Par contre, du fait que  $\sigma_1 > \bar{\sigma}_1$ , la relation (71) n'est pas suffisante pour la membrure supérieure.

Pour qu'on atteigne  $\bar{\sigma}_2$  en fibre supérieure sous l'effet de  $M_M$ , il faut et il suffit que  $\bar{\sigma}_2$  soit aligné avec  $\bar{\sigma}_2'$  et  $\sigma_G = P/B$ , ce qui s'écrit [équation (43)] :

$$\frac{P}{B} = \frac{v'\bar{\sigma}_2 + v\bar{\sigma}_2'}{h} \quad (73)$$

Si l'on veut faire apparaître le module d'inertie  $I/v$ , on peut remplacer, dans cette expression,  $B$  par  $\frac{I}{\rho v v'}$ , soit :

$$\frac{P \rho v v'}{I} = \frac{v'\bar{\sigma}_2 + v\bar{\sigma}_2'}{h}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{I}{v} = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}_2 + \frac{v}{v'} \bar{\sigma}_2'} \quad (74)$$

Cette condition est, évidemment, strictement équivalente à la condition (74).

### 5.6.3 Cas d'une section sur-critique soumise à des moments négatifs

Elle est représentée sur la figure 46. On verrait, de la même façon, que les conditions nécessaires et suffisantes pour atteindre les deux contraintes limites de compression  $\bar{\sigma}_2$  et  $\bar{\sigma}_1'$  s'écrivent :

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta\bar{\sigma}} \quad [\text{équation (71)}]$$

et :

$$\frac{P}{B} = \frac{v\bar{\sigma}_1' + v'\bar{\sigma}_1}{h} \quad (75)$$

ou :

$$\frac{I}{v'} = \frac{\rho P h}{\bar{\sigma}_1' + \frac{v'}{v} \bar{\sigma}_1} \quad (76)$$

### 5.6.4 Remarque

D'après ce qui précède, on peut atteindre :

- les quatre contraintes limites dans une section sous-critique ;
- trois contraintes limites seulement dans une section sur-critique.

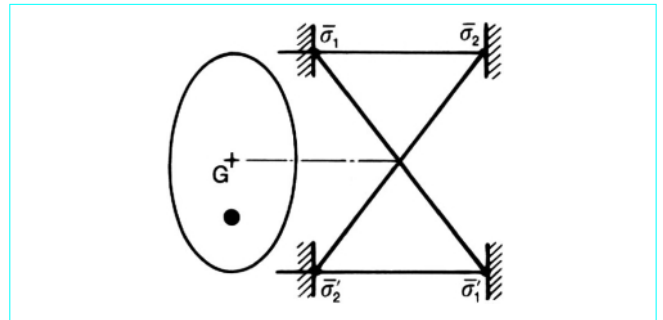


Figure 44 – Possibilité d'atteindre les 4 contraintes limites dans le cas d'une section sous-critique

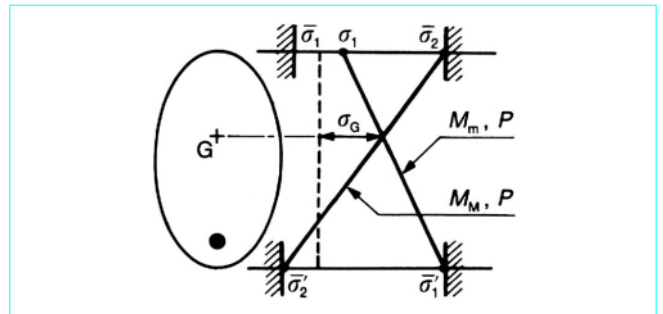


Figure 45 – Possibilité d'atteindre 3 contraintes limites dans le cas d'une section sur-critique ( $M > 0$ )

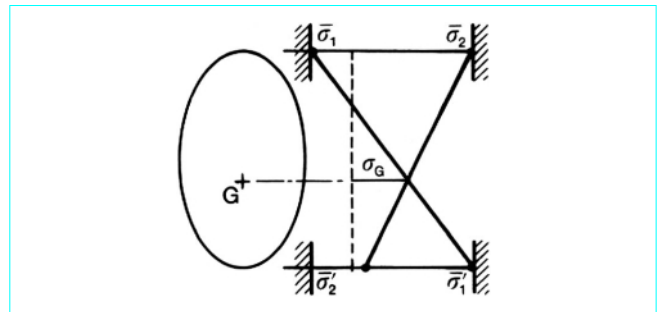


Figure 46 – Cas d'une section sur-critique avec  $M < 0$

Mais l'atteinte des contraintes limites de compression n'est nullement obligatoire. En fait, il arrive très souvent, dans la pratique, qu'une des membrures au moins de la poutre soit surabondante.

C'est presque toujours le cas pour les tabliers de ponts routiers : la membrure supérieure joue également le rôle de dalle et doit, à cet égard, résister aux sollicitations locales transversales qu'y développent les charges roulantes. C'est cette fonction qui, la plupart du temps, conditionne ses dimensions et la rend surabondante vis-à-vis de la flexion générale.

L'essentiel, en fait, est que les modules d'inertie soient supérieurs ou égaux aux valeurs minimales données par les formules (71) à (76).

S'ils sont strictement supérieurs à ces valeurs minimales, on demeure au-dessous des contraintes limites de compression, ce qui n'altère en rien le caractère sous-critique ou sur-critique des sections droites, ces qualificatifs impliquant simplement l'atteinte des deux contraintes limites de traction dans le premier cas et d'une seule contrainte limite de traction dans le second.

## 5.7 Récapitulation

Pour effectuer complètement le dimensionnement d'une section (coffrage et précontrainte), dans la mesure où l'on dispose d'au moins un degré de liberté géométrique pour chacune des membrures, et où l'on souhaite atteindre les limites de compression, on peut écrire quatre équations.

### 5.7.1 Hypothèse d'une section sous-critique

$$P = \frac{\Delta M + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1 + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{\rho h} \quad (77)$$

$$e_0 = \rho v \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}'_2}{P} \right) - \frac{M_M}{P} = -\rho v' \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}_1}{P} \right) - \frac{M_m}{P} \quad (78)$$

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma} \quad (79)$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma'} \quad (80)$$

(79) et (80) sont des équations de coffrage (elles ne font pas intervenir la précontrainte) qui permettent de fixer la géométrie de la section. Cela fait, (77) donne la valeur de la précontrainte et (78) celle de son excentricité.

### 5.7.2 Hypothèse d'une section sur-critique

En se limitant au cas d'une section soumise à des moments positifs, les équations sont :

$$P = \frac{M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} \quad (81)$$

$$e_0 = -(v' - d') \quad (82)$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma'} \quad (83)$$

$$\frac{M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} = \frac{B(v' \bar{\sigma}_2 + v \bar{\sigma}'_2)}{h} \quad (84)$$

Comme dans le cas précédent, (83) et (84) définissent le coffrage ; (81) donne  $P$ , (82) l'excentricité  $e_0$ .

## 5.8 Cas où plusieurs valeurs de $P$ interviennent dans le dimensionnement

Il arrive que plusieurs valeurs de la précontrainte (en général deux) interviennent dans le dimensionnement d'une section.

Cette circonstance se présente lorsque :

- les cas de charge déterminants sont appliqués dans deux situations distinctes se caractérisant par des valeurs différentes de la force de précontrainte (évolution de la tension des câbles entre situation d'exécution et situation d'exploitation notamment ; § 5.9) ;
- la réglementation impose de prendre en compte deux valeurs caractéristiques pour la précontrainte (règlement BPEL 83, sauf prescription contraire du marché).

Les formules précédemment établies ne s'appliquent plus telles quelles, puisqu'elles supposent une valeur unique de la précontrainte sous les cas de charges extrêmes.

Mais il est très facile de les généraliser, à partir de la remarque suivante.

Supposons que, dans une section, sous l'effet d'un moment fléchissant extérieur  $M$  et de la précontrainte  $P$  (excentrée de  $e_0$ ), on ait un diagramme de contraintes  $\sigma, \sigma'$  (figure 47) ; dans cette même section, sous l'effet du moment  $\theta M$  et de la précontrainte  $\theta P$  (toujours excentrée de  $e_0$ ), on observera le diagramme de contraintes  $\theta \sigma, \theta \sigma'$  ( $\theta$  désignant un scalaire quelconque).

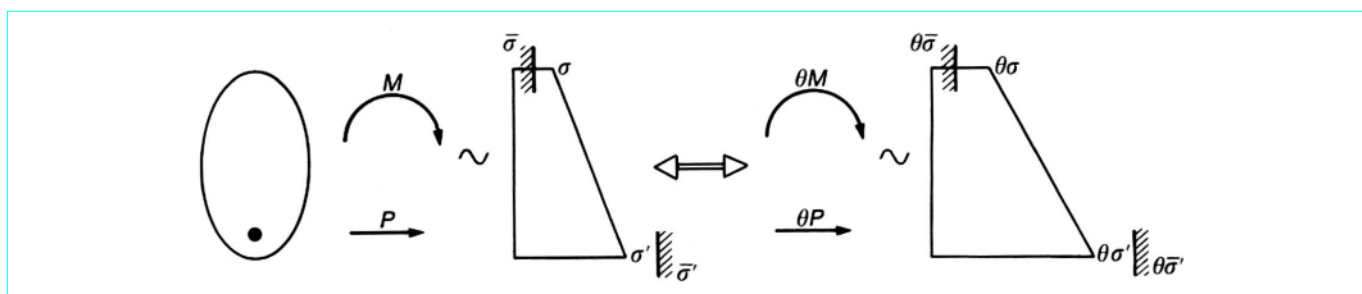


Figure 47 – Invariance des conditions de dimensionnement dans une multiplication scalaire

Respecter des contraintes limites  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\sigma}'$  sous l'effet de  $M$  et  $P$  est ainsi équivalent à respecter les contraintes limites  $\theta\bar{\sigma}$  et  $\theta\bar{\sigma}'$  sous l'effet de  $\theta M$  et  $\theta P$ .

Si, donc, les conditions de dimensionnement d'une section sont celles du tableau 7, on peut les remplacer par des conditions équivalentes (tableau 8) en multipliant la première ligne du tableau 7 par  $\theta_1 = 1/\alpha_1$  et la deuxième ligne par  $\theta_2 = 1/\alpha_2$ .

Tableau 7 – Conditions de dimensionnement d'une section			
Moments	Précontrainte	Contraintes limites	
$M_m$	$\alpha_1 P$	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}'_1$
$M_M$	$\alpha_2 P$	$\bar{\sigma}_2$	$\bar{\sigma}'_2$

Par la considération des moments fictifs ( $M_{mf}$ ,  $M_{Mf}$ ) et des contraintes limites fictives ( $\bar{\sigma}_{1f}$ ,  $\bar{\sigma}'_{1f}$ ,  $\bar{\sigma}_{2f}$ ,  $\bar{\sigma}'_{2f}$ ) définis dans le tableau 8 et connus quand le sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (pour lesquels on dispose toujours, dans la pratique, d'une estimation raisonnable dès le départ), on est ainsi ramené au cas précédemment étudié d'une force unique de précontrainte.

Tableau 8 – Conditions équivalentes de dimensionnement d'une section			
Moments	Précontrainte	Contraintes limites	
$M_{mf} = \frac{M_m}{\alpha_1}$	$P$	$\bar{\sigma}_{1f} = \frac{\bar{\sigma}_1}{\alpha_1}$	$\bar{\sigma}'_{1f} = \frac{\bar{\sigma}'_1}{\alpha_1}$
$M_{Mf} = \frac{M_M}{\alpha_2}$	$P$	$\bar{\sigma}_{2f} = \frac{\bar{\sigma}_2}{\alpha_2}$	$\bar{\sigma}'_{2f} = \frac{\bar{\sigma}'_2}{\alpha_2}$

Les formules (77), (78), (79), (80) ou (81), (82), (83), (84) s'appliquent donc à condition d'y substituer aux contraintes et moments réels leurs homologues fictifs.

5.9 Exemple de dimensionnement

Proposons-nous de dimensionner une travée indépendante de 28 m de portée livrant passage à une chaussée de 7 m encadrée par deux trottoirs de 1,50 m.

Le tablier, coulé en place, est supposé *a priori* constitué de deux nervures coiffées par une dalle de 0,22 m d'épaisseur moyenne et de 10,20 m de largeur (figure 48). Sa hauteur totale est limitée à 1,80 m, ce qui correspond à un élanement de 1/15,6.

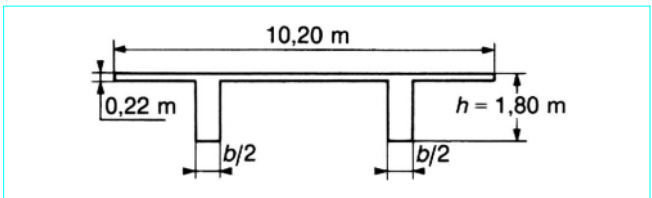


Figure 48 – Section transversale schématique

Il s'agit de déterminer  $b$ ,  $P$  et  $e_0$  de façon à respecter les conditions réglementaires du BPEL 83 (§ 1.4.5.1), étant précisé que :

- la précontrainte n'est prise en compte que par sa seule valeur probable  $P_m$  ;
- la résistance caractéristique du béton vaut :  $f_{c28} = 30$  MPa (et sa résistance à la traction  $f_{t28} = 0,6 + 0,06 f_{c28} = 2,4$  MPa) ;
- la mise en tension de l'ensemble des câbles est effectuée lorsque le tablier atteint un âge  $j$  tel que  $f_{cj} = 24$  MPa (on peut admettre  $j \approx 14$  j).

5.9.1 Actions et sollicitations

L'ouvrage est soumis à :

- son poids propre :  $g = 2,5 \times 10^{-2} B$  ;
- une charge de superstructures :  $g' = 4 \times 10^{-2}$  MN/m ;
- la charge routière d'exploitation (chaussée + trottoir) de valeur caractéristique :  $q_k = 10 \times 10^{-2}$  MN/m.

Dans la section médiane, la plus sollicitée à la flexion, les moments extrêmes à considérer en situation d'exploitation sont donc (en MN · m) :

- sous combinaisons rares :

$$\begin{aligned} M_{Mr} &= M_g + M'_g + M_{qk} = (g + g' + q_k) \frac{\ell^2}{8} \\ &= (2,5 \times 10^{-2} B + 4 \times 10^{-2} + 10 \times 10^{-2}) \times \frac{28^2}{8} \\ &= 2,45 B + 13,72 \end{aligned}$$

$$M_{mr} = M_g + M'_g = 2,45 B + 3,92$$

- sous combinaisons fréquentes :

$$\begin{aligned} M_{Mf} &= M_g + M'_g + 0,6 M_{qk} = 2,45 B + 9,8 \\ M_{mf} &= M_g + M'_g = 2,45 B + 3,92 \end{aligned}$$

- sous combinaisons quasi permanentes :

$$M_{Mqp} = M_{mqp} = M_g + M'_g = 2,45 B + 3,92$$

5.9.2 Caractéristiques géométriques de la section

Si l'on désigne par  $S'_0$  le moment statique de la section par rapport à l'axe horizontal  $OO'$  passant par sa fibre inférieure (figure 49), et par  $J'_0$  son moment d'inertie par rapport à ce même axe, on peut dresser le tableau suivant :

Secteur	$B$ (m <sup>2</sup> )	$S'_0$ (m <sup>3</sup> )	$J'_0$ (m <sup>4</sup> )
①	2,244 0	3,792 4	6,418 1
②	1,580 0 $b$	1,248 2 $b$	1,314 8 $b$

D'où

$$v' = \frac{S'_0}{B} = \frac{1,248\ 2\ b + 3,792\ 4}{1,580\ 0\ b + 2,244\ 0} \tag{85}$$

$$I = J'_0 - Bv'^2 = J'_0 - \frac{S_0'^2}{B} = \frac{0,519\ 3\ b^2 + 3,623\ 8\ b + 0,020\ 3}{1,580\ 0\ b + 2,244\ 0} \tag{86}$$

À partir de ces éléments, on peut avoir un aperçu rapide des caractéristiques de la section pour quelques valeurs de  $b$  (tableau 9).



Tableau 9 – Caractéristiques de la section en fonction de  $b$ 

$b$ (m)	$B$ (m <sup>2</sup> )	$v$ (m)	$v'$ (m)	$I$ (m <sup>4</sup> )	$\frac{I}{v}$ (m <sup>3</sup> )	$\frac{I}{v'}$ (m <sup>3</sup> )	$\rho = \frac{I}{Bvv'}$
0,50	3,034 0	0,344 3	1,455 7	0,646 7	1,878 0	0,444 3	0,425 2
0,75	3,429 0	0,421 0	1,379 0	0,883 7	2,099 0	0,640 8	0,443 9
1,00	3,824 0	0,481 9	1,318 1	1,088 8	2,259 5	0,826 0	0,448 3
1,25	4,219 0	0,531 3	1,268 7	1,270 8	2,391 8	1,001 7	0,446 9

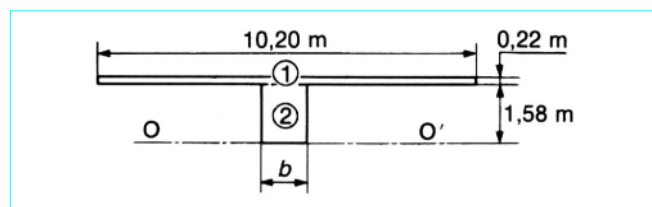


Figure 49 – Section équivalente et décomposition en secteurs

### 5.9.3 Dimensionnement en classe II

Nous admettons *a priori* (et nous le vérifierons par la suite) que les combinaisons fréquentes ne sont pas déterminantes.

#### 5.9.3.1 Conditions en situation d'exploitation seule

Les contraintes limites de compression sont :

- $\bar{\sigma}_2$  qui intervient vis-à-vis de  $M_{Mr}$  :

$$\bar{\sigma}_2 = 0,54 f_{c28} = 16,2 \text{ MPa}$$

- $\bar{\sigma}'_1$  qui intervient vis-à-vis de  $M_{mr} = M_{mqp}$  et vaut donc :

$$\bar{\sigma}'_1 = 0,45 f_{c28} = 13,5 \text{ MPa}$$

#### ■ Caractère de la section

Nous allons supposer, dans un premier temps, la section sous-critique, dimensionner le coffrage dans cette hypothèse, puis calculer les forces  $P_I$  et  $P_{II}$  correspondantes (§ 5.5.3).

Si la section est sous-critique (câble « largement » à l'intérieur du béton), les contraintes limites de traction sur les fibres extrêmes (hors de la section d'enrobage) sont :

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}'_2 = 1,5 f_{t28} = -3,6 \text{ MPa}$$

D'après les équations (79) et (80), la section minimale de béton correspond à :

$$\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma} = \frac{M_{Mr} - M_{mr}}{\Delta \sigma} = \frac{9,80}{16,2 + 3,6} = 0,494 9 \text{ m}^3$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma'} = \frac{M_{Mr} - M_{mr}}{\Delta \sigma'} = \frac{9,80}{13,5 + 3,6} = 0,573 1 \text{ m}^3$$

Le tableau 9 nous montre que, même pour  $b = 0,50$  m (c'est un minimum au-dessous duquel il n'est pas envisageable de descendre pour des raisons pratiques),  $I/v$  est largement supérieur à  $0,494 9 \text{ m}^3$ . La membrure supérieure donnée est donc très surabondante.

Pour ce qui est de la membrure inférieure, ce même tableau nous montre que l'on doit avoir :

$$0,50 \text{ m} < b < 0,75 \text{ m}$$

De façon plus précise, compte tenu des équations (85) et (86),  $b$  est défini par :

$$\frac{0,519 3 b^2 + 3,623 8 b + 0,020 3}{1,248 2 b + 3,792 4} = 0,573 1$$

$$\text{soit} \quad 0,519 3 b^2 + 2,908 4 b - 2,153 1 = 0$$

D'où :  $b = 0,662 0$  m, valeur que nous arrondissons à  $b = 0,70$  m.

Pour  $b = 0,70$  m, les caractéristiques de la section sont les suivantes :

$$B = 3,350 \text{ m}^2$$

$$v = 0,407 1 \text{ m} \quad \text{et} \quad v' = 1,392 9 \text{ m}$$

$$I = 0,839 2 \text{ m}^4$$

$$\frac{I}{v} = 2,061 3 \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad \frac{I}{v'} = 0,602 5 \text{ m}^3$$

$$\rho = 0,441 8$$

Par suite :

$$P_I = \frac{\Delta M + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1 + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{\rho h} = \frac{9,80 - 2,061 3 \times 3,6 - 0,602 5 \times 3,6}{0,441 8 \times 1,80} = 0,26 \text{ MN}$$

$$P_{II} = \frac{M_{Mr} + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} = \frac{2,45 \times 3,350 + 13,72 - 0,602 5 \times 3,6}{1,392 9 + 0,441 8 \times 0,407 1 - 0,16} = 13,99 \text{ MN}$$

(en supposant  $d' = 0,16$  m).

Comme  $P_{II} > P_I$ , la section est nettement sur-critique (à moments positifs), et il convient de reprendre son dimensionnement.

#### ■ Dimensionnement dans l'hypothèse sur-critique

Les câbles devant être excentrés au maximum vers le bas (figure 50), la section d'enrobage englobe la fibre inférieure et les contraintes limites de traction sur les fibres extrêmes deviennent :

$$\bar{\sigma}_1 = -1,5 f_{t28} = -3,6 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}'_2 = -f_{t28} = -2,4 \text{ MPa}$$

Pour cette section, les équations déterminantes (compte tenu de la surabondance de la membrure supérieure) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{M_{Mr} + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}_2'}{v' + \rho v - d'} \quad (81) \\ e_0 = -(v' - d') \quad (82) \\ \frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}'} \quad (83) \end{array} \right.$$

L'équation (83) nous donne immédiatement le coffrage, c'est-à-dire  $b$ . Elle s'écrit en effet :

$$\frac{I}{v'} = \frac{9,80}{13,5 + 2,4} = 0,616 \text{ m}^3$$

soit, compte tenu de (85) et (86) :

$$\frac{0,519 \text{ 3 } b^2 + 3,623 \text{ 8 } b + 0,020 \text{ 3}}{1,248 \text{ 2 } b + 3,792 \text{ 4}} = 0,616 \text{ 4}$$

ou  $0,519 \text{ 3 } b^2 + 2,854 \text{ 4 } b - 2,317 \text{ 1} = 0$

D'où :  $b = 0,718 \text{ 0 m}$  que nous arrondissons à  $b = 0,75 \text{ m}$ .

Les caractéristiques géométriques de la section avec  $b = 0,75 \text{ m}$  figurent déjà dans le tableau 9.

Si l'on admet  $d' = 0,16 \text{ m}$ , l'équation (81) permet de calculer  $P$  :

$$P = \frac{2,45 \times 3,429 + 13,72 - 0,640 \text{ 8} \times 2,4}{1,379 \text{ 0} + 0,443 \text{ 9} \times 0,421 \text{ 0} - 0,16} = 14,64 \text{ MN}$$

force que l'on peut espérer réaliser à l'aide de 8 câbles 12T15 (si l'on table sur une force probable de 0,16 MN par toron, comme dans l'exemple du paragraphe 4.6, les 8 câbles en question donnent :  $P_m = 8 \times 12 \times 0,16 = 15,36 \text{ MN}$ ).

Enfin, d'après l'équation (82) :

$$e_0 = -(v' - d') = -(1,379 \text{ 0} - 0,16) = -1,219 \text{ 0 m}$$

En réalité, la surabondance de la force de précontrainte des 8 câbles ( $P_m = 15,36 \text{ MN}$  contre 14,64 MN) permet de remonter leur excentricité jusqu'à :

$$\begin{aligned} e_1 &= c - \frac{M_{Mr}}{P} = \rho v \left( 1 - \frac{B \bar{\sigma}_2'}{P} \right) - \frac{M_{Mr}}{P} \\ &= 0,443 \text{ 9} \times 0,421 \text{ 0} \left( 1 + \frac{3,429 \times 2,4}{15,36} \right) - \frac{22,12}{15,36} = -1,153 \text{ 1 m} \end{aligned}$$

tout en respectant la contrainte limite de traction  $\bar{\sigma}_2'$  sur la fibre inférieure. Une telle remontée est même certainement utile pour éviter un dépassement de  $\bar{\sigma}_1'$  sous l'effet de  $M_{mr} = M_{mqp}$ .

Plaçons donc les câbles, non pas à 16 cm, mais à 21 cm de la fibre inférieure, ce qui correspond à :

$$e_0 = -(1,379 \text{ 0} - 0,21) = -1,169 \text{ 0 m}$$

#### ■ Vérification des contraintes

En situation d'exploitation, elles s'établissent selon la figure 51 (avec  $P = 15,36 \text{ MN}$  et  $e_0 = -1,169 \text{ 0 m}$ , les calculs étant effectués sur la section brute).

Ces contraintes sont satisfaisantes et pratiquement limites en fibre inférieure tant sous combinaisons quasi permanentes (13,27 MPa  $\approx$  13,5 MPa) que sous le cas de charge donnant  $M_{Mr}$  en combinaisons rares (-2,02 MPa  $\approx$  -2,4 MPa). On vérifie par ailleurs que, comme on l'avait supposé au départ, les combinaisons fréquentes ne sont pas déterminantes (4,09 MPa  $\gg$  0).

Il convient maintenant de s'assurer qu'en situation d'exécution les conditions réglementaires sont bien satisfaites, autrement dit que :

$$-1,5 f_{tj} \leq \sigma_c \leq 0,54 f_{cj} \text{ sur la fibre supérieure}$$

$$-f_{tj} \leq \sigma'_c \leq 0,54 f_{cj} \text{ sur la fibre inférieure}$$

Calculons en particulier les contraintes juste après mise en tension de l'ensemble des câbles et décentrement de l'ouvrage, en admettant qu'alors la précontrainte vaut  $P_c = 1,15 P$  en valeur probable (§ 4.6.5 pour les ordres de grandeur), que  $f_{cj} = 24 \text{ MPa}$  et donc que  $f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj} = 2,04 \text{ MPa}$ . Comme les superstructures ne sont pas encore posées, on a les valeurs données sur la figure 52.

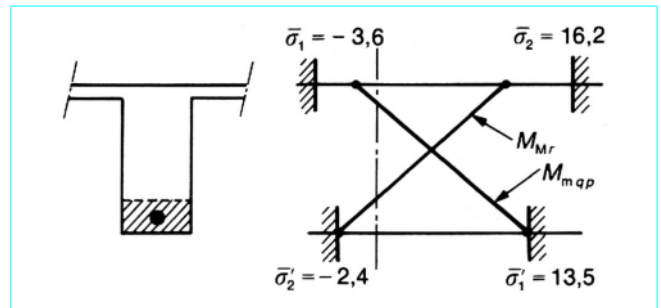


Figure 50 - Contraintes limites dans la section (en MPa)

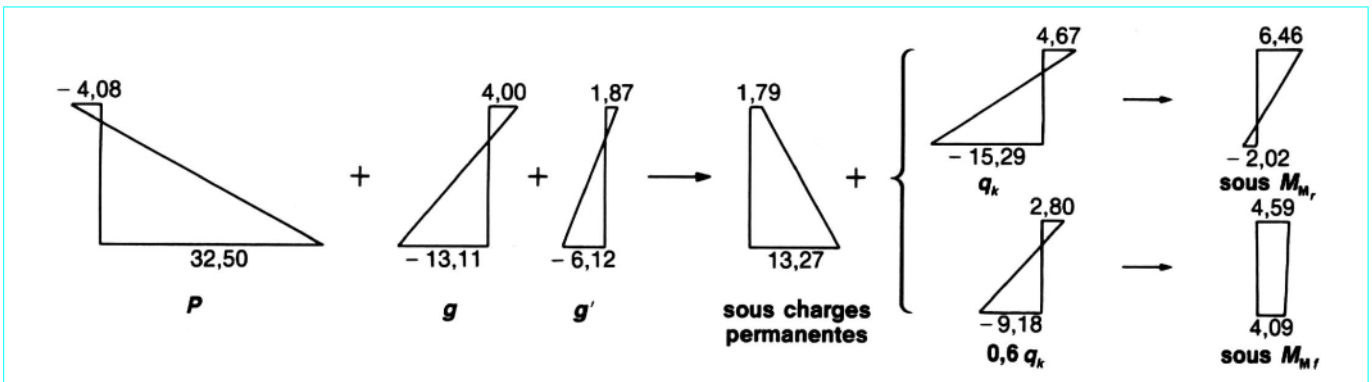


Figure 51 - Contraintes en section médiane (en MPa)

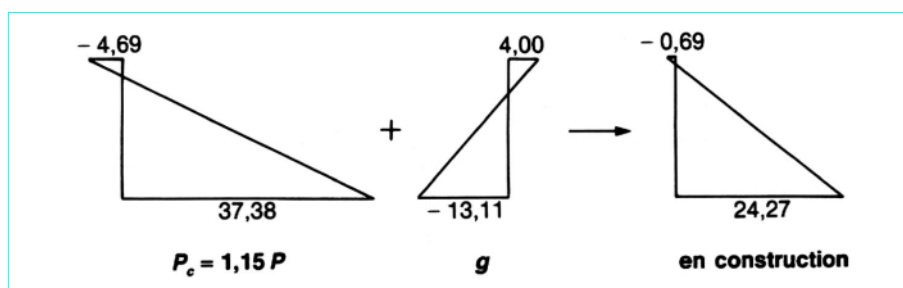


Figure 52 – Contraintes en construction (en MPa)

On dépasse largement la contrainte limite de compression en fibre inférieure :  $0,54 f_{cj} = 12,96 \text{ MPa}$ .

Cela montre que la membrure inférieure est sous-dimensionnée et qu'il faut augmenter  $b$  pour ne pas avoir trop de compression en construction.

La situation d'exécution est ainsi déterminante pour le choix de  $b$ .

### 5.9.3.2 Reprise du dimensionnement compte tenu des conditions d'exécution

Des calculs précédents, il ressort que les conditions à prendre en compte sont en réalité celles du tableau 10.

Tableau 10 – Conditions de dimensionnement de la section compte tenu des conditions d'exécution

Moments	Précontrainte	Contraintes limites
$M_{Mr}$	$P$	$\bar{\sigma}_2 = 16,2 \text{ MPa} ; \bar{\sigma}'_2 = 2,4 \text{ MPa}$
$M_c$	$1,15 P$	$\begin{cases} \bar{\sigma}_{1c} = -3,06 \text{ MPa} \\ \bar{\sigma}'_{1c} = 12,96 \text{ MPa} \end{cases}$

Compte tenu de ce que nous avons dit au paragraphe 5.8, elles sont équivalentes à celles du tableau 11, avec :

$$M_c = M_g = 2,45 B$$

et donc :

$$M_{cf} = \frac{M_c}{1,15} = 2,13 B$$

Tableau 11 – Conditions de dimensionnement équivalentes de la section

Moments	Précontrainte	Contraintes limites
$M_{Mr}$	$P$	$\begin{cases} \bar{\sigma}_2 = 16,2 \text{ MPa} \\ \bar{\sigma}'_2 = -2,4 \text{ MPa} \end{cases}$
$M_{cf} = \frac{M_c}{1,15}$	$P$	$\begin{cases} \bar{\sigma}_{1cf} = \frac{\bar{\sigma}_{1c}}{1,15} = -2,66 \text{ MPa} \\ \bar{\sigma}'_{1cf} = \frac{\bar{\sigma}'_{1c}}{1,15} = 11,27 \text{ MPa} \end{cases}$

Des équations (81), (82) et (83), seule (83) est modifiée. Elle s'écrit :

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M_f}{\Delta \bar{\sigma}'_f} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_f &= M_{Mr} - M_{cf} \\ &= 2,45 B + 13,72 - 2,13 B = 0,32 B + 13,72 \end{aligned}$$

$$\Delta \bar{\sigma}'_f = \bar{\sigma}'_{1cf} - \bar{\sigma}'_2 = 11,27 + 2,4 = 13,67 \text{ MPa}$$

(87) devient ainsi :

$$\frac{I}{v'} = \frac{0,32 B + 13,72}{13,67} = 0,0234 B + 1,0037 \quad (88)$$

soit, compte tenu des équations (85) et (86) :

$$\begin{aligned} \frac{0,5193 b^2 + 3,6238 b + 0,0203}{1,2482 b + 3,7924} &= 0,0234 (1,5800 b + 2,2440) + 1,0037 \\ &= 0,0234 (1,5800 b + 2,2440) + 1,0037 \end{aligned}$$

$$D'où \quad 0,4732 b^2 + 2,1652 b - 3,9852 = 0$$

et :  $b = 1,4076 \text{ m}$  que nous arrondissons supérieurement à :

$$b = 1,45 \text{ m}$$

Pour  $b = 1,45 \text{ m}$ , les caractéristiques géométriques de la section sont les suivantes :

$$B = 4,5350 \text{ m}^2$$

$$v = 0,5647 \text{ m} \text{ et } v' = 1,2353 \text{ m}$$

$$I = 1,4039 \text{ m}^4$$

$$\frac{I}{v} = 2,4862 \text{ m}^3 \text{ et } \frac{I}{v'} = 1,1364 \text{ m}^3$$

$$\rho = 0,4438$$

Avec  $d' = 0,16 \text{ m}$  et  $M_{Mr} = 2,45 \times 4,535 + 13,72 = 24,83 \text{ MN}$ , l'équation (81) donne :

$$P = \frac{M_{Mr} + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} = \frac{24,83 - 1,1364 \times 2,4}{1,2353 + 0,4438 \times 0,5647 - 0,16} = 16,67 \text{ MN}$$

Cette force peut être réalisée à l'aide de 16 câbles 7 T 15 (15 suffiraient mais il en faut un nombre pair). En supposant que ces câbles fournissent :

$$P = 16 \times 7 \times 0,16 = 17,92 \text{ MN}$$

nous les placerons comme précédemment, non pas à  $e_0 = -(v' - d') = -1,0753 \text{ m}$ , mais à une excentricité comprise entre  $-1,0753 \text{ m}$  et :

$$\begin{aligned} e_1 &= c - \frac{M_{Mr}}{P} \\ &= 0,4438 \times 0,5647 \left( 1 + \frac{4,535 \times 2,4}{17,92} \right) - \frac{24,83}{17,92} = 0,9828 \text{ m} \end{aligned}$$

pour éviter, compte tenu de la surabondance de  $P$ , un excès de compression en fibre inférieure (à la construction).

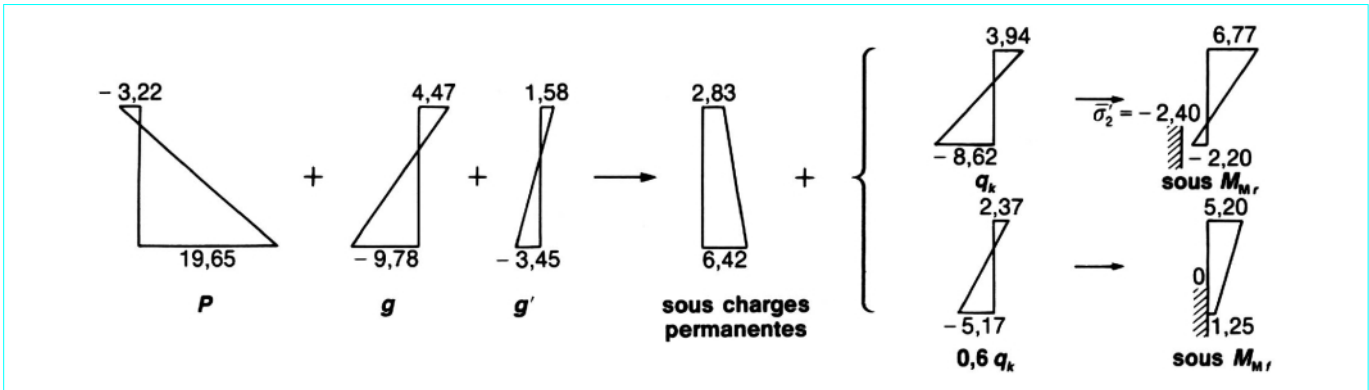


Figure 53 – Contraintes en situation d’exploitation (en MPa)

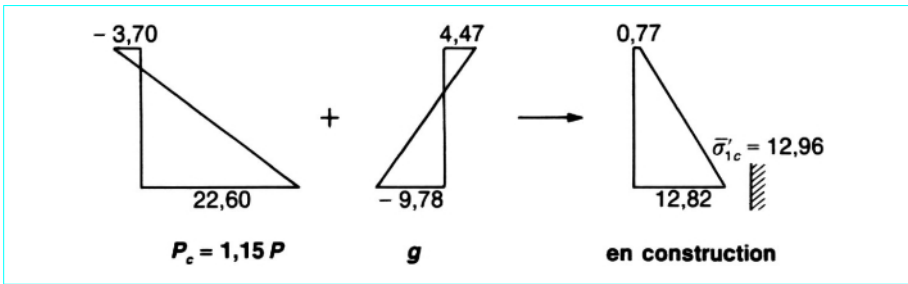


Figure 54 – Contraintes en situation d’exécution (en MPa)

Nous les disposerons, en définitive, de telle façon que leur barycentre soit à 0,24 m de la fibre inférieure, ce qui correspond à :

$$e_0 = -0,995 \text{ m}$$

Les contraintes calculées en section brute (avec  $P = 17,92 \text{ MN}$  et  $e_0 = -0,995 \text{ m}$ ) sont alors celles indiquées sur les figures 53 et 54.

La section est ainsi parfaitement dimensionnée puisqu’on y atteint pratiquement les deux contraintes limites en fibre inférieure ( $\sigma'_2 = -2,40 \text{ MPa}$  et  $\sigma'_{1c} = 12,96 \text{ MPa}$ ) et aucune en fibre supérieure, ce qui était prévisible compte tenu de son caractère surcritique et de la surabondance de la membrure correspondante.

## 6. Flexion en précontrainte partielle

### 6.1 Généralités

La précontrainte partielle est définie réglementairement par la classe III (§ 1.4.5.1). Pour les justifications vis-à-vis des ELS, on limite, non plus les contraintes de traction dans le béton, mais les tensions dans les armatures passives et les variations de tension dans les armatures de précontrainte, tant sous combinaisons rares que sous combinaisons fréquentes de façon à :

- bien maîtriser la fissuration ;
- éviter tout risque de fatigue pour les armatures.

En fait, on néglige l’éventuelle résistance à la traction du béton, moyennant quoi les calculs de contraintes sont effectués à partir des caractéristiques des sections fissurées.

Le dimensionnement de la précontrainte résulte de la condition de non-décompression de la section d’enrobage sous combinaisons quasi permanentes (§ 5.5.6.2), les aciers passifs longitudinaux étant déterminés par :

- les limitations sur les tensions ou variations de tension précédemment évoquées (justifications vis-à-vis des ELS) ;
- les conditions de sécurité, vis-à-vis des ELU (§ 7) ;
- et le cas échéant, par la règle du minimum de non-fragilité (§ 1.4.5.1.3).

### 6.2 Principe du calcul en section fissurée

#### 6.2.1 Hypothèses de calcul

Dans la mesure où les armatures peuvent être considérées comme adhérentes au béton, les hypothèses du calcul sont les suivantes :

- conservation de la planéité des sections droites ;
- élasticité des matériaux (avec les modules  $E_p = E_s = nE_b$ ) ;
- non-intervention du béton tendu ;
- non-glissement des matériaux.

#### 6.2.2 Conventions de signe

Les déformations  $\epsilon_b$  du béton,  $\epsilon_s$  des armatures passives,  $\epsilon_p$  des armatures de précontrainte, ainsi que leurs variations ( $\Delta\epsilon_p$ ) sont comptées algébriquement selon les conventions suivantes :

- $\epsilon_b > 0$  pour un raccourcissement ;
- $\epsilon_s, \epsilon_p, \Delta\epsilon_p > 0$  s’il s’agit d’allongements ou d’accroissements d’allongements.

En ce qui concerne les contraintes ou leurs variations, les conventions de signe corrélatives sont les suivantes :

- $\sigma_b > 0$  pour une compression ;
- $\sigma_s, \sigma_p, \Delta\sigma_p > 0$  s'il s'agit de tractions ou d'augmentations de tractions.

### 6.2.3 Analyse des déformations dans une section

Considérons une section dont le comportement relève de la classe III lorsque la structure à laquelle elle appartient est chargée.

Dans l'ouvrage en charge, la première hypothèse du paragraphe 6.2.1 implique que les déformations du béton sont linéaires sur la hauteur de la section et la quatrième hypothèse implique que les déformations des aciers passifs sont alignées sur le diagramme linéaire en question.

Pour interpréter correctement les déformations au niveau des armatures de précontrainte, il faut passer par l'intermédiaire du diagramme de déformations que présente la section lorsque la structure n'est soumise qu'à ses charges permanentes (état dans lequel on a calculé la tension  $\sigma_{pd}$  des armatures de précontrainte et donc leur allongement  $\varepsilon_{pd} = \sigma_{pd}/E_p$ ).

L'allongement total, en charge,  $\varepsilon_p$  des armatures de précontrainte apparaît comme la somme de trois termes (figure 55) :

- leur allongement à vide  $\varepsilon_{pd}$  ;
- un premier complément d'allongement  $\Delta'\varepsilon_p$  accompagnant le retour à 0 de la déformation du béton adjacent (donc égal au raccourcissement  $\varepsilon_{bpd} = \sigma_{bpd}/E_b = n\sigma_{bpd}/E_p$  que présente ce béton dans l'état à vide) ;
- un deuxième complément de déformation  $\Delta''\varepsilon_p$  que l'on lit directement sur le diagramme linéaire des déformations de la section en charge.

### 6.2.4 Analyse des contraintes

Compte tenu des deuxième et troisième hypothèses du paragraphe 6.2.1, on déduit facilement la distribution des contraintes en charge :

- dans le béton :

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b \text{ si } \varepsilon_b \geq 0$$

$$\sigma_b = 0 \text{ si } \varepsilon_b < 0$$

- dans les armatures :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s$$

$$\Delta'\sigma_p = E_p \Delta'\varepsilon_p$$

$$\Delta''\sigma_p = E_p \Delta''\varepsilon_p$$

Du fait que  $E_s = E_p = nE_b$ , si l'on reporte sur un diagramme les contraintes dans le béton et, pour les aciers, leurs contraintes (ou variations de contraintes) divisées par  $n$ , on retrouve les mêmes alignements qu'en matière de déformations (figure 55).

Ces contraintes peuvent se regrouper en deux catégories :

- celles dont la distribution s'identifie à une distribution de contraintes en béton armé aux ELS ( $\sigma_b, \Delta''\sigma_p, \sigma_s$ ) ;
- les autres ( $\sigma_{pd}, \Delta'\sigma_p$ ).

Si l'on est capable de définir la sollicitation qu'équilibre l'ensemble des contraintes de la catégorie  $a$ , on est donc ramené à un problème classique de béton armé.

Pour ce faire, il suffit d'exprimer l'équilibre des efforts dans la section.

### 6.2.5 Équilibre des efforts

Avec les conventions de signe données au paragraphe 6.2.2, cet équilibre s'écrit :

$$\text{Sys } \{M\} \sim \text{Sys } \{\sigma_b dB, -A_p(\sigma_{pd} + \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s\sigma_s\}$$

$$\text{ou } \text{Sys } \{M, A_p(\sigma_{pd} + \Delta'\sigma_p)\} \sim \text{Sys } \{\sigma_b dB, -A_p\Delta''\sigma_p, -A_s\sigma_s\}$$

soit encore :

$$\text{Sys } \{M, P_d + \Delta'P\} \sim \text{Sys } \{\sigma_b dB, -A_p\Delta''\sigma_p, -A_s\sigma_s\}$$

expressions dans lesquelles  $M$  représente le moment fléchissant développé par les charges extérieures.

Ainsi donc (figure 56), le diagramme ( $\sigma_b, \Delta''\sigma_p, \sigma_s$ ) équilibre la sollicitation de flexion composée constituée par le moment extérieur  $M$  (majoré, le cas échéant, du moment hyperstatique de précontrainte) d'une part, et la force  $P_d + \Delta'P$  appliquée au niveau des aciers de précontrainte d'autre part (ou les forces  $P_{dj} + \Delta'P_j$  s'il existe plusieurs niveaux  $j$  d'armatures de précontrainte).

Cette sollicitation, qui équivaut à l'application d'une force unique :

$$N = \Sigma P_{dj} + \Delta'P_j$$

à la distance  $\delta = \frac{\Sigma d_j(P_{dj} + \Delta'P_j) - M}{N}$  de la fibre supérieure, est facile à calculer puisque les forces  $P_{dj}$  sont connues et que :

$$\Delta'P_j = A_{pj}\Delta'\sigma_{pj} = A_{pj}n\sigma_{bpdj}$$

avec  $A_{pj}$  section des armatures de précontrainte au niveau  $j$ ,  
 $\sigma_{bpdj}$  contrainte du béton à ce même niveau dans l'état à vide.

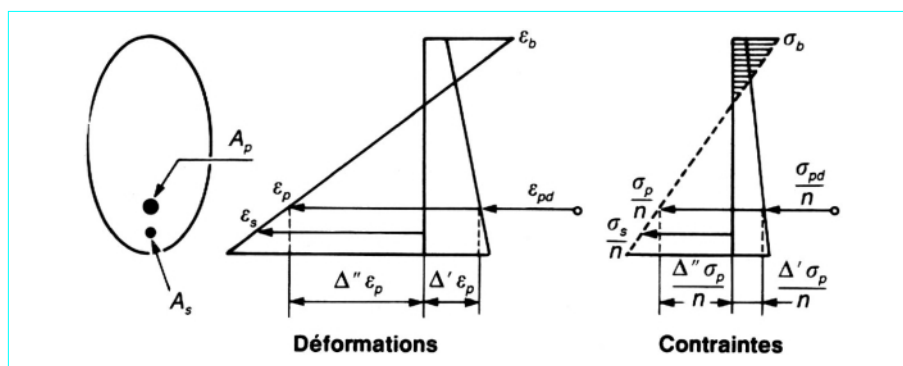


Figure 55 – Contraintes et déformations dans une section en classe III



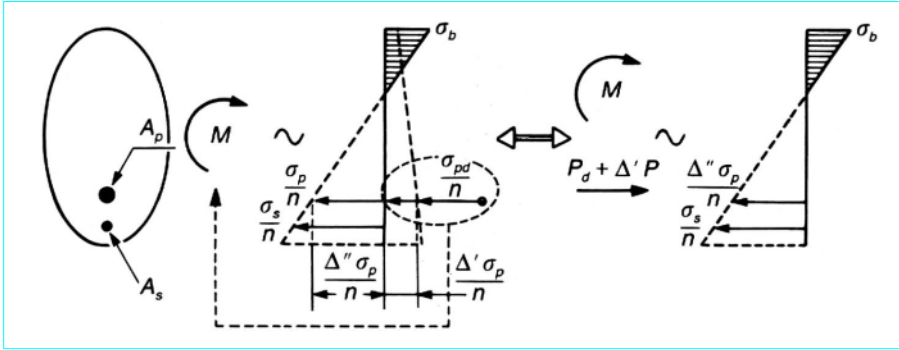


Figure 56 – Équilibre des efforts dans une section droite

### 6.2.6 Calcul des contraintes $\sigma_b$ , $\sigma_s$ et $\Delta''\sigma_p$

On détermine le diagramme de contraintes (figure 57) (en fait, sa pente  $K$  et la position de l'axe neutre  $y$ ) en exprimant que le moment  $M_B + M_A$  de ces contraintes par rapport au point de passage de la force est nul et que leur somme ( $N_B + N_A$ ) est égale à  $N$ .

$$M_B = \int_0^y K(y-\eta)(\delta-\eta)b(\eta)d\eta = K[\delta y B(y) - (y+\delta)S(y) + J(y)]$$

$$M_A = \sum_j nKA_j(d_j-y)(d_j-\delta) = nK\left[\delta y \sum_j A_j - (y+\delta) \sum_j A_j d_j + \sum_j A_j d_j^2\right]$$

$$N_B = \int_0^y K(y-\eta)b(\eta)d\eta = K[yB(y) - S(y)]$$

$$N_A = \sum_j nKA_j(d_j-y) = nK\left[y \sum_j A_j - \sum_j A_j d_j\right]$$

avec  $B(y)$  aire de la section du béton comprimé,  
 $S(y)$  son moment statique par rapport à l'horizontale de la fibre supérieure,  
 $J(y)$  son moment d'inertie par rapport à cette même horizontale.

Les sommations sont étendues à toutes les armatures, qu'elles soient passives ou de précontrainte.

Si l'on pose :

$$\left. \begin{aligned} B^*(y) &= B(y) + n \sum A_j \\ S^*(y) &= S(y) + n \sum A_j d_j \\ J^*(y) &= J(y) + n \sum A_j d_j^2 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

on obtient ainsi :

$$\delta y B^*(y) - (y+\delta)S^*(y) + J^*(y) = 0 \quad (90)$$

équation permettant de calculer  $y$  (du 3<sup>e</sup> degré si la section est constituée de rectangles),

$$\text{et} \quad N = K[yB^*(y) - S^*(y)] \quad (91)$$

équation donnant  $K$ .

### 6.2.7 Récapitulation

Ainsi, donc, le calcul des contraintes normales en classe III se fait en deux temps.

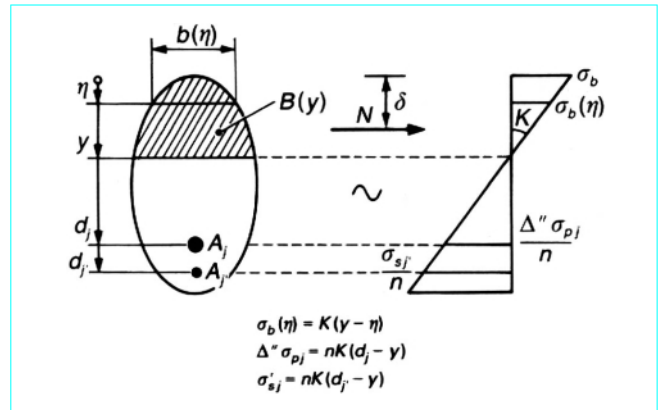


Figure 57 – Sollicitation de flexion composée

(a) Calcul des  $\Delta'\sigma_{pj} = n\sigma_{bpdj}$  et donc des  $\Delta'P_j = A_p\Delta'\sigma_{pj}$ , puis de la sollicitation de flexion composée à appliquer pour effectuer la deuxième partie du calcul :

$$N = \sum P_{dj} + \Delta'P_j$$

$$\delta = \frac{\sum d_j(P_{dj} + \Delta'P_j) - M}{N}$$

(b) Calcul de flexion composée en section fissurée.

La résolution des équations (90) et (91) donne  $K$  et  $y$  d'où :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b &= Ky \\ \Delta''\sigma_{pj} &= nK(d_j - y) \\ \sigma_{sj'} &= nK(d_j' - y) \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Bien entendu, la variation totale de tension dans les armatures de précontrainte au niveau  $j$  vaut :

$$\Delta\sigma_{pj} = \Delta'\sigma_{pj} + \Delta''\sigma_{pj}$$

## 6.3 Prescriptions réglementaires

Deux particularités réglementaires méritent d'être signalées :

— alors que la logique voudrait que tout le calcul soit conduit avec une valeur unique  $n$  du coefficient d'équivalence, le BPEL prescrit d'utiliser la valeur  $n_i = 5$  dans la phase (a) ci-dessus définie et la valeur  $n_v = 15$  dans la phase (b) ;

— dans la partie (b) du calcul, la section  $A_p$  des armatures de précontrainte est frappée d'un coefficient minorateur  $\rho$  (article 5.2, 2 des Règles BPEL 83), avec :

- $\rho = 1$  en pré-tension,
- $\rho = 0,5$  en post-tension lorsque les armatures de précontrainte présentent une adhérence de forme,
- $\rho = 0$  en post-tension sans adhérence de forme.

L'attention est attirée sur le fait que **le coefficient  $\rho$  s'applique à la section et non pas au coefficient d'équivalence**.

Ainsi, donc,  $\rho$  intervient dans les expressions (89) où il faut, pour une armature de précontrainte, remplacer  $A_j$  par  $\rho_j A_j$  mais pas dans les expressions (92).

Autrement dit, si l'on prend  $\rho = 1$  pour les armatures passives, les expressions (89) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} B^*(y) &= B(y) + n \sum \rho_j A_j \\ S^*(y) &= S(y) + n \sum \rho_j A_j d_j \\ J^*(y) &= J(y) + n \sum \rho_j A_j d_j^2 \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

qui permet d'effectuer sans ambiguïté le calcul réglementaire, les formulations (90), (91) et (92) demeurant inchangées.

## 6.4 Exemple

Reprenons les données générales de l'exemple traité au paragraphe 5.9 en supposant, cette fois-ci, défini le coffrage du tablier (avec  $b = 1,30$  m, figure 58) et en nous proposant de dimensionner la précontrainte (prise en compte par sa seule valeur probable) ainsi que les aciers passifs longitudinaux de façon à satisfaire aux conditions de la classe III.

Les caractéristiques géométriques de la section sont les suivantes :

$$B = 4,300 \text{ m}^2$$

$$v = 0,540 \text{ 9 m} \quad \text{et} \quad v' = 1,259 \text{ 1 m}$$

$$I = 1,302 \text{ 6 m}^4$$

$$\frac{I}{v} = 2,408 \text{ 1 m}^3 \quad \text{et} \quad \frac{I}{v'} = 1,034 \text{ 6 m}^3$$

$$\rho = 0,444 \text{ 8}$$

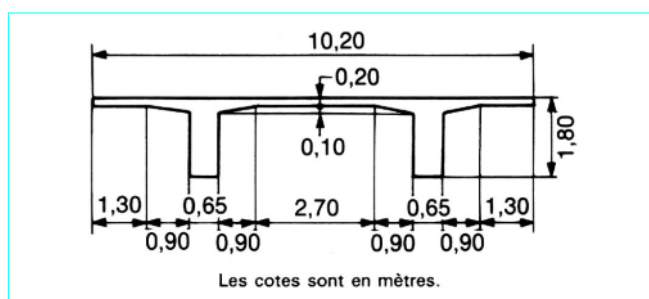


Figure 58 - Section retenue

### 6.4.1 Précontrainte minimale

Elle est obtenue lorsqu'on atteint juste la décompression en partie basse de la section d'enrobage, autrement dit en fibre inférieure (du fait que les câbles sont excentrés au maximum vers le bas dans la section médiane *a priori* sur-critique puisqu'elle l'était déjà en classe II) sous l'effet de  $M_{Mqp}$ .

$$\text{Par suite} \quad P = \frac{M_{Mqp}}{v' + \rho v - d'}$$

$$\text{avec} \quad M_{Mqp} = 2,45 B + 3,92 = 14,455 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

D'où, en admettant  $d' = 0,14$  m :

$$P = \frac{14,455}{1,259 \text{ 1} + 0,444 \text{ 8} \times 0,540 \text{ 9} - 0,14} = 10,63 \text{ MN}$$

C'est là la valeur minimale absolue envisageable pour  $P$ . Si nous l'adoptons, nous risquons fort d'avoir besoin d'une quantité impressionnante d'aciers passifs longitudinaux pour satisfaire aux conditions réglementaires sous combinaisons rares et fréquentes.

C'est pourquoi nous allons retenir une force plus grande en nous fixant, cette fois-ci, comme objectif, d'obtenir une compression centrée dans la section médiane sous combinaison quasi permanente (autrement dit, dans le cas présent, sous charges permanentes).

### 6.4.2 Précontrainte donnant une compression centrée sous charges permanentes

Comme l'on a :

$$e_0 = -(v' - d')$$

cette précontrainte est définie par :

$$M_g + M'_g - P(v' - d') = 0$$

c'est-à-dire par :

$$P = \frac{M_g + M'_g}{v' - d'} = \frac{M_{Mqp}}{v' - d'}$$

$$\text{D'où} \quad P = \frac{14,455}{1,259 \text{ 1} - 0,14} = 12,92 \text{ MN}$$

Cette force, d'environ 20 % supérieure à la précédente, est encore nettement inférieure à celle qu'il faudrait en classe II (§ 5.9.3).

On peut la réaliser au moyen de 12 câbles 7 T15 (6 par poutre). Si l'on admet, comme au paragraphe 4.6.5 (tableau 6), que ces câbles ont une tension probable finale  $\sigma_{pm} = 1 \text{ 147 MPa}$ , la force de précontrainte correspondante vaut :

$$P = 12 \times 7 \times 139 \times 10^{-6} \times 1 \text{ 147} = 13,39 \text{ MN}$$

Les conduits pour câbles 7 T15 présentent un diamètre intérieur de 6,5 cm et un diamètre d'encombrement d'environ 7 cm. On peut, en section médiane, les disposer comme indiqué sur la figure 59, ce qui correspond à  $d' = 0,145$  m, valeur très voisine de celle utilisée dans l'estimation de  $P$  (0,14 m).

### 6.4.3 Contraintes sur la section non fissurée

Calculées sur la section brute avec  $P = 13,39$  MN et  $e_0 = -(1,259 \text{ 1} - 0,145) = -1,114 \text{ 1 m}$ , elles s'établissent en situation d'exploitation, selon la figure 60

Bien sûr, les contraintes ainsi calculées sur la section non fissurée en présence de charges d'exploitation n'ont guère de sens (sous  $M_{Mr}$ , la traction en fibre inférieure dépasse largement  $2 f_{t28}$ ).

En situation d'exécution, immédiatement après mise en tension des câbles, et en admettant, comme au paragraphe 4.6.5 :

$$P_c = 12 \times 7 \times 139 \times 10^{-6} \times 1\,320 = 15,41 \text{ MN}$$

(soit sensiblement 1,151  $P$ ), on a les valeurs indiquées sur la figure 61. Ces contraintes sont acceptables.

#### 6.4.4 Ferrailage minimal

En contrepartie des tractions qui apparaissent en bas de la section sous  $M_{Mr}$ , il nous faut y disposer une section d'aciers passifs au moins égale à (§ 1.4.5.1) :

$$A_s = \frac{B_t}{1\,000} + \frac{N_{B_t}}{f_e} \times \frac{f_{tj}}{\sigma_{B_t}}$$

Ici  $B_t = by'_t$  (figure 62)

$$N_{B_t} = by'_t \frac{\sigma_{B_t}}{2}$$

et donc  $A_s = by'_t \left( \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{2} \frac{f_{tj}}{f_e} \right)$

soit, avec  $f_{tj} = 2,4 \text{ MPa}$ ,  $f_e = 400 \text{ MPa}$ , et  $y'_t = 1,80 \times \frac{5,91}{5,91 + 6,99} = 0,825 \text{ m}$  :

$$A_s = 1,30 \times 0,825 \left( \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{2} \times \frac{2,4}{400} \right) \times 10^4 = 42,9 \text{ cm}^2$$

Nous pouvons retenir, en fait, 6 HA 32, ce qui correspond à  $A_s = 48,24 \text{ cm}^2$ .

#### 6.4.5 Vérification des contraintes en section fissurée (situation d'exploitation)

Pour l'ensemble de la section, les armatures prises en compte sont les suivantes (figure 63) :

$$A_{p1} = 6 \times 7 \times 1,39 = 58,38 \text{ cm}^2 \quad \text{à} \quad d_1 = 1,80 - 0,18 = 1,62 \text{ m}$$

$$A_{p2} = 6 \times 7 \times 1,39 = 58,38 \text{ cm}^2 \quad \text{à} \quad d_2 = 1,80 - 0,11 = 1,69 \text{ m}$$

$$A_s = 48,24 \text{ cm}^2 \quad \text{à} \quad d_3 = 1,80 - 0,053 = 1,747 \text{ m}$$

#### 6.4.5.1 Sollicitations de flexion composée

Nous allons admettre que la première partie de la surtension est la même dans les deux niveaux d'armatures de précontrainte ( $\Delta'\sigma_{p1} = \Delta'\sigma_{p2}$ ). Elle vaut (§ 6.2.7 et figure 60) :

$$\Delta'\sigma_{p1} = \Delta'\sigma_{p2} = n\sigma'_{bpm} = 5 \times 3,51 = 17,6 \text{ MPa}$$

Par suite :

$$N = 13,39 + (2 \times 58,38 \times 10^{-4} \times 17,6) = 13,59 \text{ MN}$$

Les moments extérieurs appliqués sont :

$$M_{Mr} = 2,45 B + 13,72 = 24,255 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

et  $M_{Mf} = 2,45 B + 9,8 = 20,335 \text{ MN} \cdot \text{m}$

D'où, avec les notations du paragraphe 6.2.5 :

— sous combinaisons rares :

$$\delta = \frac{(13,59 \times 1,655) - 24,255}{13,59} = -0,129 \text{ 8 m}$$

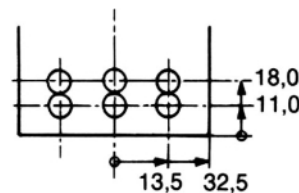
— sous combinaisons fréquentes :

$$\delta = \frac{(13,59 \times 1,655) - 20,335}{13,59} = -0,158 \text{ 7 m}$$

En résumé :

— sous combinaisons rares  $\begin{cases} N = 13,59 \text{ MN} \\ \delta = -0,129 \text{ 8 m} \end{cases}$

— sous combinaisons fréquentes  $\begin{cases} N = 13,59 \text{ MN} \\ \delta = +0,158 \text{ 7 m} \end{cases}$



Les cotes sont en centimètres.

Figure 59 – Disposition des câbles en section médiane

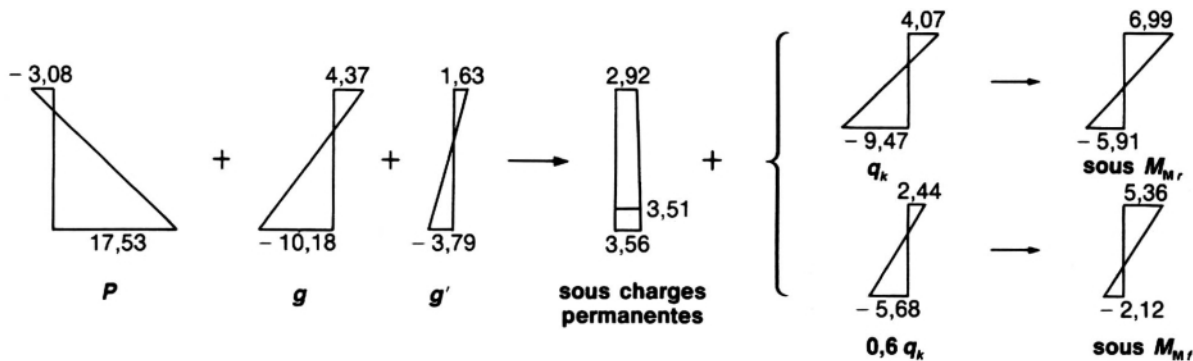


Figure 60 – Contraintes normales en situation d'exploitation (en MPa)

### 6.4.5.2 Équations de résolution

Il est logique d'admettre (et on le vérifiera dans la suite des calculs) que l'axe neutre tombe dans l'âme ( $y > 0,30$  m).

Si l'on désigne par :

- $B_0$  l'aire de la section (1) + (2) de la figure 64 ;
- $S_0$  son moment statique par rapport à l'horizontale de la fibre supérieure ;
- $J_0$  son moment d'inertie par rapport à cette même horizontale ;

et si l'on pose :

$$B_0^* = B_0 + n \sum \rho_j A_j$$

$$S_0^* = S_0 + n \sum \rho_j A_j d_j$$

$$J_0^* = J_0 + n \sum \rho_j A_j d_j^2$$

les expressions (93) s'écrivent :

$$B^*(y) = by + B_0^*$$

$$S^*(y) = \frac{by^2}{2} + S_0^*$$

$$J^*(y) = \frac{by^3}{3} + J_0^*$$

L'équation (90) devient donc :

$$-\frac{b}{6}y^3 + \frac{b\delta}{2}y^2 + y(\delta B_0^* - S_0^*) + J_0^* - \delta S_0^* = 0 \quad (94)$$

et l'expression (91) :

$$K = \frac{N}{\frac{b}{2}y^2 + yB_0^* - S_0^*} \quad (95)$$

D'où, pour  $B_0^*$ ,  $S_0^*$ ,  $J_0^*$ , le tableau de calcul 12.

### 6.4.5.3 Calcul des contraintes sous combinaisons rares

Avec :  $\delta = -0,129$  8 m (§ 6.4.5.1) et  $b = 1,30$  m, l'équation (94) s'écrit :

$$-0,2167y^3 - 0,0844y^2 - 0,7665y + 0,5582 = 0$$

D'où

$$y = 0,6190 \text{ m}$$

(on vérifie bien que  $y > 0,30$  m).

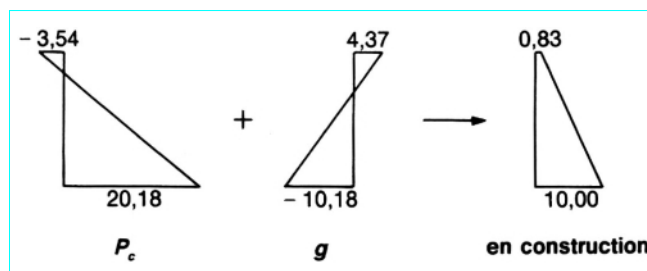


Figure 61 – Contraintes en situation d'exécution (en MPa)

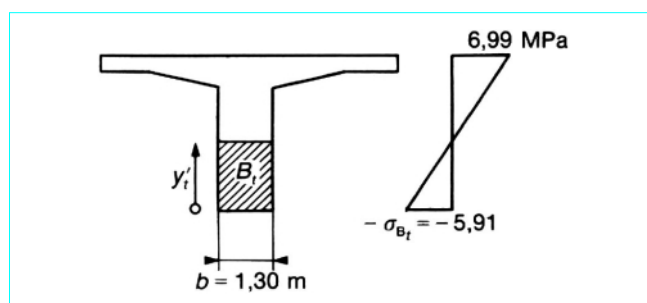


Figure 62 – Calcul du ferrailage minimal

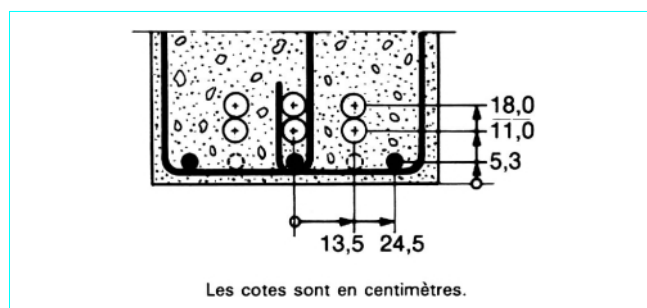


Figure 63 – Disposition des armatures

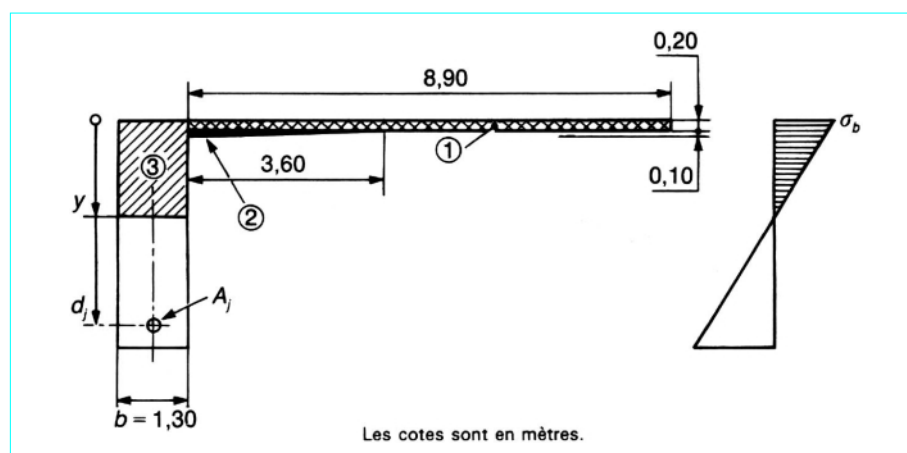


Figure 64 – Schématisation de la section

Tableau 12 – Calcul de  $B_0^*$ ,  $S_0^*$ ,  $J_0^*$

Secteurs					$B_0$ (m <sup>2</sup> )	$S_0$ (m <sup>3</sup> )	$J_0$ (m <sup>4</sup> )
Béton	(1)				$17\,800 \times 10^{-4}$	$1\,780 \times 10^{-4}$	$237 \times 10^{-4}$
	(2)				$1\,800 \times 10^{-4}$	$420 \times 10^{-4}$	$99 \times 10^{-4}$
	Total béton (1) + (2)				$19\,600 \times 10^{-4}$	$2\,200 \times 10^{-4}$	$336 \times 10^{-4}$
Aciers	j	$A_j$ (m <sup>2</sup> )	$d_j$ (m)	$n\rho_j$	$n\rho_j A_j$ (m <sup>2</sup> )	$n\rho_j A_j d_j$ (m <sup>3</sup> )	$n\rho_j A_j d_j^2$ (m <sup>4</sup> )
	1	$58,38 \times 10^{-4}$	1,62	7,5	$438 \times 10^{-4}$	$709 \times 10^{-4}$	$1\,149 \times 10^{-4}$
	2	$58,38 \times 10^{-4}$	1,69	7,5	$438 \times 10^{-4}$	$740 \times 10^{-4}$	$1\,251 \times 10^{-4}$
	3	$48,24 \times 10^{-4}$	1,747	15	$724 \times 10^{-4}$	$1\,264 \times 10^{-4}$	$2\,208 \times 10^{-4}$
Total aciers					$1\,600 \times 10^{-4}$	$2\,713 \times 10^{-4}$	$4\,608 \times 10^{-4}$
Total aciers + béton					$B_0^* = 21\,200 \times 10^{-4}$	$S_0^* = 4\,913 \times 10^{-4}$	$J_0^* = 4\,944 \times 10^{-4}$

Et, par (95) :

$$K = \frac{13,59}{\frac{1,30}{2} \times 0,619\,0^2 + 0,619\,0 \times 2,120\,0 - 0,491\,3} = 12,700$$

On en déduit immédiatement les contraintes [équations (92)] :

$$\sigma_b = K\gamma = 12,700 \times 0,619\,0 = 7,86\text{ MPa}$$

$$\Delta''\sigma_{p1} = nK(d_1 - \gamma) = 15 \times 12,700(1,62 - 0,619\,0) = 190,7\text{ MPa}$$

$$\Delta''\sigma_{p2} = nK(d_2 - \gamma) = 15 \times 12,700(1,69 - 0,619\,0) = 204,0\text{ MPa}$$

$$\sigma_s = nK(d_3 - \gamma) = 15 \times 12,700(1,747 - 0,619\,0) = 214,9\text{ MPa}$$

Les contraintes dans le béton et les aciers passifs sont acceptables :

$$\sigma_b = 7,86 < 0,54 f_{c28} = 16,2\text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 214,9 < \bar{\sigma}_s = 150\eta = 150 \times 1,6 = 240\text{ MPa}$$

(figure 6).

En revanche, dans les armatures de précontrainte, notamment au niveau de  $d_2 = 1,69\text{ m}$ , on a :

$$\Delta\sigma_{p2} = \Delta'\sigma_{p2} + \Delta''\sigma_{p2} = 17,6 + 204,0 = 221,6\text{ MPa}$$

ce qui est nettement supérieur à :

$$\Delta\bar{\sigma}_p = 0,10 f_{prg} = 177\text{ MPa}$$

(avec  $f_{prg} = 1\,770\text{ MPa}$  ; § 2.3.7 et 4.6).

Il faut donc augmenter la section d'aciers passifs de façon à ramener  $\Delta\sigma_{p2}$  au-dessous de  $\Delta\bar{\sigma}_p$ .

#### 6.4.6 Renforcement de la section

On peut admettre, en première approximation, que les contraintes  $\sigma_s$  et les variations de contraintes  $\Delta''\sigma_{pj}$  sont inversement proportionnelles à  $\Sigma\rho_j A_j$ .

Si l'on pose donc :

$$\Delta''\sigma_{p2} = \Delta\bar{\sigma}_p - \Delta'\sigma_{p2} = 177 - 17,6 = 159,4\text{ MPa}$$

et si l'on désigne par  $\Delta A_s$  la section complémentaire d'aciers passifs nécessaires, on doit avoir :

$$\Delta A_s = \left( \frac{1}{2} A_{p1} + \frac{1}{2} A_{p2} + A_s \right) \left( \frac{\Delta''\sigma_{p2}}{\Delta''\sigma_{p1}} - 1 \right)$$

$$\text{ou} \quad \Delta A_s = (58,38 + 48,24) \left( \frac{204,0}{159,4} - 1 \right) = 29,8\text{ cm}^2$$

Il suffit d'ajouter 4 HA32 à l'ensemble de la section (ce qui correspond à  $\Delta A_s = 4 \times 8,04 = 32,16\text{ cm}^2$ ) et donc d'y disposer, au total, 10 HA32 (5 par poutre comme indiqué sur la figure 63 où les 2 HA32 complémentaires sont représentés en pointillés).

#### 6.4.7 Justification de la section renforcée

Compte tenu des 4 HA32 complémentaires ( $\Delta A_s = 32,16\text{ cm}^2$ ),  $B_0^*$ ,  $S_0^*$  et  $J_0^*$  deviennent :

$$B_0^* = 21\,200 \times 10^{-4} + 15 \times 32,16 \times 10^{-4} = 21\,682 \times 10^{-4}\text{ m}^2$$

$$S_0^* = 4\,913 \times 10^{-4} + 15 \times 32,16 \times 10^{-4} \times 1,747 = 5\,756 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$

$$J_0^* = 4\,944 \times 10^{-4} + 15 \times 32,16 \times 10^{-4} \times 1,747^2 = 6\,416 \times 10^{-4}\text{ m}^4$$

##### ■ Sous combinaisons rares

Avec  $\delta = -0,129\,8\text{ m}$ , l'équation (94) s'écrit :

$$-0,216\,7\gamma^3 - 0,084\,4\gamma^2 - 0,857\,0\gamma + 0,716\,4 = 0$$

$$\text{D'où} \quad \gamma = 0,700\text{ m}$$

$$\text{Puis} \quad K = 10,764\text{ MPa/m}$$

$$\sigma_b = 7,54\text{ MPa}$$

$$\Delta''\sigma_{p1} = 148,5\text{ MPa}$$

$$\Delta''\sigma_{p2} = 159,8\text{ MPa}$$

$$\sigma_s = 169,0\text{ MPa}$$

Cette fois-ci :

$$\Delta\sigma_{p2} = \Delta'\sigma_{p2} + \Delta''\sigma_{p2} = 17,6 + 159,8 = 177,4\text{ MPa}$$

On dépasse encore légèrement  $\Delta\bar{\sigma}_p = 177\text{ MPa}$ , mais c'est sans conséquence, d'autant plus qu'on a négligé dans le calcul les filants longitudinaux de peau le long des parois des âmes.



### ■ Sous combinaisons fréquentes

Dans ce cas (§ 6.4.5.1),  $\delta = 0,158 \text{ m}$  et  $N = 13,59 \text{ MN}$ .

En opérant comme précédemment, on trouve pour (94) :

$$-0,216 \, 7 \gamma^3 + 0,103 \, 2 \gamma^2 - 0,231 \, 5 \gamma + 0,550 \, 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad & \gamma = 1,249 \text{ m} \\ & K = 4,320 \text{ MPa/m} \\ & \sigma_b = 5,39 \text{ MPa} \\ & \Delta''\sigma_{p1} = 24,0 \text{ MPa} \\ & \Delta''\sigma_{p2} = 28,6 \text{ MPa} \\ & \sigma_s = 32,3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\text{On a bien} \quad \sigma_s < \bar{\sigma}_s' = 60 \text{ MPa} \quad (\text{figure 6})$$

Les dispositions retenues conviennent donc.

## 7. Justifications à la flexion des poutres isostatiques vis-à-vis des états-limites ultimes

### 7.1 Généralités

Les justifications vis-à-vis des ELU, complémentaires des vérifications vis-à-vis des ELS, s'avèrent indispensables pour les raisons suivantes :

— un dépassement des charges caractéristiques (prises en compte dans les calculs aux ELS) est toujours possible, bien que peu probable ;

— il faut donc examiner le comportement des structures sous charges majorées. Pour ce faire, il n'est pas envisageable de procéder par extrapolation. En effet, pour des raisons d'économie évidentes, on tolère que, sous ces charges majorées, des phénomènes irréversibles se manifestent (fissuration, plastification des matériaux), l'essentiel étant d'éviter l'effondrement des ouvrages.

D'où la nécessité d'effectuer des vérifications spécifiques.

### 7.2 Équilibre d'une section à rupture

Dans la mesure où la précontrainte est adhérente au béton, l'expérience montre que l'on peut appréhender correctement le comportement d'une section à l'épuisement de sa résistance en tablant sur les hypothèses suivantes :

- conservation de la planéité des sections droites ;
- non-intervention du béton tendu ;
- non-glissement des matériaux.

Si l'on prend l'exemple d'une section soumise, de la part des actions extérieures, à une sollicitation de flexion simple (section médiane d'une travée indépendante, pour se fixer les idées), cette section résiste par son béton comprimé sur une hauteur  $y$  et par ses aciers tendus à (figure 65) :

- $\sigma_p$  en ce qui concerne les armatures de précontrainte ;
- $\sigma_s$  en ce qui concerne les armatures passives.

Comme au paragraphe 6.2,  $\sigma_p$  se décompose en trois termes :  $\sigma_{pm}$  contrainte probable à vide,  $\Delta'\sigma_p$  premier complément de contrainte accompagnant le retour à 0 de la déformation du béton adjacent et  $\Delta''\sigma_p$  deuxième complément de contrainte jusqu'à l'épuisement de la résistance de la section.

Ces contraintes  $\sigma_p$ ,  $\sigma_s$  et  $\sigma_b$  équilibrent le moment  $M_{ext}$  développé par les charges extérieures. Avec des notations et des conventions de signe analogues à celles utilisées au paragraphe 6.2 :

$$\text{Sys} \{M_{ext}\} \sim \text{Sys} \{\sigma_b dB, -A_p(\sigma_{pm} + \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s \sigma_s\} \quad (96)$$

La relation d'équivalence précédente s'écrit encore :

$$\text{Sys} \{M_{ext}, A_p \sigma_{pm}\} \sim \text{Sys} \{\sigma_b dB, -A_p(\Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s \sigma_s\}$$

$$\text{soit} \quad \text{Sys} \{M_{ext}, P_m\} \sim \text{Sys} \{\sigma_b dB, -A_p(\Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p), -A_s \sigma_s\} \quad (97)$$

Dans la formulation (97), la précontrainte  $P_m$  est passée du côté sollicitant (figure 66), les aciers de précontrainte n'intervenant plus que par leur surtension  $\Delta\sigma_p = \Delta'\sigma_p + \Delta''\sigma_p$  dans la résistance de la section.

C'est cette formulation (97) qui sert de base aux justifications réglementaires du fait que la précontrainte  $P_m$ , considérée comme une action, est affectée d'un coefficient  $\gamma_p$  dont la formulation (96) ne peut rendre compte de façon simple. Par la suite, nous nous appuierons donc sur cette formulation (97), bien que  $\gamma_p$  prenne systématiquement la valeur 1 lorsque les armatures de précontrainte participent par leur surtension  $\Delta\sigma_p$  à la résistance vis-à-vis des sollicitations normales et qu'alors les relations (96) et (97) soient strictement équivalentes.

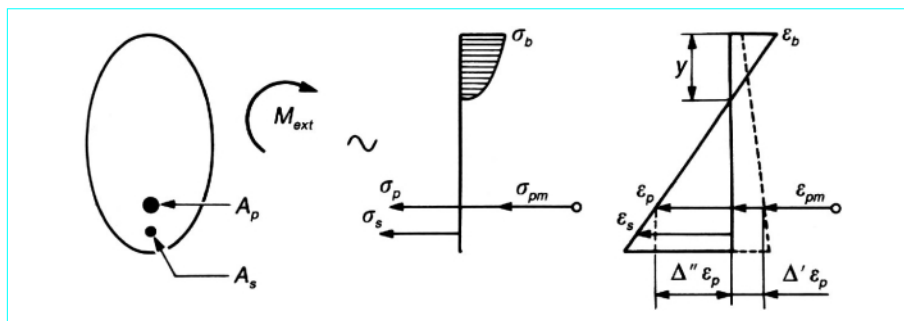


Figure 65 – Contraintes et déformations dans une section, au voisinage de sa rupture

En ce qui concerne les allongements des armatures de précontrainte ou leurs variations ( $\varepsilon_{pm}$ ,  $\Delta'\varepsilon_p$ ,  $\Delta''\varepsilon_p$ ) corrélatifs des tensions (ou variations de tension)  $\sigma_{pm}$ ,  $\Delta'\sigma_p$ ,  $\Delta''\sigma_p$ , on peut remarquer que, dans la pratique,  $\varepsilon_{pm}$  et  $\Delta'\varepsilon_p$  se situent dans le domaine de comportement élastique des aciers et qu'en conséquence :

$$\varepsilon_{pm} = \frac{\sigma_{pm}}{E_p} \quad (98)$$

$$\Delta'\varepsilon_p = \frac{\Delta'\sigma_p}{E_p} \left( = \varepsilon_{bpm} = \frac{\sigma_{bpm}}{E_b} \right) \quad (99)$$

avec  $\sigma_{bpm}$  contrainte du béton en service, à *vide*, au niveau des armatures de précontrainte (calculée en prenant en compte la valeur probable de la précontrainte),

$\varepsilon_{bpm}$  raccourcissement correspondant du béton.

D'où 
$$\Delta'\sigma_p = \frac{E_p}{E_b} \sigma_{bpm} \approx 5 \sigma_{bpm}$$

En revanche  $\Delta''\varepsilon_p$  déborde presque toujours du domaine de comportement élastique des armatures.

### 7.3 Caractérisation d'un état-limite ultime

Physiquement, un état-limite ultime se caractérise par le fait que l'un au moins des matériaux constitutifs de la section atteint sa déformation ultime. Réglementairement, on admet, de façon conventionnelle, qu'un ELU est atteint lorsque le diagramme des déformations est un diagramme limite passant par un des pivots A, B, C (ou encore A', B' ou C') (figure 67).

Les pivots A et B correspondent :

— pour les aciers, à des allongements ou à des variations d'allongements ultimes estimés de façon très prudente (mais le choix de valeurs réalistes plus élevées n'aurait pratiquement aucune incidence sur l'estimation des capacités de résistance de la section) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{su} &= 10 \times 10^{-3} \\ \Delta''\varepsilon_{pu} &= 10 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

— pour le béton, à un raccourcissement ultime assez bien représentatif de ce que l'on peut observer expérimentalement :

$$\varepsilon_{bu} = 3,5 \times 10^{-3}$$

Le pivot C, quant à lui, permet de tenir compte du fait que, lorsqu'une pièce périt tout en étant partout comprimée, les raccourcissements qu'on y mesure sont sensiblement plus faibles que sur la fibre comprimée la plus déformée d'une pièce partiellement tendue à rupture.

### 7.4 Comportement des matériaux

À toute distribution linéaire des déformations sur la hauteur de la section correspond une répartition de contraintes facile à appréhender par l'intermédiaire des diagrammes contraintes-déformations des matériaux.

Pour des bétons de résistance caractéristique  $f_{c28}$  inférieure à 40 MPa, le diagramme parabole-rectangle de la figure 68a donne une précision suffisante.

Le comportement des aciers passifs est quant à lui bien représenté par un diagramme élastoplastique avec palier d'écoulement à  $f_e$  (figure 68b).

Lorsqu'on ne dispose pas d'outils de calculs élaborés, différentes simplifications s'avèrent légitimes :

— si le diagramme des déformations de la section est un diagramme limite appartenant à l'un des domaines (1) ou (2) (ou encore (1') ou (2')), figure 67, il est possible de remplacer la distribution réelle des contraintes de compression sur la hauteur  $y$  par une distribution rectangulaire simplifiée sur la hauteur  $x = 0,8 y$  (figure 69) ;

— pour les aciers de précontrainte, on peut adopter un diagramme élastoplastique avec palier d'écoulement à  $f_{peg}$  (figure 70).

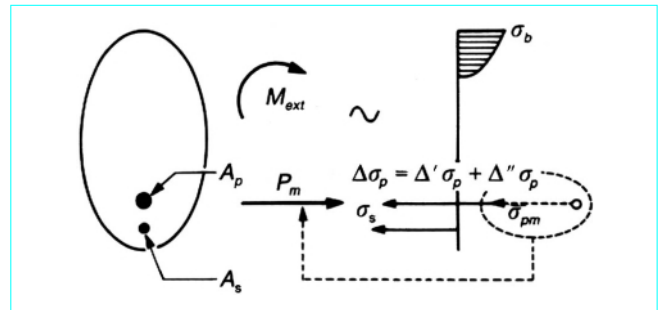


Figure 66 – Équilibre d'une section [selon la formule (97)]

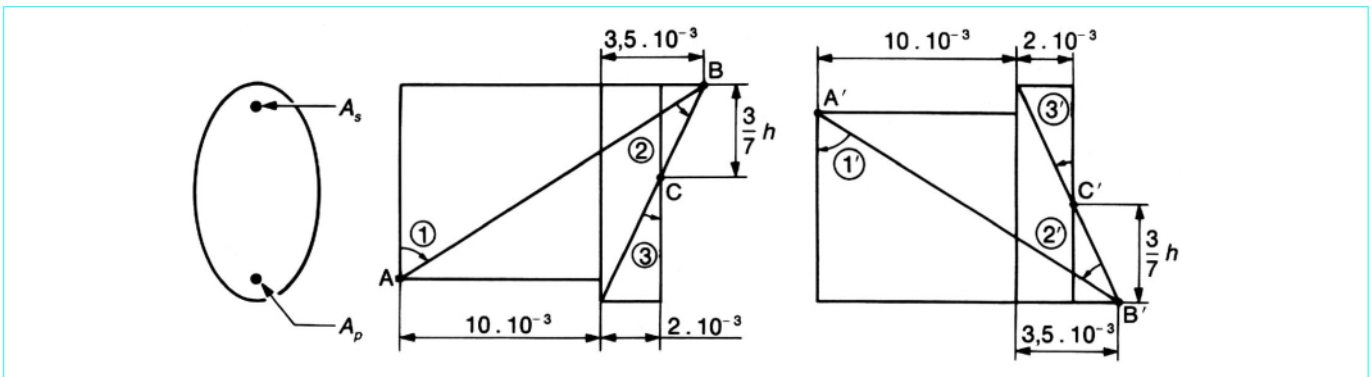


Figure 67 – Définition des pivots

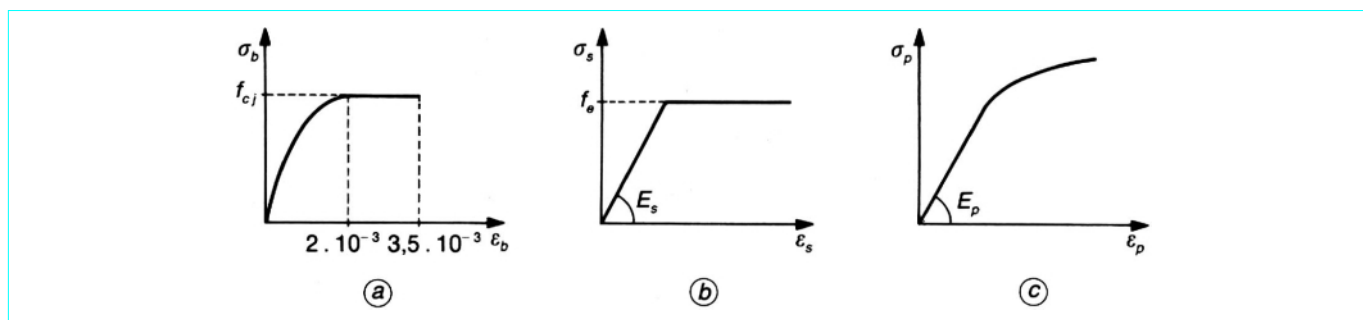


Figure 68 – Diagrammes contraintes-déformations du béton et des aciers de précontrainte. Diagrammes caractéristiques

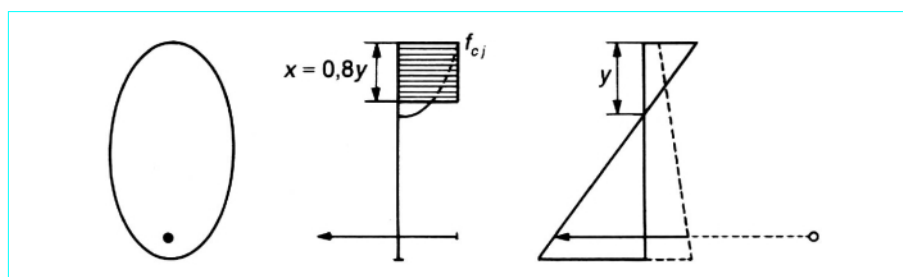


Figure 69 – Distribution rectangulaire simplifiée

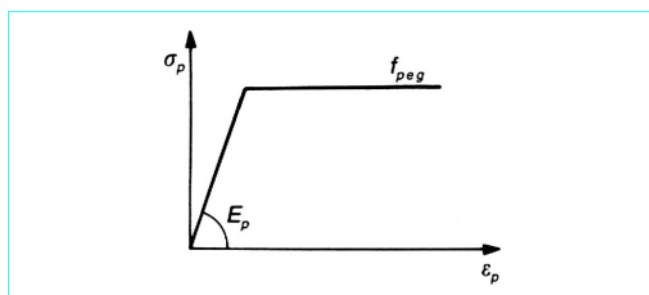


Figure 70 – Diagramme contraintes-déformations simplifié pour les armatures de précontrainte

## 7.5 Principe des justifications

Il s'agit de s'assurer que les sollicitations réglementaires de calcul, que nous désignerons par  $S^*$ , n'entraînent pas l'apparition d'un état-limite ultime dans la section.

### 7.5.1 Sollicitations de calcul

Elles sont définies par :

$$S^* = S \left\{ \gamma_p P_m + 1,35 G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q1} Q_{1k} + \sum_{i>1} 1,3 \psi_{0i} Q_{ik} \right\}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$S^* = S \{ \gamma_p P_m \} + S^*_{ext}$$

Même lorsque les charges extérieures n'engendrent que la flexion simple ( $N^*_{ext} = 0$ ), ce sont donc, du fait qu'on y a incorporé  $P_m$ ,

des sollicitations de flexion composée se caractérisant par deux paramètres, dans la mesure où l'on ne s'intéresse qu'aux composantes donnant des contraintes normales et où l'on a affaire à de la flexion non déviée.

Ces paramètres sont généralement la composante normale de la résultante et le moment résultant en un point.

Si ce point est le centre de gravité G (figure 71),  $S^*$  est donc défini par :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = N^*_{ext} + \gamma_p P_m \\ M^* = M^*_{ext} + \gamma_p P_m e_0 \end{array} \right\} \text{ éléments de réduction en G}$$

Le plus souvent  $N^*_{ext} = 0$ . Alors :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ M^* = M^*_{ext} + \gamma_p P_m e_0 \end{array} \right\} \text{ éléments de réduction en G}$$

Lorsque, dans une section, les armatures de précontrainte peuvent être considérées comme concentrées en un point, il est souvent commode de prendre les éléments de réduction de  $S^*$  par rapport à ce point. En supposant encore  $N^*_{ext} = 0$ , on a, dans ce cas :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} N^* = \gamma_p P_m \\ M^* = M^*_{ext} \end{array} \right\} \text{ éléments de réduction en } A_p$$

Il convient de remarquer, par ailleurs, qu'en règle générale il y a deux sollicitations  $S^*$  à prendre en compte :

- $S^*_{\max}$  qui correspond à l'épuisement de la section par *moments positifs* ;
- $S^*_{\min}$  qui correspond à l'épuisement de la section par *moments négatifs*.

À titre d'exemple simple, prenons le cas de la section médiane de la poutre représentée à la figure 72.

Supposons que cette poutre soit soumise :

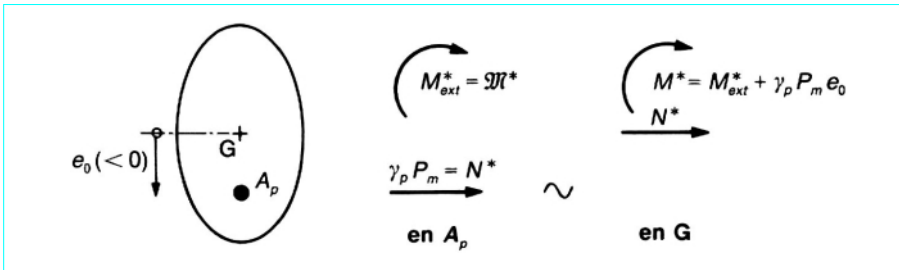


Figure 71 – Éléments de réduction de  $S^*$

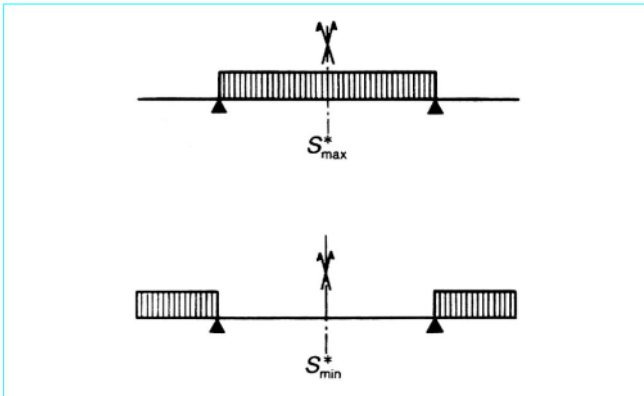


Figure 72 – Exemple simple de cas de charge donnant les  $S^*$  extrêmes

- à une charge permanente uniforme (poids propre  $g$ , charge de superstructure  $g'$ ) donnant un moment positif dans la section médiane ;
- à une charge variable d'exploitation assimilable à une charge uniformément répartie de valeur caractéristique  $q$ .

La figure 72 définit les deux cas de charges extrêmes à considérer pour la justification de la section médiane. Les sollicitations de calcul correspondantes s'écrivent (en prenant leurs éléments de réduction par rapport à  $A_p$  et en supposant  $\gamma_{Q1} = 1,5$ ) :

$$S_{\max}^* \begin{cases} N^* = \gamma_P P_m \\ \mathcal{M}_{\max}^* = 1,35 (M_g + M_g') + 1,5 M_{q\max} \end{cases} \quad (\text{avec } M_{q\max} > 0)$$

$$S_{\min}^* \begin{cases} N^* = \gamma_P P_m \\ \mathcal{M}_{\min}^* = M_g + M_g' + 1,5 M_{q\min} \end{cases} \quad (\text{avec } M_{q\min} < 0)$$

### 7.5.2 Résistance de la section

Elle est évaluée non pas à partir des diagrammes caractéristiques contraintes-déformations des matériaux, mais à partir de leurs diagrammes de calcul (figure 73) obtenus en faisant subir aux premiers des affinités de rapports  $1/\gamma_m$  parallèlement :

- à l'axe des contraintes pour le béton (avec, en général,  $\gamma_b = 1,5$ ) ;
- à la droite de Hooke pour les aciers, qu'ils soient passifs ou de précontrainte (et avec  $\gamma_s = 1,15$ ).

En outre, pour le béton, la résistance caractéristique  $f_{cj}$  est affectée du coefficient réducteur 0,85 pour tenir compte de sa diminution en fonction de la durée d'application de la charge (effet Rüsck).

### 7.5.3 Conduite des justifications

Pour mener à bien la justification d'une section aux ELU, il n'est guère envisageable, tout au moins lorsqu'on opère manuellement, de calculer directement les déformations et les contraintes qui apparaissent dans la section sous l'effet de  $S^*$ , car ce calcul devient très complexe dès qu'on s'écarte, comme ici, du comportement élastique des matériaux (par contre, certains programmes procèdent à ce calcul direct).

En revanche, il n'y a aucune difficulté à calculer autant de sollicitations limites  $\bar{S}_u$  qu'on le désire. Pour obtenir une telle sollicitation de flexion composée qui entraîne l'apparition d'un état-limite ultime dans la section, il suffit de partir d'un diagramme de déformation limite de la section (diagramme passant par l'un des pivots A, B, C, A', B' ou C' définis au paragraphe 7.3), de remonter aux contraintes par l'intermédiaire des diagrammes contraintes-déformations de calcul et de déterminer la sollicitation  $\bar{S}_u$  qu'équilibrent ces contraintes.

Si l'on définit les sollicitations par leurs éléments de réduction en G et si l'on se place dans un plan  $(N, M)$ , l'ensemble des sollicitations  $\bar{S}_u (\bar{N}_u, \bar{M}_u)$ , dont chacune peut être représentée par un point de ce plan, définit une courbe fermée dite courbe d'interaction effort normal-moment fléchissant (figure 74).

Cette courbe délimite le domaine de résistance à la section, et il suffit de s'assurer que le point représentatif de  $S^* (N^*, M^*)$  est bien à l'intérieur de ce domaine.

En pratique, il est hors de question de calculer la courbe d'interaction point par point. Compte tenu de la convexité du domaine, il suffit de déterminer les deux points d'intersection de cette courbe avec la verticale ou l'horizontale passant par  $S^*$  et de vérifier que  $S^*$  est bien entre ces deux points.

Ainsi, sur la figure 74, a-t-on défini les deux états-limites équilibrant  $N = N^*$ . Les moments correspondants sont  $\bar{M}_{u\min}$  et  $\bar{M}_{u\max}$  et l'on doit avoir :

$$\bar{M}_{u\min} \leq M^* \leq \bar{M}_{u\max}$$

En fait, comme on l'a vu au paragraphe 7.5.1, deux sollicitations de calcul sont, en général, à considérer :

$$S_{\max}^* \begin{cases} N^* = \gamma_P P_m \\ M_{\max}^* \end{cases} \quad \text{et} \quad S_{\min}^* \begin{cases} N^* = \gamma_P P_m \\ M_{\min}^* \end{cases}$$

Il y a lieu, dans ces conditions, de vérifier :

$$M_{\max}^* \leq \bar{M}_{u\max}$$

$$M_{\min}^* \geq \bar{M}_{u\min}$$

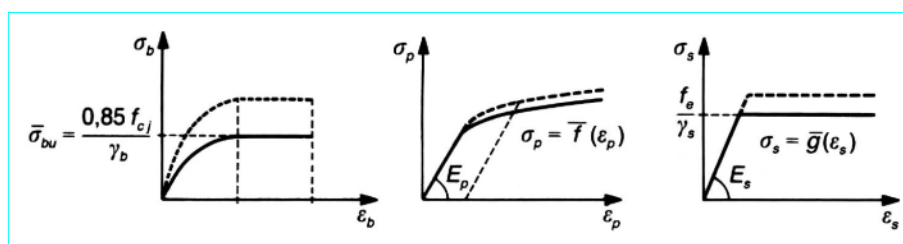


Figure 73 – Diagrammes contraintes-déformations de calcul

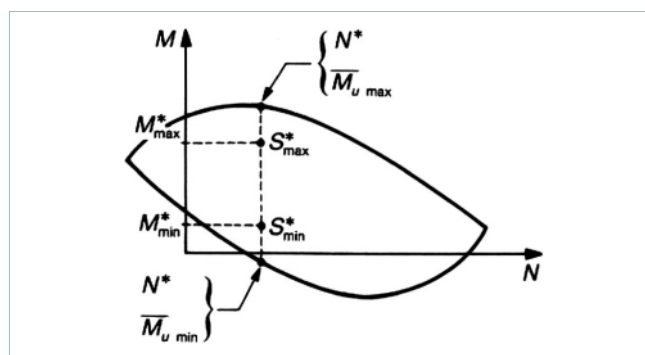


Figure 74 – Courbe d'interaction effort normal, moment fléchissant

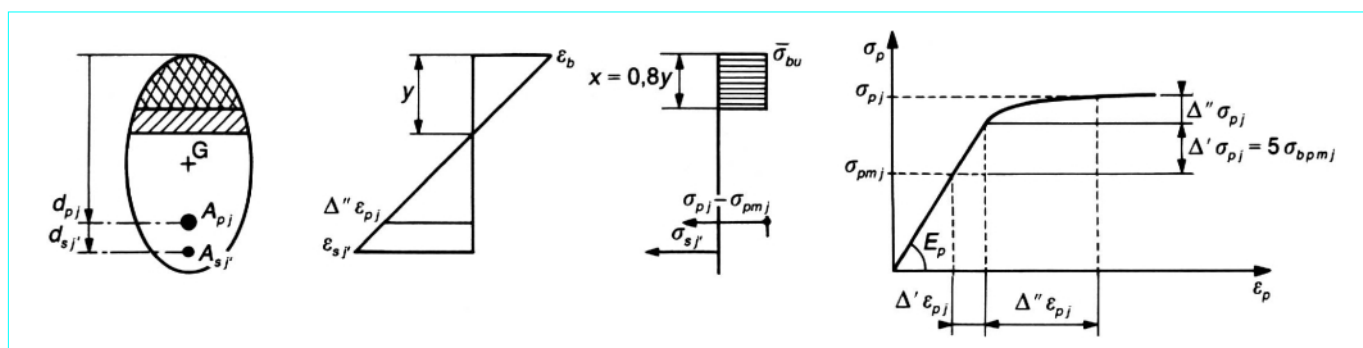


Figure 75 – Diagramme limite de déformation dans une section et contraintes correspondantes

### 7.5.4 Mise en équations du problème

Prenons l'exemple simple de la section médiane d'une travée indépendante que l'on voudrait justifier sous l'effet de  $S_{\max}^*(N^*, M_{\max}^*)$ . Comme nous l'avons vu au paragraphe 7.5.3,

on va chercher la sollicitation limite  $(N^*, \bar{M}_{u \max})$ , point d'intersection le plus haut de la courbe d'interaction avec la verticale  $N = N^*$ .

Nous admettons, *a priori*, que le diagramme limite de déformation de la section correspondant à ce point appartient à l'un des domaines (1) ou (2) précédemment définis (figure 67), auquel cas il est légitime d'utiliser, pour le béton, le diagramme rectangulaire simplifié.

Si l'on définit les sollicitations par leurs éléments de réduction au niveau du centre de gravité G de la section, les équations définissant un état-limite appartenant à l'un des domaines (1) ou (2) s'écrivent :

$$\bar{N}_u = B(x) \bar{\sigma}_{bu} - \sum_j A_{pj} (\sigma_{pj} - \sigma_{pmj}) - \sum_{j'} A_{sj'} \sigma_{sj'} \quad (100)$$

$$\bar{M}_u = B(x) e_B(x) \bar{\sigma}_{bu} - \sum_j A_{pj} (\sigma_{pj} - \sigma_{pmj}) e_{pj} - \sum_{j'} A_{sj'} \sigma_{sj'} e_{sj'} \quad (101)$$

$$\frac{\Delta'' \varepsilon_{pj}}{\varepsilon_b} = \frac{d_{pj} - y}{y} = \frac{0,8 d_{pj}}{x} - 1 \quad (102)$$

$$\frac{\varepsilon_{sj'}}{\varepsilon_b} = \frac{0,8 d_{sj'}}{x} - 1 \quad (103)$$

$$\sigma_{pj} = \bar{f} (\varepsilon_{pmj} + \Delta' \varepsilon_{pj} + \Delta'' \varepsilon_{pj}) \quad (104)$$

$$\sigma_{sj'} = \bar{g} (\varepsilon_{sj'}) \quad (105)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{soit } \varepsilon_b = \varepsilon_{bu} \\ \text{soit } \Delta'' \varepsilon_{pj} = \Delta'' \varepsilon_{pu} \text{ ou } \varepsilon_{sj'} = \varepsilon_{su} \text{ pour l'acier le plus bas} \end{array} \right\} \quad (106)$$

avec  $B(x)$  aire de la surface hachurée (figure 75),  
 $e_B(x)$  excentricité de son centre de gravité par rapport à G,  
 $e_{pj}$  et  $e_{sj'}$  excentricité des différentes armatures par rapport à G.

Si l'on fait, dans l'équation (100),  $N_u = N^*$  (connu), on obtient ainsi un système comportant autant d'équations que d'inconnues :

$$x, \sigma_{pj}, \sigma_{sj'}, \varepsilon_{sj'}, \Delta'' \varepsilon_{pj}, \varepsilon_b \text{ et } \bar{M}_u$$

( $\bar{M}_u$  n'est alors rien d'autre que le moment  $\bar{M}_{u\max}$  cherché).

Dans le cas le plus général, on résout ce système par approximations successives ; d'où  $\bar{M}_{u\max}$ , et la justification consiste à s'assurer que :

$$M_{\max}^* \leq \bar{M}_{u\max}$$

## 8. Résistance à l'effort tranchant

### 8.1 Généralités

Alors que la résistance à la flexion conditionne les membrures d'une poutre, c'est la résistance à l'effort tranchant qui permet de dimensionner les âmes et de préciser le tracé à donner aux câbles dans les zones où la flexion n'est pas prépondérante.

Tout comme vis-à-vis de la flexion, une double vérification est de règle :

- aux ELS, des critères d'intégrité permettent de limiter la probabilité de fissuration du béton ;
- aux ELU, le schéma classique du treillis conduit au dimensionnement des armatures transversales et au contrôle de la contrainte de compression dans les bielles.

#### 8.1.1 Valeur de l'effort tranchant à considérer

Dans la section droite  $\Sigma$  d'une poutre, l'effort tranchant est la composante *verticale* (en réalité selon  $Gy$ ), comptée positivement vers le haut, de la somme des forces appliquées à gauche de  $\Sigma$ . Ces forces comprennent :

- les charges extérieures (et leurs réactions d'appui) donnant l'effort tranchant extérieur  $V_{ext}$  ;

— les forces  $\vec{F}_{ig}$  que le câble exerce sur le béton à gauche de  $\Sigma$  (§ 1.3.3.2) et qui génèrent l'effort tranchant isostatique de précontrainte  $P \sin \alpha$  (ou  $\Sigma P_j \sin \alpha_j$  si plusieurs câbles traversent la section) (figure 76) ;

— enfin, si la poutre est hyperstatique, les réactions hyperstatiques de précontrainte  $\vec{R}_{ig}$  (à gauche de  $\Sigma$ ) produisant un effort tranchant hyperstatique de précontrainte  $\mathcal{V}$ .

Au total, donc :

$$V = V_{ext} + P \sin \alpha + \mathcal{V}$$

La précontrainte permet donc de modifier l'origine des efforts tranchants grâce à l'inclinaison  $\alpha$  du câble, comme celle des moments fléchissants (grâce à l'excentricité  $e_0$  du câble).

Il convient de remarquer que, selon le cas de charge,  $V_{ext}$  peut varier entre  $V_{ext\min}$  et  $V_{ext\max}$  et qu'en conséquence  $V$  peut varier entre  $V_{\min}$  et  $V_{\max}$ .

Les vérifications à l'effort tranchant doivent donc se faire en considérant deux cas de charges extrêmes (comme les vérifications à la flexion).

### 8.1.2 Tolérances réglementaires

On peut constater expérimentalement que, pour une valeur donnée de l'effort tranchant, le comportement d'une poutre est d'autant meilleur que les charges qui génèrent cet effort tranchant sont plus proches de l'appui (elles se transmettent *directement* à cet appui lorsqu'elles en sont voisines).

Pour tenir compte de ce phénomène, il est admis réglementairement, pour évaluer  $V$  :

- de négliger les charges situées à une distance  $x$  d'un appui inférieure à  $h/2$  ( $h$  désignant la hauteur de la poutre) ;
- de ne prendre en compte les charges situées à une distance  $x$  d'un appui comprise entre  $0,5h$  et  $1,5h$  que pour une fraction  $x/1,5h$  de leur valeur.

Enfin, il est considéré comme inutile de vérifier les sections situées à une distance inférieure à  $h/2$  d'un appui intermédiaire d'une poutre continue.

## 8.2 Résistance du béton avant fissuration

### 8.2.1 Expression des contraintes de cisaillement

Dans une section quelconque, au niveau  $y$ , la contrainte moyenne de cisaillement vaut :

$$\tau(y) = \frac{VS(y)}{Ib(y)} \quad (107)$$

- avec  $I$  moment d'inertie de la section par rapport à  $Gz$ ,  
 $S(y)$  moment statique par rapport à  $Gz$  de la surface hachurée (sur la figure 77) délimitée par l'horizontale d'ordonnée  $y$ ,  
 $b(y)$  largeur nette au niveau  $y$  obtenue en soustrayant de l'épaisseur brute tous les évidements se trouvant au niveau considéré, exception faite des conduits injectés au coulis de ciment qui ne sont comptés que pour leur demi-diamètre d'encombrement (on trouve en effet, expérimentalement, qu'un conduit normalement injecté participe à la résistance de la poutre).



### 8.2.2 État des contraintes dans une âme (ou dans une membrure)

On considère que, dans une âme, on a un état de contraintes plan, défini par  $\sigma$  et  $\tau$ , dont il s'agit d'apprécier la convenance en tout point.

Dans le cas d'une poutre en double té (figure 78),  $\tau$  varie peu sur la hauteur de l'âme (sauf au droit d'une gaine) mais  $\sigma$  varie beaucoup. Les conditions les plus défavorables se rencontrent donc :

- soit aux enracinements sur les membrures ;
- soit au niveau d'un câble.

L'expérience montre toutefois qu'on peut, le plus souvent, se contenter de la règle simple suivante.

Lorsque l'âme est d'épaisseur constante, on ne fait la vérification qu'en G, sous réserve d'introduire, dans le calcul de  $\tau$ , la longueur nette minimale que présente l'âme sur toute sa hauteur :  $b = \min [b(y)]$  et non pas sa largeur nette au niveau de G :  $b(0)$ .

La contrainte conventionnelle ainsi obtenue a pour expression :

$$\tau_G = \frac{V}{bZ} \quad \text{avec} \quad Z = \frac{I}{S(0)} \quad (108)$$

Le bras de levier du couple élastique  $Z$  vaut  $2/3 h$  pour une section rectangulaire et environ  $0,8 h$  pour une section en double té.

L'énorme avantage de cette règle simple réside en ce que la contrainte normale associée  $\sigma_G = P/B$  est immédiatement connue (sans que l'on ait besoin de calculer le moment fléchissant concomitant à l'effort tranchant qu'on a pris en compte dans le calcul de  $\tau$ ).

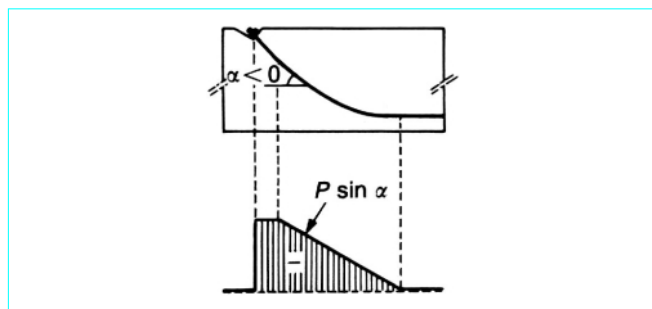


Figure 76 – Effort tranchant isostatique de précontrainte

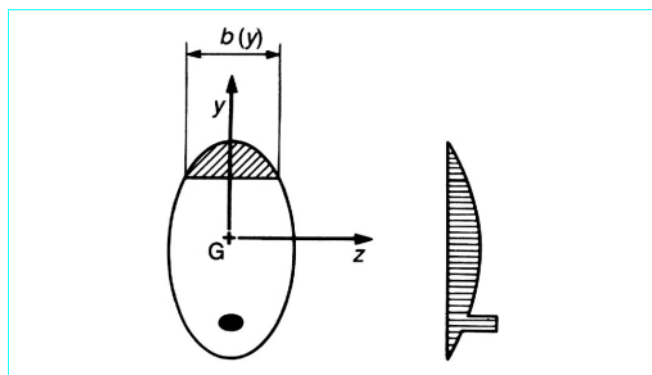


Figure 77 – Contraintes de cisaillement

### 8.2.3 Représentation de l'état des contraintes par le cercle de Mohr

Plaçons-nous en un point O quelconque d'une âme ou d'une membrure.

À une facette Q passant par O on associe un système d'axes  $O_n$ ,  $O_t$  qui lui est lié (figure 79).

Lorsque Q tourne autour de O, l'extrémité q du vecteur contrainte décrit, par rapport aux axes mobiles  $O_n$ ,  $O_t$ , un cercle, le cercle de Mohr, de centre  $\Omega$ .

q tourne deux fois plus vite autour de  $\Omega$  que Q autour de O, et en sens inverse.

Les points a et b où le cercle de Mohr coupe  $O_n$  (figure 80) représentent les contraintes sur deux facettes A et B perpendiculaires qui ne subissent aucune contrainte de cisaillement.

Sur A s'exerce la contrainte principale de traction  $\sigma_3$ , sur B la contrainte principale de compression  $\sigma_1$ .

On admet généralement que les fissures ont tendance à se produire suivant A, autrement dit qu'elles sont parallèles aux isostatiques de compression.

Le cercle de Mohr est facile à construire.

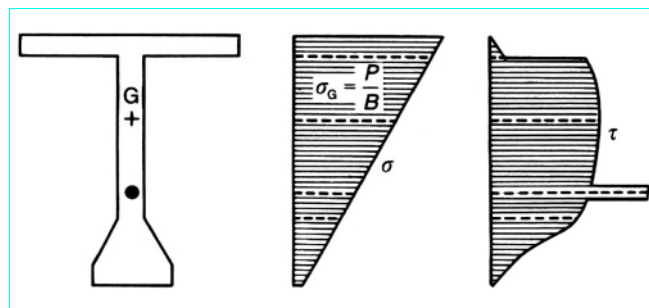


Figure 78 – État des contraintes dans l'âme d'une poutre

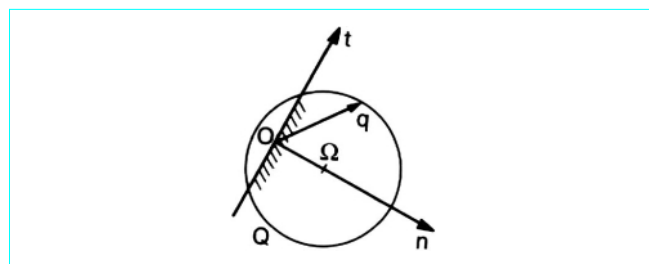


Figure 79 – Axes de Mohr

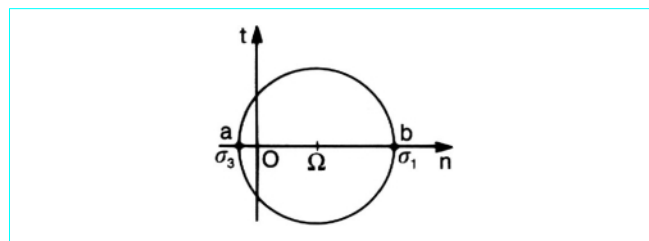


Figure 80 – Cercle de Mohr

### 8.2.3.1 Poutre sans étriers actifs

En O, sur la facette W contenue dans le plan de la section droite s'exerce une contrainte de composantes normale  $\sigma$  et tangente  $\tau$ . Sur la facette perpendiculaire H, on retrouve la contrainte de cisaillement  $\tau$  (en vertu du théorème de Cauchy).

Dans le plan  $n, t$ , les points représentatifs de ces contraintes sur les facettes W et H,  $w(\sigma, \tau)$  et  $h(O, -\tau)$  sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr (figure 81).

Le centre du cercle a pour abscisse :

$$p = \overline{O\Omega} = \frac{\sigma}{2} \quad (109)$$

et son rayon vaut :

$$r = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \quad (110)$$

Enfin, l'angle  $\beta$  que fait la contrainte principale de compression avec la fibre moyenne est donné par :

$$\beta = (\vec{H}, \vec{A}) = -\frac{1}{2} (\vec{\Omega h}, \vec{\Omega a}) = \frac{1}{2} (\vec{\Omega b}, \vec{\Omega w})$$

avec  $\tan 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma}$  (111)

Au niveau de G,  $\sigma$  est positif et  $\beta$  inférieur à  $45^\circ$  (valeur que l'on obtiendrait en béton armé sur la fibre neutre où  $\sigma = 0$ ).

### 8.2.3.2 Poutre avec étriers actifs

Ces étriers actifs, généralement verticaux (perpendiculaires à la fibre moyenne), sont des unités de précontrainte de faible puissance (souvent des monotorons ou des barres) que l'on place dans les âmes pour y créer une contrainte de compression sur les facettes H. Ils doivent être assez serrés pour que les efforts concentrés sous leurs ancrages soient diffusés dans les âmes sans y laisser de zones non précontraintes. Leur utilisation n'est intéressante économiquement que lorsque la poutre est de grande hauteur et qu'il est particulièrement rentable de l'alléger (très grandes travées construites par encorbellement par exemple).

De tels étriers actifs verticaux ne modifient pas la contrainte sur la facette W, non plus que la composante tangente de la contrainte sur la facette H. Par contre, ils créent une composante normale  $\sigma_y$  sur cette facette H (figure 82).

Si, pour éviter toute ambiguïté, nous désignons par  $\sigma_x$  la composante normale de la contrainte sur la facette W (égale au  $\sigma$  du paragraphe 8.2.3.1), le point  $w(\sigma_x, \tau)$  est inchangé, mais  $h(\sigma_y, -\tau)$  se déplace du côté des compressions.

On a cette fois-ci :

$$p = \overline{O\Omega} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (112)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (113)$$

et  $\beta = (\vec{H}, \vec{A}) = \frac{1}{2} (\vec{\Omega b}, \vec{\Omega w})$

avec  $\tan 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$  (114)

La précontrainte verticale par étriers actifs permet donc de décaler le cercle de Mohr du côté des compressions et de diminuer son rayon.

On peut même faire disparaître toute contrainte de traction.

Il suffit pour cela que :

$$p \geq r$$

soit  $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2$   
ou  $\sigma_y \geq \frac{\tau^2}{\sigma_x}$  (115)

En fait, il ne sert à rien de faire passer le point a à droite du point O, car alors le cercle de Mohr n'est plus le cercle de diamètre ab, mais le cercle de diamètre Ob (intervention de la 3<sup>e</sup> contrainte principale  $\sigma_2 = 0$  agissant sur les facettes parallèles au plan de l'âme).

## 8.2.4 Convenance de l'état des contraintes

### 8.2.4.1 Courbe intrinsèque du béton

La courbe intrinsèque du béton  $\Gamma_r$  est l'enveloppe des cercles de Mohr de rupture. C'est une courbe étroitement fermée du côté des tractions et largement ouverte du côté des compressions (figure 83). En fait, compte tenu de la 3<sup>e</sup> contrainte principale  $\sigma_2 = 0$ , elle est, dans la pratique, limitée du côté des compressions, par le cercle de Mohr de compression simple.

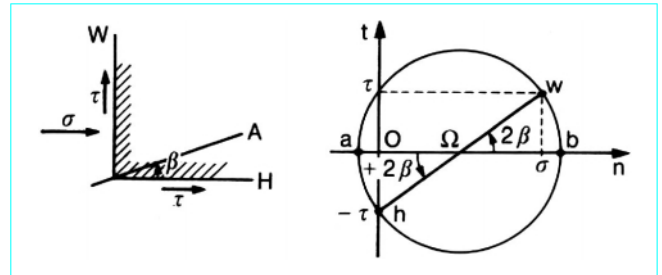


Figure 81 – Cercle de Mohr (sans étriers actifs)

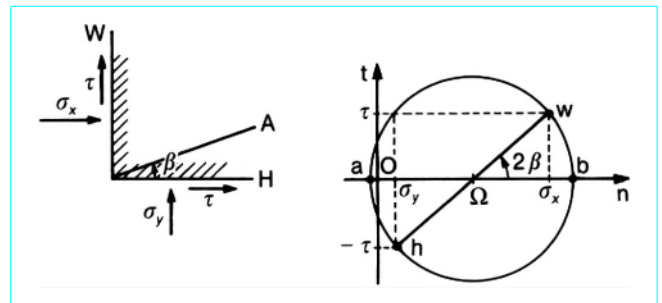


Figure 82 – Cercle de Mohr (avec étriers actifs verticaux)

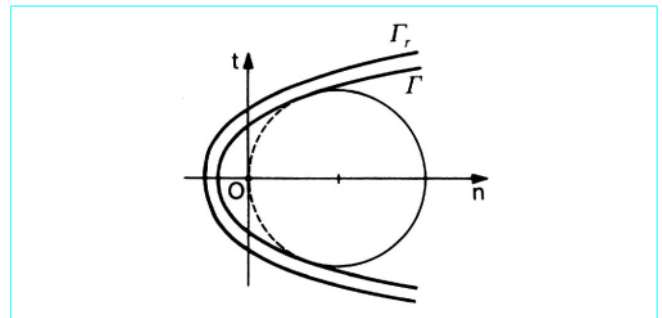


Figure 83 – Courbe intrinsèque du béton

Si l'on veut avoir une certaine sécurité sur les contraintes, il convient de raisonner, non pas sur  $\Gamma_r$ , mais sur une courbe intrinsèque de sécurité  $\Gamma$ , intérieure à  $\Gamma_r$  (s'en déduisant, par exemple, par une homothétie de centre O et de rapport  $1/\gamma$ ).

### 8.2.4.2 Définition pratique du domaine de sécurité

La courbe intrinsèque est malcommode à exploiter dans la pratique courante ; il faudrait, en effet, pour s'assurer de la convenance d'un état de contraintes, construire le cercle de Mohr correspondant et vérifier qu'il est bien tout entier à l'intérieur de  $\Gamma$ .

Il est beaucoup plus facile de raisonner sur la condition que doivent respecter  $p$  et  $r$  pour que le cercle de Mohr défini par ces deux paramètres soit intérieur à  $\Gamma$ .

Voyons en effet quelle forme revêt cette condition.

Pour ce faire, supposons donné  $\Omega$ , à l'intérieur de  $\Gamma$ , donc  $p = \overline{O\Omega}$  (figure 84). Si, partant de  $r=0$ , on dilate progressivement le rayon du cercle de centre  $\Omega$ , il est clair que pour une certaine valeur  $r_0$  (fonction de  $p$ ) on obtiendra le contact avec  $\Gamma$  et que l'état de contraintes défini par  $p$  et  $r$  ne sera acceptable que si :

$$r \leq r_0(p) \quad (116)$$

ce qui s'écrit encore :

$$r^2 - p^2 \leq [r_0(p)]^2 - p^2 = f(2p) \quad (117)$$

Compte tenu des équations (112) et (113), on a :

$$\begin{aligned} r^2 - p^2 &= \tau^2 - \sigma_x \sigma_y \\ 2p &= \sigma_x + \sigma_y \end{aligned}$$

et l'inégalité (117) se ramène à :

$$\tau^2 - \sigma_x \sigma_y \leq f(\sigma_x + \sigma_y) \quad (118)$$

Cette condition (118) entre les deux invariants ( $\sigma_x + \sigma_y$ ) et ( $\tau^2 - \sigma_x \sigma_y$ ) du tenseur des contraintes est d'emploi très pratique puisqu'elle ramène la vérification d'un état de contraintes à celle d'une inégalité.

Dans le cas particulier (très fréquent) où l'on n'a pas d'étriers actifs ( $\sigma_x = \sigma$  ;  $\sigma_y = 0$ ), l'inéquation (118) devient :

$$\tau^2 \leq f(\sigma) \quad (119)$$

Cette relation entre  $\tau$  et  $\sigma$  définit le domaine de stabilité du béton délimité par la courbe limite au cisaillement  $\mathcal{L}$  d'équation :

$$\tau^2 = f(\sigma) \quad (120)$$

Il ne faut pas confondre cette courbe limite au cisaillement (à l'intérieur de laquelle doit se trouver le point  $\sigma, \tau$ ) avec la courbe intrinsèque  $\Gamma$  (à l'intérieur de laquelle doit se trouver le cercle de Mohr) (figure 85).

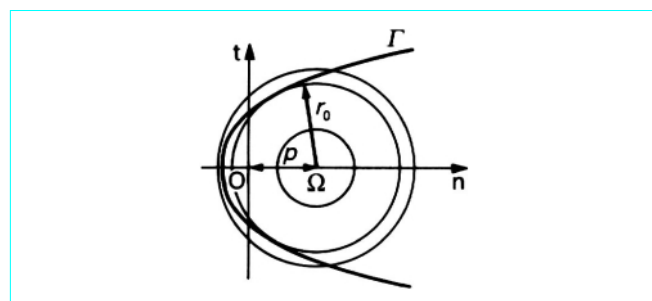


Figure 84 – Cercle de Mohr limite de rayon  $r_0(p)$

Si l'on connaît l'expression analytique de  $\mathcal{L}$ , il est très facile d'établir l'équation de  $\Gamma$ .  $\Gamma$  est, en effet, l'enveloppe des cercles de Mohr limites :

$$\begin{cases} (n-p)^2 + t^2 - r^2 = 0 \\ \text{avec } r^2 - p^2 = f(2p) \end{cases}$$

donc de la famille de cercles :

$$n^2 + t^2 - 2pn - f(2p) = 0 \quad (121)$$

Pour obtenir cette enveloppe, il suffit d'associer à (121) l'équation dérivée par rapport à  $p$  :

$$n + f'(2p) = 0 \quad (122)$$

En éliminant  $p$  entre (121) et (122), on trouve l'équation de  $\Gamma$ .

### 8.2.4.3 Prescriptions réglementaires (justifications aux ELS)

Les conditions réglementaires de sécurité s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau^2 - \sigma_x \sigma_y \leq k f_{tj} (f_{tj} + \sigma_x + \sigma_y) & \text{avec } k = 0,4 \quad (123) \\ \tau^2 - \sigma_x \sigma_y \leq \frac{2 f_{tj}}{f_{cj}} (k' f_{cj} - \sigma_x - \sigma_y) (f_{tj} + \sigma_x + \sigma_y) & \text{avec } k' = 0,6 \quad (124) \end{cases}$$

La relation (123), lorsqu'on fait  $k=1$ , traduit la non-rupture par traction du béton (elle exprime que  $\sigma_3 \geq -f_{tj}$  en désignant par  $\sigma_3$  la contrainte principale de traction) ; la relation (124), avec  $k'=1$ , correspond à la non-rupture par compression-cisaillement.

La relation (123) est prépondérante tant que :

$$\sigma_x + \sigma_y \leq \left(k' - \frac{k}{2}\right) f_{cj} = 0,4 f_{cj}$$

La courbe limite au cisaillement  $\mathcal{L}$  a ainsi une double définition (figure 86) :

- arc de parabole, correspondant à (123) pour  $\sigma \leq 0,4 f_{cj}$  ;
- arc d'ellipse, correspondant à (124) pour  $\sigma \geq 0,4 f_{cj}$ .

## 8.3 Comportement après fissuration

### 8.3.1 Approche qualitative

Les fissures se développent sensiblement selon les isostatiques de compression. Or, l'inclinaison de la contrainte principale de compression est, en l'absence d'étriers actifs, définie par :

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma}$$

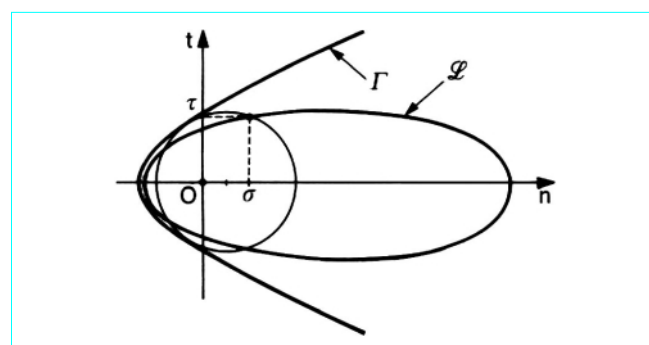


Figure 85 – Courbe intrinsèque et courbe limite au cisaillement

Quand on se rapproche des fibres extrêmes d'une poutre,  $\tau \rightarrow 0$  et  $\tan 2\beta \rightarrow 0$ . Selon le signe de  $\sigma$ ,  $\beta \rightarrow 0$  ( $\sigma > 0$ ) ou  $\beta \rightarrow \pi/2$  ( $\sigma < 0$ ) comme le montre la figure 87.

Considérons donc une poutre indépendante précontrainte, soumise à une charge progressivement croissante.

En général, la fissuration ne s'amorce qu'après apparition d'une zone tendue, en partie médiane, au voisinage de la fibre inférieure.

Immédiatement avant fissuration, les lignes isostatiques ont alors l'allure de la figure 88.

Ce schéma explique bien les deux familles de fissures que l'on peut observer sur une telle poutre :

- fissures verticales de flexion en zone médiane ;
- fissures inclinées d'effort tranchant affectant l'âme, à proximité des appuis.

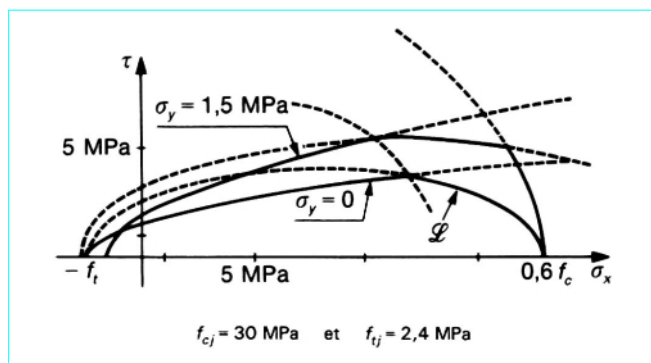


Figure 86 – Valeurs limites de  $\tau$  pour  $\sigma_y = 0$  et 1,5 MPa

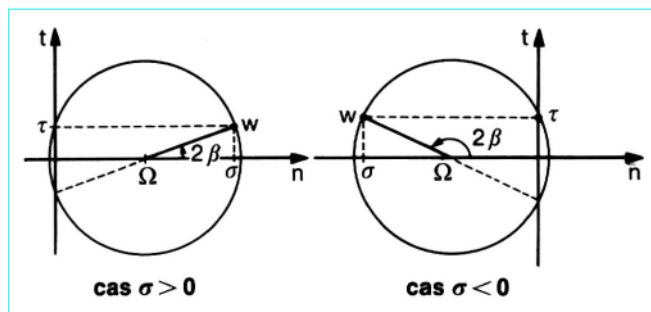


Figure 87 – Valeurs de  $\beta$  selon le signe de  $\sigma$

Les charges se transmettent aux appuis par l'intermédiaire de bielles, en forme de S allongé. Les contraintes de compression  $\sigma_1$  de ces bielles développent, du fait de leur courbure, des poussées au vide et donc des contraintes de traction  $\sigma_3$ .

Ces contraintes, d'abord équilibrées par la résistance à la traction du béton, font apparaître des fissures et, en l'absence d'étriers, la poutre se rompt brutalement.

Si, au contraire, on a pris la précaution de disposer des étriers dans les âmes, ces armatures se mettent en traction dès que la fissuration s'amorce et elles remontent les efforts de compression des bielles jusqu'à la membrure comprimée de la poutre.

L'âme résiste selon un schéma de treillis multiple dont :

- les diagonales comprimées sont matérialisées par les bielles de béton ;
- les montants tendus sont représentés par les armatures d'âme.

### 8.3.2 Équilibre du treillis

Limitons-nous à l'étude d'un panneau (âme ou membrure) de largeur nette  $b$  ne comportant que des armatures transversales (actives et passives) perpendiculaires à la fibre moyenne de la poutre.

Pour modéliser le treillis, on suppose les fissures rectilignes et inclinées de  $\beta$  sur la fibre moyenne.

Les cours successifs d'armatures transversales passives ont une section  $A_t$  et sont espacés de  $s_t$ .

Les armatures transversales actives sont tendues à  $F_t$  avant fissuration et sont espacées de  $s'_t$ .

Considérons alors un élément de plan, perpendiculaire au panneau, parallèle à la fibre moyenne et de longueur unité (figure 89).

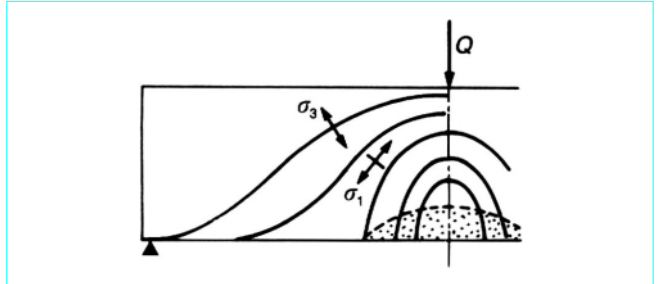


Figure 88 – Isostatiques de compression

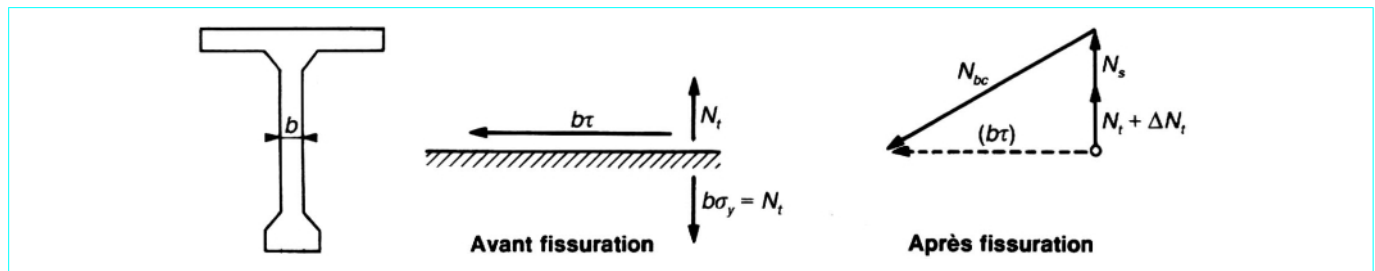


Figure 89 – Équivalence des systèmes de forces traversant un élément de plan avant et après fissuration

**Avant fissuration**, cet élément était traversé par un effort tangent  $b\tau$ , un effort normal de compression du béton  $b\sigma_y = N_t = F_t/s'_t$  et un effort de traction  $N_t = F_t/s'_t$  dans les armatures transversales de précontrainte.

**Après fissuration**, il est intéressé par les forces :

- $N_t + \Delta N_t = \frac{F_t + \Delta F_t}{s'_t}$  transmise par les armatures transversales de précontrainte qui se sont surtendues chacune de  $\Delta F_t$  ;
- $N_s = \frac{A_t \sigma_{st}}{s_t}$ , force de traction dans les armatures passives ;
- $N_{bc} = b \sigma_{bc} \sin \beta$ , effort de compression dans les bielles qui prennent appui sur lui.

L'équivalence de ces deux systèmes de forces s'écrit :

$$\begin{cases} N_t + \Delta N_t + N_s = b \tau \tan \beta & (125) \\ N_{bc} = \frac{b \tau}{\cos \beta} & (126) \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} \frac{A_t \sigma_{st}}{b s_t} + \frac{F_t + \Delta F_t}{b s'_t} = \tau \tan \beta & (127) \\ \sigma_{bc} = \frac{2 \tau}{\sin 2\beta} & (128) \end{cases}$$

L'équation (128) donne immédiatement  $\sigma_{bc}$ , contrainte de compression dans les bielles. En revanche, l'équation (127) ne permet pas d'isoler les deux inconnues  $\sigma_{st}$  et  $\Delta F_t$  (ce qui traduit l'hyperstaticité interne du treillis lorsque l'on utilise simultanément deux types distincts d'armatures transversales).

Toutefois, on peut en déduire une condition nécessaire de sécurité. Si l'on désigne en effet par :

$\bar{F}_t$  l'effort de plastification d'une armature transversale de précontrainte ;

$\bar{\sigma}_{st}$  la contrainte de plastification des armatures transversales passives ;

$\bar{\sigma}_{bc}$  la contrainte entraînant la plastification du béton des bielles, ces différentes valeurs incluant, pour le calcul, un coefficient de sécurité  $\gamma_m$  sur le matériau correspondant, on doit avoir :

— pour les aciers :

$$\tau \leq \left[ \frac{A_t \bar{\sigma}_{st}}{b s_t} + \frac{\bar{F}_t}{b s'_t} \right] \cot \beta \quad (129)$$

— et, d'après (128) pour le béton :

$$\frac{2 \tau}{\sin 2\beta} \leq \bar{\sigma}_{bc} \quad (130)$$

Ces conditions nécessaires sont généralement considérées comme suffisantes.

C'est très discutable en ce qui concerne (129).

En effet, les conditions d'adhérence sont souvent très différentes pour les armatures passives et pour les armatures de précontrainte, surtout lorsque ces dernières sont **lisses** (barres ou fils lisses), ou **non injectées** à l'aide d'un produit consistant, capable de rétablir l'adhérence avec le béton (cas des torons gainés graissés). Les premières peuvent être largement plastifiées, à la limite de la rupture, au droit d'une fissure, alors que les secondes ne connaissent encore que de faibles surtensions.

Il convient, par suite, d'être **très prudent** dans le choix de la valeur de calcul  $\bar{F}_t$ .

### 8.3.3 Confrontation avec l'expérience

On peut, en laboratoire, étudier le comportement d'une poutre à âme mince – uniquement munie d'étriers passifs – soumise à un chargement croissant et mesurer, aux différents paliers de chargement, les déformations des étriers et celles du béton.

En ce qui concerne les étriers, on remonte très facilement des déformations aux contraintes, ce qui permet de tracer la courbe  $\sigma_{st} = f(V)$  (figure 90). Il apparaît ainsi que :

- les étriers ne se mettent en charge qu'à partir du moment où l'âme se fissure ;
- ils travaillent sensiblement moins que ne l'indique la théorie classique du treillis.

Cet écart avec la théorie s'explique par :

- la prise en charge d'une fraction de l'effort tranchant par la membrure comprimée de la poutre ;
- différents effets secondaires :
  - effet d'engrènement dû à la rugosité des lèvres des fissures,
  - effet de goujon des armatures.

On peut tenir compte de cette réalité expérimentale en ajoutant au deuxième membre de la condition de sécurité (129) un terme  $C$  exprimant la participation de la membrure comprimée.

L'équation (129) devient ainsi :

$$\tau \leq \left[ \frac{A_t \bar{\sigma}_{st}}{b s_t} + \frac{\bar{F}_t}{b s'_t} \right] \cot \beta + C \quad (131)$$

Le béton, par ailleurs, s'avère sensiblement plus déformable que ne le laisse présumer son diagramme contraintes-déformations mesuré sur éprouvettes cylindriques soumises à compression simple.

En se basant sur un tel diagramme, on trouve en effet une composante verticale de l'effort dans les bielles intéressées nettement supérieure à l'effort tranchant  $V$ , ce qui est impossible. En réalité, aux déformations mesurées correspondent des contraintes normales sensiblement inférieures à celles qu'on lit sur le diagramme de compression simple.

Cela est totalement confirmé par des essais sur panneaux élémentaires comprimés longitudinalement et munis d'armatures transversales soumises à un effort de traction concomitant (ce qui modélise bien la sollicitation appliquée à une bielle traversée par des étriers).

La mise en extension des étriers a, en fait, deux conséquences sur le béton des bielles :

- elle diminue, comme on vient de le voir sa rigidité ;
- elle le fragilise, en abaissant sa résistance à une fraction de celle qu'on mesure sur cylindre, couramment comprise entre 50 et 70 %.

Il convient donc de se montrer très prudent dans le choix de  $\bar{\sigma}_{bc}$ .

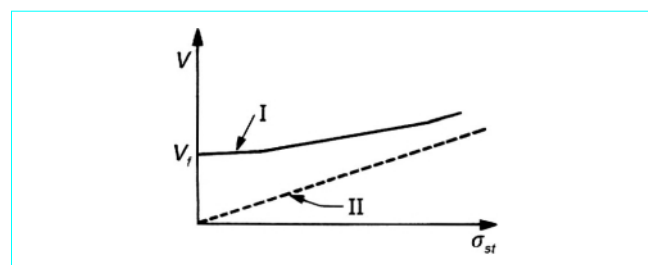


Figure 90 – Comparaison théorie (I)-expérience (II)

### 8.3.4 Prescriptions réglementaires (justifications aux ELU)

Rappelons que les sollicitations de calcul sont définies par :

$$S^* = S \left\{ \gamma_p P_m + 1,35 G_{\max} + G_{\min} + \gamma_{Q_1} Q_{1k} + \sum_{i>1} 1,3 \psi_{0i} Q_{ik} \right\}$$

On admet que les âmes ou les membrures se fissurent sous l'effet de ces sollicitations. L'inclinaison des bielles correspondantes est évaluée conventionnellement comme suit :

— dans les âmes  $\beta^*$  résulte de la formule générale (114) :

$$\tan 2\beta^* = \frac{2\tau^*}{\sigma_x^* - \sigma_y^*} \quad (132)$$

avec  $\beta^* \geq 30^\circ$

dans laquelle  $\tau^*$ ,  $\sigma_x^*$  et  $\sigma_y^*$  représentent les contraintes au niveau G dues à  $S^*$  et calculées dans l'hypothèse d'une distribution élastique ( $\tau^* = V^*/bZ$ ) ;

— dans les membrures, on prend forfaitairement  $\beta^* = 45^\circ$ .

#### 8.3.4.1 Dimensionnement des armatures transversales

Les armatures transversales de précontrainte (étriers actifs), quand il en est besoin, se dimensionnent aux ELS à partir des formules (123) et (124).

Elles sont complétées par des armatures passives transversales résultant de la condition (131) :

$$\tau^* \leq \left[ \frac{A_t \bar{\sigma}_{st}}{bs_t} + \frac{\bar{F}_t}{bs'_t} \right] \cot \beta^* + C = \bar{\tau}_{u1} \quad (133)$$

avec, pour les armatures passives :  $\bar{\sigma}_{st} = f_e/1,15$  ;

et, pour les armatures de précontrainte :  $\bar{F}_t = A_{pt}(f_{prg}/1,15)$ , expression dans laquelle  $A_{pt}$  représente la section d'un cours d'étriers actifs.

Cette dernière valeur est exagérément optimiste compte tenu de la remarque faite au paragraphe 8.3.2. Il convient, en réalité de prendre pour  $\bar{F}_t$  :

- $\bar{F}_t = A_{pt} \frac{f_{peg}}{1,15}$  si les armatures transversales en cause présentent une adhérence de forme et sont logées dans des conduits présentant eux-mêmes une adhérence de forme, à condition qu'ils soient injectés au moyen d'un produit consistant du type coulis de ciment ;

- $\bar{F}_t = A_{pt} \frac{0,9 f_{peg}}{1,15}$  lorsque les conditions précédentes ne sont pas remplies, sauf en ce qui concerne la nature du produit d'injection ;

- $\bar{F}_t = A_{pt} \sigma_{pd}$  lorsque les armatures transversales en question sont protégées par un produit souple (cire ou graisse : c'est le cas des torons gainés-protégés),  $\sigma_{pd}$  représentant leur tension de calcul pour les justifications vis-à-vis des ELS.

Le terme  $C$  de l'équation (133), qui exprime la participation de la membrure comprimée est pris égal à :

- $\frac{f_{ij}}{3}$  dans une âme, à moins qu'elle ne soit intéressée par une reprise de bétonnage effectuée sans soin particulier, auquel cas  $C$  est négligé ;
- 0 dans une membrure.

Enfin, pour éviter que certaines zones de poutre ne se trouvent dispensées d'armatures d'âme, un minimum est partout imposé. Il est défini (dans le cas d'armatures perpendiculaires à la fibre moyenne) par :

$$\frac{A_t}{bs_t} \bar{\sigma}_{st} + \frac{\bar{F}_t}{bs'_t} \geq 0,6 \text{ MPa} \quad (134)$$

Dans le même but, on limite les espacements entre :

— étriers passifs :

$$s_t \leq \min \{0,8h ; 3b_0 ; 1\text{ m}\}$$

avec  $b_0$  épaisseur brute minimale de l'âme ;

— étriers actifs :

$$s'_t \leq 0,8h$$

cette condition est presque toujours moins contraignante que l'impératif pratique d'obtenir une bonne diffusion dans les âmes (§ 8.2.3.2).

#### 8.3.4.2 Justification du béton

Il s'agit de vérifier que la contrainte  $\sigma_{bc}$  dans les bielles ne dépasse pas  $\bar{\sigma}_{bc}$  avec :

$$\bar{\sigma}_{bc} = \frac{2}{3} \times \frac{0,85}{\gamma_b} f_{cj}$$

ce qui, compte tenu de (128), s'écrit :

$$\frac{2\tau^*}{\sin 2\beta^*} \leq \bar{\sigma}_{bc}$$

soit :

$$\tau^* \leq \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{bc} \sin 2\beta^* = \frac{1}{3} \times \frac{0,85}{\gamma_b} f_{cj} \sin 2\beta^* = \bar{\tau}_{u2} \quad (135)$$

Comme  $\beta^*$  est borné inférieurement à  $30^\circ$ , on a :

$$\bar{\tau}_{u2} \geq \frac{1}{3} \times \frac{0,85}{\gamma_b} f_{cj} \sin 60^\circ$$

soit, avec  $\gamma_b = 1,5$  :

$$\bar{\tau}_{u2} \geq \frac{1}{3} \times \frac{0,85}{1,5} f_{cj} \sin 60^\circ \approx \frac{1}{6} f_{cj}$$

## 9. Structures hyperstatiques

### 9.1 Effets hyperstatiques de précontrainte

Considérons une structure soumise à la seule action de sa précontrainte. Nous avons vu (§ 1.3.1) que si l'on désigne par  $\vec{R}_i$  les réactions d'appui développées par cette précontrainte, on a nécessairement :

$$\text{Sys}(\vec{R}_i) \sim \vec{0}$$

Cela implique que, pour une structure isostatique, chaque  $\vec{R}_i$  est nulle. Par contre, il n'en est généralement pas ainsi lorsque la structure est hyperstatique.

Supposons en effet la structure (S)  $n$  fois hyperstatique. Rendons la isostatique en supprimant  $n$  liaisons surabondantes. On obtient de la sorte une structure isostatique associée (S').

Soumis à l'action de la précontrainte, le béton de (S') se déforme, si bien que pour rétablir les liaisons surabondantes de (S) il y a lieu, en général, d'appliquer à (S'), en même temps que la précontrainte,



des forces extérieures selon la ligne d'action des réactions correspondant aux liaisons supprimées : ce sont les réactions hyperstatiques de précontrainte  $\vec{R}_i$ .

Les  $\vec{R}_i$  sont donc les forces qu'il faut appliquer à ( $S'$ ) en même temps que la précontrainte pour que les déplacements de cette structure isostatique respectent les conditions imposées par les liaisons surabondantes de la structure hyperstatique ( $S$ ).

Pour calculer les  $\vec{R}_i$  et les sollicitations correspondantes tout au long de la structure, les deux méthodes données au paragraphe 1.3.3 sont utilisables.

#### ■ Méthode interne (ne s'applique qu'aux systèmes de poutres)

On commence par choisir une structure isostatique ( $S'$ ) associée à la structure hyperstatique ( $S$ ). Les sollicitations  $S_i$ , développées dans ( $S'$ ) par la précontrainte sont parfaitement connues puisque équivalentes, en chaque section, aux forces de tension  $P\vec{t}$  dans les câbles (§ 1.3.3.2) :

$$S_i \sim P\vec{t}$$

D'où les déformations, les déplacements et enfin les  $\vec{R}_i$  qui rendent ces déplacements compatibles avec les liaisons surabondantes de ( $S$ ).

Ces  $\vec{R}_i$  génèrent, tout au long de la structure, des sollicitations hyperstatiques de précontrainte  $S_h$ . Les sollicitations totales de précontrainte s'obtiennent en cumulant  $S_i$  et  $S_h$  :

$$S = S_i + S_h$$

#### ■ Méthode directe

Elle consiste à remplacer d'emblée les câbles par l'ensemble des forces physiques  $\vec{F}_i$  qu'ils exercent sur le béton. On est alors ramené à l'étude d'un cas de charge particulier que l'on traite par les procédés habituels d'analyse structurale.

On obtient de la sorte les sollicitations totales de précontrainte.

## 9.2 Exemples

### 9.2.1 Poutre encastrée à ses deux extrémités avec précontrainte rectiligne

Considérons une poutre de section constante (figure 91) encastrée à la flexion à ses deux extrémités (mais libre de se raccourcir, donc sans blocage vis-à-vis de l'effort normal).

Supposons qu'elle soit précontrainte par un câble rectiligne transmettant une force de tension  $P$  présumée constante sur toute sa longueur.

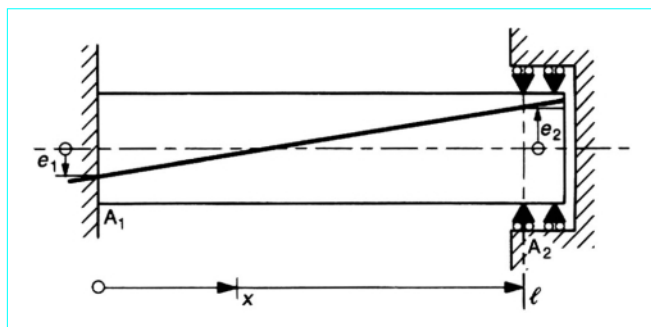


Figure 91 – Poutre encastrée à précontrainte rectiligne

Le tracé du câble a ainsi comme équation (figure 91) :

$$e_0(x) = e_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + e_2 \frac{x}{\ell} \quad (136)$$

La structure considérée ( $S$ ) est deux fois hyperstatique.

On a en effet 5 composantes inconnues des réactions d'appui :

- 2 forces verticales  $R_1$  et  $R_2$  ;
- 1 force horizontale  $H_1$  ( $H_2 = 0$  du fait que l'appui  $A_2$  est libre de se déplacer horizontalement) ;
- 2 couples d'encastrement  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Ces 5 composantes, comptées algébriquement positives dans le sens des flèches de la figure 92, sont liées par les 3 équations de la statique qui expriment la nullité du système des réactions d'appui :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \end{cases} \quad (137)$$

$$\begin{cases} H_1 = 0 \end{cases} \quad (138)$$

$$\begin{cases} R_1 \ell + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (139)$$

$$\text{D'où} \quad R_1 = -R_2 = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} \quad (140)$$

Toutes les réactions inconnues peuvent donc s'exprimer à partir des 2 couples d'encastrement  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Elles engendrent, en chaque section d'abscisse  $x$  de la poutre, des sollicitations hyperstatiques de précontrainte :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \end{cases} \quad (141)$$

$$S_h \begin{cases} V(x) = R_1 = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} \end{cases} \quad (142)$$

$$\begin{cases} M(x) = \Gamma_1 + R_1 x = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} x = \Gamma_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \Gamma_2 \frac{x}{\ell} \end{cases} \quad (143)$$

#### 9.2.1.1 Application de la méthode interne

Pour faire apparaître directement comme inconnues hyperstatiques  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , prenons comme structure isostatique ( $S'$ ) associée à ( $S$ ) celle que l'on obtient en supprimant les liaisons d'encastrement aux extrémités (figure 93).

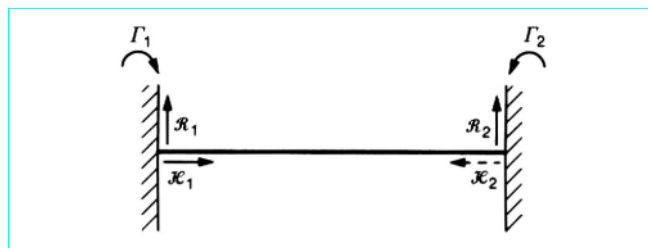


Figure 92 – Réactions d'appui développées par la précontrainte

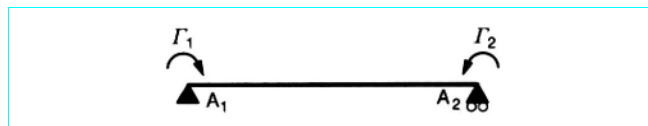


Figure 93 – Structure ( $S'$ )

Soumise à l'action du câble, ( $S'$ ) se déforme et présente des rotations  $\omega_{1p}$  et  $\omega_{2p}$  à ses extrémités.  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les couples qu'il faut appliquer en  $A_1$  et  $A_2$  pour rendre ces rotations nulles comme elles le sont dans la structure hyperstatique ( $S$ ). En d'autres termes,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont définis par :

$$\begin{cases} \omega_{1p} + \omega_1(\Gamma_1) + \omega_1(\Gamma_2) = 0 \\ \omega_{2p} + \omega_2(\Gamma_1) + \omega_2(\Gamma_2) = 0 \end{cases} \quad (144)$$

$$(145)$$

expressions dans lesquelles  $\omega_i(\Gamma_j)$  représente la rotation de la section  $A_i$  sous l'effet du couple  $\Gamma_j$ .

Toutes les rotations étant comptées algébriquement positives dans le sens trigonométrique, on a, par application des formules de Bresse :

$$\omega_{1p} = - \int_0^\ell P e_0(x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI}$$

soit, compte tenu de (136) :

$$\begin{aligned} \omega_{1p} &= - \int_0^\ell P \left[ e_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + e_2 \frac{x}{\ell} \right] \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} \\ &= - P e_1 \frac{\ell}{3EI} - P e_2 \frac{\ell}{6EI} \end{aligned} \quad (146)$$

De même :

$$\omega_{2p} = + \int_0^\ell P e_0(x) \frac{x}{\ell} \frac{dx}{EI} = P e_1 \frac{\ell}{6EI} + P e_2 \frac{\ell}{3EI} \quad (147)$$

De façon analogue (figure 94) :

$$\omega_1(\Gamma_1) = - \int_0^\ell \Gamma_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} = - \frac{\ell}{3EI} \Gamma_1 \quad (148)$$

$$\omega_2(\Gamma_1) = + \int_0^\ell \Gamma_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{x}{\ell} \frac{dx}{EI} = \frac{\ell}{6EI} \Gamma_1 \quad (149)$$

$$\omega_1(\Gamma_2) = - \int_0^\ell \Gamma_2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{x}{\ell} \frac{dx}{EI} = - \frac{\ell}{6EI} \Gamma_2 \quad (150)$$

$$\omega_2(\Gamma_2) = + \int_0^\ell \Gamma_2 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} = \frac{\ell}{3EI} \Gamma_2 \quad (151)$$

Les équations (144) et (145) s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} - P e_1 \frac{\ell}{3EI} - P e_2 \frac{\ell}{6EI} - \frac{\ell}{3EI} \Gamma_1 - \frac{\ell}{6EI} \Gamma_2 = 0 \\ P e_1 \frac{\ell}{6EI} + P e_2 \frac{\ell}{3EI} + \frac{\ell}{6EI} \Gamma_1 + \frac{\ell}{3EI} \Gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (152)$$

$$(153)$$

La solution de ce système est évidente :

$$\Gamma_1 = - P e_1 \quad (154)$$

$$\Gamma_2 = - P e_2 \quad (155)$$

L'équation (140) nous donne :

$$\mathcal{R}_1 = - \mathcal{R}_2 = \frac{P(e_1 - e_2)}{\ell}$$

et les sollicitations hyperstatiques de précontrainte sont :

$$S_h \begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = \frac{P(e_1 - e_2)}{\ell} \end{cases} \quad (156)$$

$$(157)$$

$$M(x) = - P e_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - P e_2 \frac{x}{\ell} \quad (158)$$

En les cumulant aux sollicitations isostatiques de précontrainte :

$$S_i \begin{cases} n_p(x) = P \\ V_p(x) = P \frac{de_0}{dx} = \frac{P(e_2 - e_1)}{\ell} \end{cases} \quad (159)$$

$$(160)$$

$$m_p(x) = P e_0(x) = P e_1 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + P e_2 \frac{x}{\ell} \quad (161)$$

on obtient les sollicitations totales de précontrainte :

$$S_p = S_i + S_h \begin{cases} N_p = P \\ V_p = 0 \end{cases} \quad (162)$$

$$(163)$$

$$M_p = 0 \quad (164)$$

Ainsi, les excentricités  $e_1$  et  $e_2$  données au câble rectiligne à ses extrémités sont sans effet dans la poutre. Tout se passe comme si l'on avait un câble centré.

### 9.2.1.2 Application de la méthode directe

On remplace le câble par les forces  $\vec{F}_i$  qu'il exerce physiquement sur le béton.

Ici, elles se réduisent (figure 95) aux deux forces concentrées d'extrémité  $P$ , directement opposées, décomposables chacune en :

- une force normale centrée, de valeur  $P \cos \alpha \approx P$  ;
- une force transversale, de valeur  $P \sin \alpha$  ;
- un couple (de valeur  $P e_1$  à gauche et  $P e_2$  à droite, en assimilant  $\cos \alpha \approx 1$ ).

Les forces réparties au long du tracé sont nulles : les composantes radiales  $P/r$  parce que le tracé est rectiligne, les composantes tangentielles  $dP/ds$  parce que  $P$  est supposé constant.

$$\text{Les forces transversales } P \sin \alpha \approx P \tan \alpha = \frac{P(e_2 - e_1)}{\ell}$$

appliquées au droit des encastresments d'extrémité sont directement reprises par ces encastresments et n'induisent donc aucune sollicitation dans la poutre. De même, les couples  $P e_1$  et  $P e_2$  sont immédiatement contrebalancés par des couples d'encastrement antagonistes.

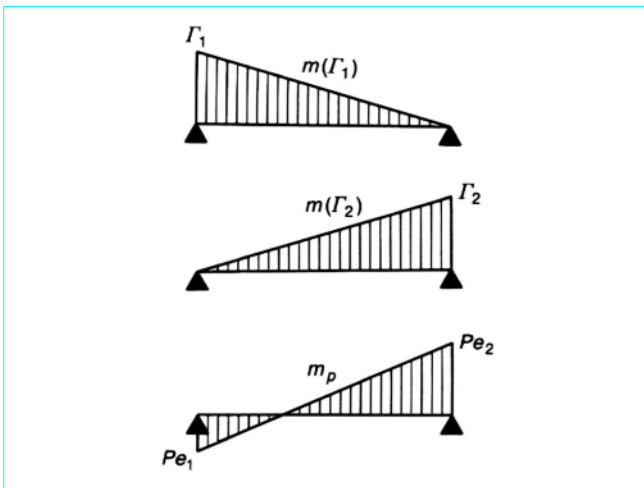


Figure 94 – Moments partiels développés par  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $P$  dans ( $S'$ )

Seules, par conséquent, les forces normales centrées  $P$  ont un effet sur la poutre et les sollicitations totales de précontrainte se réduisent à :

$$S_p \begin{cases} N_p = P \\ V_p = 0 \\ M_p = 0 \end{cases}$$

On retrouve ainsi les résultats de la méthode interne, mais de façon beaucoup plus rapide.

### 9.2.1.3 Extension des résultats précédents au cas où les extrémités seraient totalement bloquées

Supposons cette fois-ci que les encastrements d'extrémité soient complets, c'est-à-dire que la poutre ne soit plus libre de se raccourcir.

La méthode directe nous montre immédiatement que, dans ce cas, le raisonnement tenu au paragraphe 9.2.1.2 pour les forces transversales  $P \sin \alpha$  et les couples  $Pe_1$  et  $Pe_2$  s'applique aussi aux forces normales d'extrémité  $P$  : elles sont immédiatement bloquées par les liaisons d'extrémité.

Plus rien ne filtre dans la poutre : les sollicitations totales de précontrainte y sont identiquement nulles.

## 9.2.2 Poutre encastrée à ses deux extrémités avec précontrainte parabolique

Le paragraphe précédent 9.2.1.3 pourrait laisser croire que la précontrainte est sans effet dans une poutre totalement encastrée à ses extrémités. Ceci n'est vrai que pour des câbles rectilignes. Dans le cas de câbles courbes, la poussée au vide  $P/r$  génère des sollicitations dans la poutre.

Considérons en effet une poutre de section constante, de portée  $\ell$ , bloquée à chacune de ses extrémités vis-à-vis des rotations et des déplacements tant verticaux qu'horizontaux.

La précontrainte est supposée réalisée par un câble parabolique de rayon de courbure au sommet  $r$ , d'excentricités  $e_1$  et  $e_2$  au droit des appuis extrêmes (figure 96) et transmettant une force  $P$  constante sur toute sa longueur.

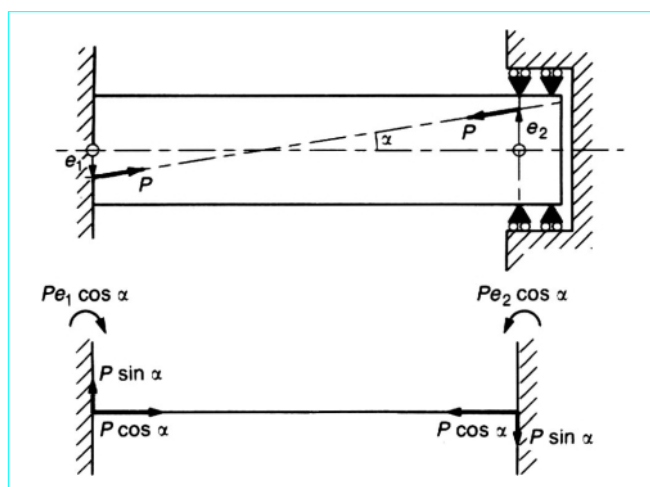


Figure 95 – Forces  $\vec{F}_i$  et leur modélisation

L'équation du tracé peut s'écrire :

$$e_0(x) = -\frac{1}{2r}x(\ell-x) + e_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + e_2\frac{x}{\ell} \quad (165)$$

La structure considérée est 3 fois hyperstatique.

Les 6 composantes des réactions d'appui (figure 97) sont en effet liées par les 3 équations de la statique qui expriment la nullité du système de forces qu'elles constituent :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \end{cases} \quad (166)$$

$$\begin{cases} H_1 - H_2 = 0 \end{cases} \quad (167)$$

$$\begin{cases} R_1\ell + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (168)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} H_1 = H_2 = H \end{cases} \quad (169)$$

$$\begin{cases} R_1 = -R_2 = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} \end{cases} \quad (170)$$

On peut donc prendre comme inconnues hyperstatiques  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $H$ . Les sollicitations hyperstatiques de précontrainte valent, en chaque section d'abscisse  $x$  :

$$\begin{cases} N(x) = H \end{cases} \quad (171)$$

$$S_h \begin{cases} V(x) = R_1 = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} \end{cases} \quad (172)$$

$$\begin{cases} M(x) = \Gamma_1 + R_1x = \Gamma_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + \Gamma_2\frac{x}{\ell} \end{cases} \quad (173)$$

### 9.2.2.1 Application de la méthode interne

Adoptons comme structure isostatique ( $S'$ ) associée à ( $S$ ) celle que l'on obtient en libérant les rotations aux extrémités et le déplacement horizontal en  $A_2$  (figure 98).

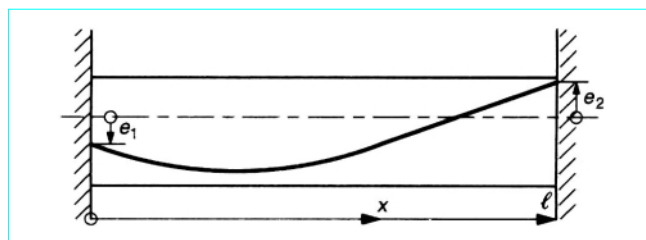


Figure 96 – Poutre encastrée à précontrainte parabolique

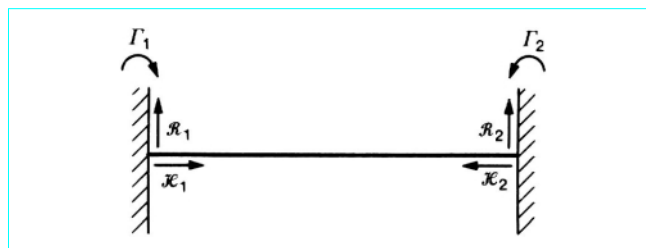


Figure 97 – Réactions d'appui développées par la précontrainte

Soumise à l'action du câble, (S') subit les sollicitations isostatiques de précontrainte suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_p = P \\ v_p = P \frac{de_0}{dx} = P \left[ -\frac{1}{2r} (\ell - 2x) + \frac{e_2 - e_1}{\ell} \right] \\ m_p = Pe_0 = P \left[ -\frac{1}{2r} x(\ell - x) + e_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + e_2 \frac{x}{\ell} \right] \end{array} \right. \quad (174)$$

$$S_i \left\{ \begin{array}{l} v_p = P \frac{de_0}{dx} = P \left[ -\frac{1}{2r} (\ell - 2x) + \frac{e_2 - e_1}{\ell} \right] \\ m_p = Pe_0 = P \left[ -\frac{1}{2r} x(\ell - x) + e_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + e_2 \frac{x}{\ell} \right] \end{array} \right. \quad (175)$$

$$m_p = Pe_0 = P \left[ -\frac{1}{2r} x(\ell - x) + e_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + e_2 \frac{x}{\ell} \right] \quad (176)$$

D'où des rotations d'extrémité :

$$\omega_{1p} = - \int_0^\ell m_p \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{P}{EI} \left( \frac{\ell^3}{24r} - e_1 \frac{\ell}{3} - e_2 \frac{\ell}{6} \right) \quad (177)$$

$$\omega_{2p} = \int_0^\ell m_p \frac{x}{\ell} \frac{dx}{EI} = \frac{P}{EI} \left( \frac{\ell^3}{24r} + e_1 \frac{\ell}{6} + e_2 \frac{\ell}{3} \right) \quad (178)$$

et un déplacement horizontal  $u_p$  de  $A_2$  vers  $A_1$  :

$$u_p = \int_0^\ell n_p \frac{dx}{EB} = \frac{P\ell}{EB} \quad (179)$$

$\Gamma_1, \Gamma_2, \mathcal{H}$  sont les couples et force extérieurs qui annulent ces rotations et déplacement. Autrement dit,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\mathcal{H}$  sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{1p} + \omega_1(\Gamma_1) + \omega_1(\Gamma_2) = 0 \\ \omega_{2p} + \omega_2(\Gamma_1) + \omega_2(\Gamma_2) = 0 \\ u_p + u(\mathcal{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (180)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{1p} + \omega_1(\Gamma_1) + \omega_1(\Gamma_2) = 0 \\ \omega_{2p} + \omega_2(\Gamma_1) + \omega_2(\Gamma_2) = 0 \\ u_p + u(\mathcal{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (181)$$

$$u_p + u(\mathcal{H}) = 0 \quad (182)$$

Les équations (148), (149), (150) et (151) donnent les  $\omega_i(\Gamma_j)$ . Par ailleurs :

$$u(\mathcal{H}) = \int_0^\ell \mathcal{H} \frac{dx}{EB} = \mathcal{H} \frac{\ell}{EB} \quad (183)$$

Les équations (180), (181) et (182) s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P\ell^3}{24r} - (\Gamma_1 + Pe_1) \frac{\ell}{3} - (\Gamma_2 + Pe_2) \frac{\ell}{6} = 0 \\ -\frac{P\ell^3}{24r} + (\Gamma_1 + Pe_1) \frac{\ell}{6} + (\Gamma_2 + Pe_2) \frac{\ell}{3} = 0 \\ \frac{\ell}{EB} (P + \mathcal{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (184)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P\ell^3}{24r} - (\Gamma_1 + Pe_1) \frac{\ell}{3} - (\Gamma_2 + Pe_2) \frac{\ell}{6} = 0 \\ -\frac{P\ell^3}{24r} + (\Gamma_1 + Pe_1) \frac{\ell}{6} + (\Gamma_2 + Pe_2) \frac{\ell}{3} = 0 \\ \frac{\ell}{EB} (P + \mathcal{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (185)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P\ell^3}{24r} - (\Gamma_1 + Pe_1) \frac{\ell}{3} - (\Gamma_2 + Pe_2) \frac{\ell}{6} = 0 \\ -\frac{P\ell^3}{24r} + (\Gamma_1 + Pe_1) \frac{\ell}{6} + (\Gamma_2 + Pe_2) \frac{\ell}{3} = 0 \\ \frac{\ell}{EB} (P + \mathcal{H}) = 0 \end{array} \right. \quad (186)$$

D'où :

$$\Gamma_1 = \frac{P}{r} \frac{\ell^2}{12} - Pe_1 \quad (187)$$

$$\Gamma_2 = \frac{P}{r} \frac{\ell^2}{12} - Pe_2 \quad (188)$$

$$\mathcal{H} = -P \quad (189)$$

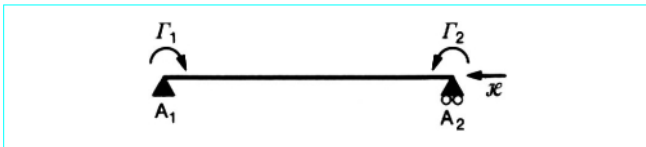


Figure 98 – Structure (S') et forces extérieures à lui appliquer

On en déduit par les équations (171), (172) et (173), les sollicitations hyperstatiques de précontrainte :

$$S_h \left\{ \begin{array}{l} N(x) = \mathcal{H} = -P \\ V(x) = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} = \frac{P(e_1 - e_2)}{\ell} \\ M(x) = \Gamma_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + \Gamma_2 \frac{x}{\ell} = \frac{P}{r} \frac{\ell^2}{12} - Pe_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) - Pe_2 \frac{x}{\ell} \end{array} \right. \quad (190)$$

$$S_h \left\{ \begin{array}{l} N(x) = \mathcal{H} = -P \\ V(x) = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} = \frac{P(e_1 - e_2)}{\ell} \\ M(x) = \Gamma_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + \Gamma_2 \frac{x}{\ell} = \frac{P}{r} \frac{\ell^2}{12} - Pe_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) - Pe_2 \frac{x}{\ell} \end{array} \right. \quad (191)$$

$$S_h \left\{ \begin{array}{l} N(x) = \mathcal{H} = -P \\ V(x) = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\ell} = \frac{P(e_1 - e_2)}{\ell} \\ M(x) = \Gamma_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + \Gamma_2 \frac{x}{\ell} = \frac{P}{r} \frac{\ell^2}{12} - Pe_1 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) - Pe_2 \frac{x}{\ell} \end{array} \right. \quad (192)$$

Et, finalement, les sollicitations totales de précontrainte :

$$S_p = S_i + S_h \left\{ \begin{array}{l} N_p = 0 \\ V_p = -\frac{P}{r} \left( \frac{\ell}{2} - x \right) \\ M_p = \frac{P}{r} \left[ \frac{\ell^2}{12} - \frac{x(\ell - x)}{2} \right] \end{array} \right. \quad (193)$$

$$S_p = S_i + S_h \left\{ \begin{array}{l} N_p = 0 \\ V_p = -\frac{P}{r} \left( \frac{\ell}{2} - x \right) \\ M_p = \frac{P}{r} \left[ \frac{\ell^2}{12} - \frac{x(\ell - x)}{2} \right] \end{array} \right. \quad (194)$$

$$S_p = S_i + S_h \left\{ \begin{array}{l} N_p = 0 \\ V_p = -\frac{P}{r} \left( \frac{\ell}{2} - x \right) \\ M_p = \frac{P}{r} \left[ \frac{\ell^2}{12} - \frac{x(\ell - x)}{2} \right] \end{array} \right. \quad (195)$$

### 9.2.2.2 Application de la méthode directe

Les forces  $\vec{F}_i$  appliquées par le câble sur le béton comprennent cette fois-ci (figure 99) :

- les forces concentrées sous ancrage ;
- les forces réparties radiales  $P/r$  (on peut admettre  $r$  constant tout au long du tracé et égal au rayon de courbure au sommet de la parabole).

Les 3 composantes de chacune des forces concentrées sous ancrage sont directement bloquées par les liaisons d'extrémité. Elles n'induisent donc aucun effet dans la poutre.

Seules les charges ascendantes uniformément réparties  $q = \frac{P}{r}$  y développent des sollicitations dont l'expression constitue un résultat bien connu de la Résistance des Matériaux :

$$S_p \left\{ \begin{array}{l} N_p = 0 \\ V_p = -q \left( \frac{\ell}{2} - x \right) \\ M_p = -q \left[ -\frac{\ell^2}{12} + \frac{x(\ell - x)}{2} \right] \end{array} \right.$$

Ce sont les sollicitations totales de précontrainte, identiques à celles obtenues au paragraphe 9.2.2.1 par la méthode interne.

### 9.2.3 Portique à deux articulations

Le portique représenté à la figure 100 est constitué d'une traverse de section constante dont l'inertie est  $I$  et de deux montants symétriques, de section également constante et d'inertie  $I'$ .

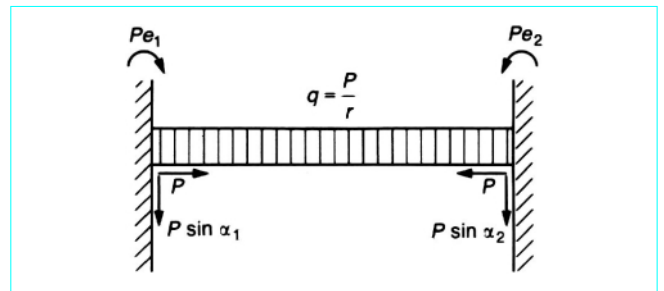


Figure 99 – Forces  $\vec{F}_i$  appliquées par le câble à la structure (S)

Le câblage symétrique (figure 101) comporte :

— dans la traverse, un câble parabolique d'excentricité  $e_c$  au droit des nœuds  $C_1$  et  $C_2$  et  $e_M$  à mi-portée. Il transmet une force  $P$  constante sur toute sa longueur ;

— dans chacun des montants, un câble rectiligne dont l'excentricité est nulle à la base et vaut  $e'_c$  au sommet ; la force de tension  $P'$  est supposée constante de l'une à l'autre de ses extrémités.

La structure considérée est une fois hyperstatique, les 4 composantes des réactions d'appui comptées algébriquement positives dans le sens des flèches de la figure 100 étant liées par les 3 équations de la statique :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = 0 \\ R_1 \ell = 0 \end{cases} \quad (196)$$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = 0 \\ R_1 \ell = 0 \end{cases} \quad (197)$$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = 0 \\ R_1 \ell = 0 \end{cases} \quad (198)$$

D'où :

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \end{cases} \quad (199)$$

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \end{cases} \quad (200)$$

La seule inconnue hyperstatique est donc la poussée  $\mathcal{H}$  du portique. Pour la trouver, appliquons la méthode interne en prenant comme structure isostatique associée (figure 102) celle que l'on obtient en remplaçant l'articulation  $A_2$  par un appui simple libre de se déplacer horizontalement.  $\mathcal{H}$  est la force qu'il faut appliquer en  $A_2$  pour empêcher le mouvement de cet appui sous l'effet de la précontrainte.

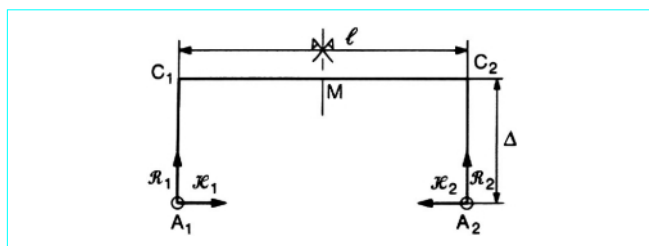


Figure 100 – Portique et réactions développées par la précontrainte

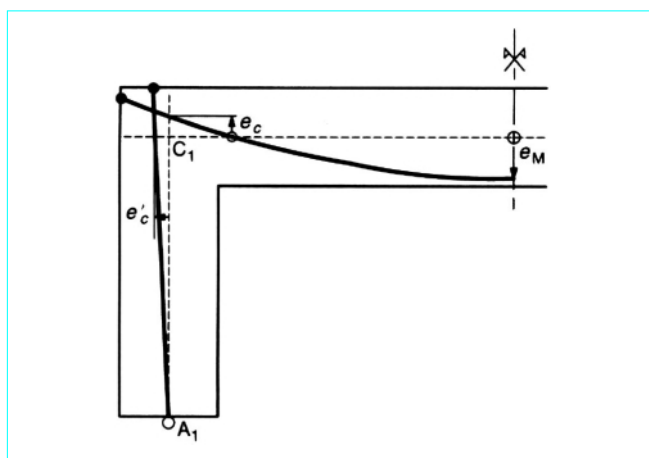


Figure 101 – Câblage du portique

$\mathcal{H}$  est alors donné de façon classique par :

$$a_{11}\mathcal{H} + a_{1p} = 0 \quad (201)$$

$a_{11}$  et  $a_{1p}$  ayant comme expressions, si l'on néglige les déformations d'effort normal et d'effort tranchant :

$$a_{11} = \int m_1^2 \frac{ds}{EI} \quad \text{et} \quad a_{1p} = \int m_1 m_p \frac{ds}{EI}$$

Dans ces formules,  $m_1$  et  $m_p$  représentent les distributions de moment fléchissant dans la structure isostatique dues respectivement à une force unité appliquée en  $A_2$  et à la précontrainte (figure 103). D'où :

$$a_{11} = \frac{2}{3} \frac{\Delta^3}{EI} + \frac{\Delta^2 \ell}{EI} \quad (202)$$

$$a_{1p} = -\frac{2}{3} \frac{P'e'_c \Delta^2}{EI} - \frac{P\ell\Delta}{EI} \left( \frac{2}{3} e_M + \frac{1}{3} e_c \right) \quad (203)$$

Et, si l'on pose  $\frac{I'}{\ell} \frac{\Delta}{EI} = \rho$  :

$$\mathcal{H} = \frac{2P'e'_c + \rho P(2e_M + e_c)}{\Delta(2 + 3\rho)} \quad (204)$$

Les sollicitations hyperstatiques de précontrainte dans la traverse sont donc :

$$S_h \begin{cases} N = \mathcal{H} = \frac{2P'e'_c + \rho P(2e_M + e_c)}{\Delta(2 + 3\rho)} \\ V = 0 \\ M = -\mathcal{H}\Delta = -\frac{2P'e'_c + \rho P(2e_M + e_c)}{2 + 3\rho} \end{cases}$$

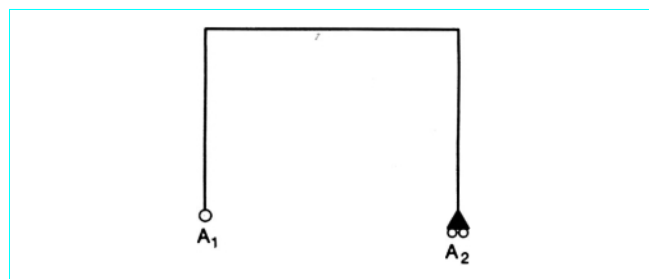


Figure 102 – Structure isostatique associée

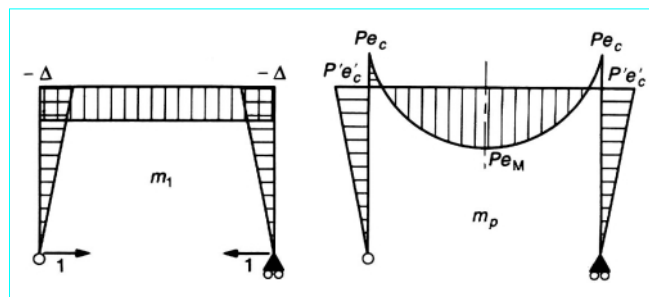


Figure 103 – Distribution des moments  $m_1$  et  $m_p$

On peut remarquer que ces sollicitations hyperstatiques sont toutes nulles si :

$$2P'e'_c + \rho P(2e_M + e_c) = 0$$

Un câblage qui ne génère aucune réaction hyperstatique, donc aucune sollicitation hyperstatique de précontrainte, est dit concordant. Dans le cas présent, un tel câblage peut s'obtenir en prenant, par exemple :

$$P' = 0 \quad (\text{pas de câble dans les montants})$$

et

$$e_M = -e_c/2$$

## 10. Poutres continues sur appuis simples

### 10.1 Distribution des sollicitations hyperstatiques de précontrainte

Considérons une poutre continue à  $n$  travées reposant sur  $(n+1)$  appuis simples dont l'un est supposé fixe et les autres libres de se déplacer horizontalement. Sous l'effet de la précontrainte, il apparaît, au droit de chacun de ces appuis  $A_i$ , une réaction verticale  $\vec{R}_i$ . Les réactions hyperstatiques de précontrainte  $\vec{R}_i$ , comme on l'a vu au paragraphe 1.3.1, constituent un système de forces équivalent à  $\vec{0}$ .

Ces réactions engendrent, tout au long de la poutre, des sollicitations hyperstatiques de précontrainte. Si l'on repère les abscisses  $\xi$  à partir de l'appui de gauche  $A_0$  et si l'on désigne par  $\xi_j$  l'abscisse de l'appui  $A_j$  (figure 104), les sollicitations en question s'écrivent :

$$S_h(\xi) \begin{cases} N(\xi) = 0 \\ V(\xi) = \sum_{i: \xi_i \leq \xi} R_i \\ M(\xi) = \sum_{i: \xi_i \leq \xi} R_i(\xi - \xi_i) \end{cases}$$

les sommations étant étendues à tous les appuis situés à gauche de la section d'abscisse  $\xi$  considérée. Le moment hyperstatique de précontrainte est donc représentable par une ligne polygonale continue dont les sommets se situent au droit des appuis intermédiaires et qui passe à l'ordonnée 0 à la verticale des appuis extrêmes.

Si, dans la travée  $i$  ( $A_{i-1} A_i$ ) on repère maintenant l'abscisse  $x$  d'une section courante à partir de l'appui  $A_{i-1}$ , on peut écrire :

$$M(x) = M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) + M_i \frac{x}{\ell_i} \quad (205)$$

$M_i$  représentant le moment hyperstatique de précontrainte au droit de l'appui  $A_i$  (On a bien entendu,  $M_0 = M_n = 0$ ).

Par ailleurs 
$$V(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{\ell_i}$$

### 10.2 Ligne de précontrainte

#### 10.2.1 Définition

Dans une section quelconque d'abscisse  $x$  de la travée  $i$ , on a, sous le seul effet de la précontrainte, les sollicitations suivantes :

$$N_p(x) = P(x)$$

$$M_p(x) = P(x)e_0(x) + M(x)$$

L'ordonnée du centre de pression vaut alors :

$$e_{00}(x) = \frac{M_p(x)}{N_p(x)} = e_0(x) + \frac{M(x)}{P(x)} \quad (206)$$

Le lieu de ce centre de pression (sous l'effet de la seule précontrainte) lorsque la section décrit la poutre est appelée **ligne de précontrainte**.

Contrairement à ce qui se passait en isostatique (§ 5.3), cette ligne de précontrainte  $e_{00}(x)$  n'est plus confondue avec le câble  $e_0(x)$ . Elle s'en déduit par le déplacement :

$$e_{00}(x) - e_0(x) = \frac{M(x)}{P(x)}$$

Dans la section d'abscisse  $x$ , les contraintes développées par la précontrainte sont donc celles dues à une force  $P(x)$  excentrée de  $e_{00}(x)$  [et non pas de  $e_0(x)$ ]. Dans ces conditions, le moment total de précontrainte peut également s'écrire :

$$M_p(x) = P(x)e_{00}(x)$$

#### 10.2.2 Exemple

Considérons une poutre continue de section constante présentant deux travées égales de portée  $\ell$  (figure 105). Elle est précontrainte par un câble rectiligne, parallèle à la fibre moyenne, d'excentricité  $e_0$ , supposé transmettre une force de tension constante  $P(x) = P$  d'une extrémité à l'autre.

Cette structure ( $S$ ) est une fois hyperstatique.

Pour trouver les réactions et les sollicitations hyperstatiques de précontrainte, appliquons la méthode interne en prenant comme structure isostatique associée ( $S'$ ) celle que l'on obtient en supprimant l'appui intermédiaire  $A_1$ .

En chaque section de la travée indépendante ( $S'$ ) (de portée  $L = 2\ell$ ), la précontrainte génère un moment fléchissant  $Pe_0$ . La déformée de ( $S'$ ) présente donc une courbure constante  $\frac{1}{R} = \frac{Pe_0}{EI}$ . C'est un cercle dont la flèche à mi-portée, comptée algébriquement positive sur la verticale ascendante, vaut :

$$f_p = -\frac{L^2}{8R} = -\frac{Pe_0\ell^2}{2EI}$$

Pour annuler cette flèche, il faut appliquer à ( $S'$ ), au droit de l'appui supprimé  $A_1$ , une force verticale ascendante  $R_1$  (figure 106) telle que :

$$f_p + f(R_1) = 0$$

L'expression de la flèche à mi-portée d'une travée indépendante sous l'effet d'une charge ponctuelle appliquée au même endroit est classique :

$$f(R_1) = \frac{R_1 L^3}{48EI} = \frac{R_1 \ell^3}{6EI} - \frac{Pe_0 \ell^2}{2EI} + \frac{R_1 \ell^3}{6EI} = 0$$

D'où

soit

$$R_1 = \frac{3Pe_0}{\ell}$$

Lorsqu'on applique  $R_1$  à ( $S'$ ), il apparaît évidemment, au droit de ses appuis  $A_0$  et  $A_2$  des réactions dont la valeur algébrique sur la verticale ascendante est :

$$R_0 = R_2 = -\frac{R_1}{2} = -\frac{3}{2} \frac{Pe_0}{\ell}$$

Les réactions hyperstatiques ainsi obtenues engendrent dans la poutre les sollicitations hyperstatiques représentées sur la figure 107.



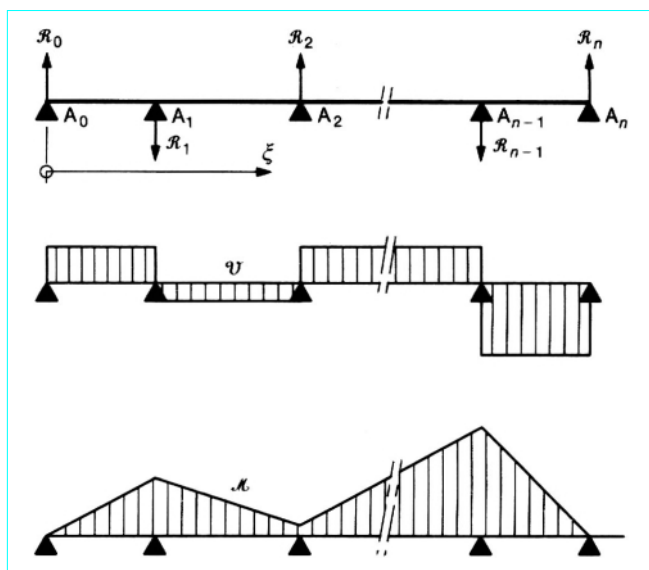


Figure 104 – Réactions et sollicitations hyperstatiques de précontrainte

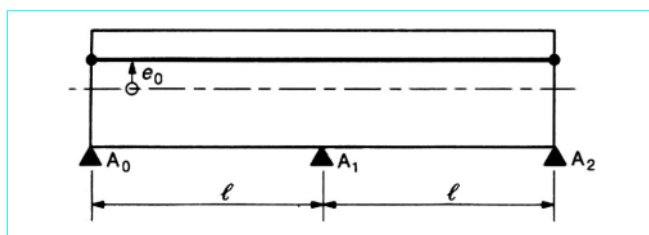


Figure 105 – Poutre étudiée

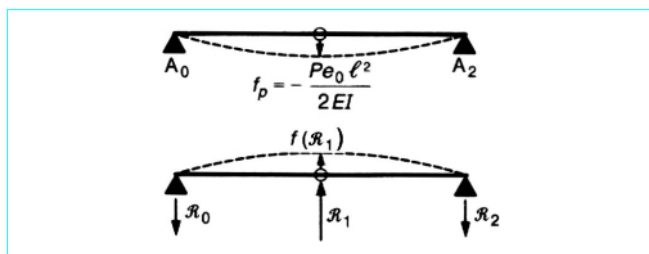


Figure 106 – Déformées de (S') sous l'effet de la précontrainte et de  $R_1$

La ligne de précontrainte :

$$e_{00}(x) = e_0(x) + \frac{M(x)}{P(x)}$$

est donc ici, compte tenu du fait que  $P(x) = Cte = P$ , une ligne polygonale continue passant à l'ordonnée  $e_0$  au droit des appuis extrêmes et à l'ordonnée  $e_{00} = e_0 - \frac{3}{2}e_0 = -\frac{e_0}{2}$  au droit de l'appui intermédiaire (figure 107).

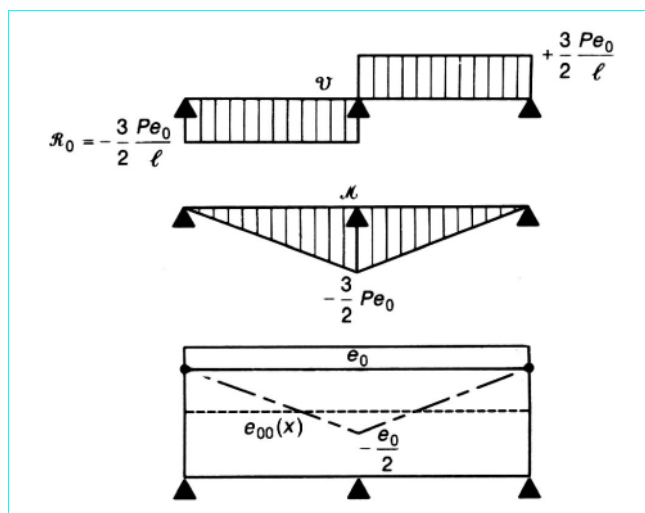


Figure 107 – Efforts hyperstatiques de précontrainte et ligne de précontrainte

### 10.2.3 Convenance des contraintes normales

Si, dans la section d'abscisse  $x$ , on considère l'effet simultané de la précontrainte et d'un chargement extérieur  $y$  développant un moment fléchissant  $M(x)$ , les sollicitations totales sont :

$$\begin{cases} N_{\text{tot}}(x) = P(x) \\ M_{\text{tot}}(x) = P(x)e_0(x) + M(x) + M(x) = P(x)e_{00}(x) + M(x) \end{cases}$$

L'ordonnée du centre de pression devient :

$$e(x) = \frac{M_{\text{tot}}(x)}{N_{\text{tot}}(x)} = e_{00}(x) + \frac{M(x)}{P(x)} \quad (207)$$

L'effet du chargement extérieur est donc de déplacer le centre de pression sur  $Gy$  à partir de la ligne de précontrainte, de la quantité algébrique  $M(x)/P(x)$ .

Si l'on reprend les mêmes notations qu'au paragraphe 5.4.2, le respect des contraintes limites de traction s'exprime par :

$$-c'(x) \leq e(x) \leq c(x)$$

où  $+c(x)$  et  $-c'(x)$  représentent les ordonnées (sur  $Gy$ ) des points le plus haut et le plus bas du noyau limite de traction.

Le moment extérieur  $M(x)$  étant, selon le cas de charge considéré, susceptible de varier entre une valeur minimale  $M_m(x)$  et une valeur maximale  $M_M(x)$ , il faut, pour qu'en tout cas de charge les contraintes limites de traction soient respectées, que :

$$-c'(x) \leq e_{00}(x) + \frac{M_m(x)}{P(x)} \leq e(x) \leq e_{00}(x) + \frac{M_M(x)}{P(x)} \leq c(x)$$

$$\text{soit} \quad -c'(x) - \frac{M_m(x)}{P(x)} \leq e_{00}(x) \leq c(x) - \frac{M_M(x)}{P(x)} \quad (208)$$

Autrement dit, il est nécessaire que la **ligne de précontrainte** soit à l'intérieur du **fuseau de passage** (de traction), défini de la même façon qu'en isostatique.

### 10.3 Conditions sur le câble et sur la ligne de précontrainte

Ainsi donc, pour satisfaire aux exigences mécaniques, la ligne de précontrainte doit être à l'intérieur du fuseau de passage :

$$e_2 = -c' - \frac{M_m}{P} \leq e_{00} \leq c - \frac{M_M}{P} = e_1 \quad (209)$$

Le câble, quant à lui, doit présenter, tout au long de son tracé, un enrobage suffisant :

$$-(v' - d') \leq e_0 \leq v - d \quad (210)$$

Ces deux séries de conditions qui, en isostatique, portaient sur la même entité, le câble (alors confondu avec sa ligne de précontrainte), se dissocient totalement en hyperstatique : le câble n'a nul besoin d'être à l'intérieur du fuseau de passage puisque ce n'est pas sa position dans une section qui y définit les contraintes normales du béton ; à l'inverse, la ligne de précontrainte peut parfaitement sortir du béton, elle ne risque pas de périr par corrosion !

### 10.4 Valeur minimale de la précontrainte dans une section

Pour que la double inégalité (209) soit possible, il faut que  $e_2 \leq e_1$ , autrement dit que le fuseau de passage soit ouvert dans la section en cause, ce qui s'écrit :

$$P \geq \frac{M_M - M_m}{c + c'} = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (211)$$

On retrouve là l'expression obtenue pour  $P_I$  en isostatique (§ 5.5). Par ailleurs, la double inégalité (209) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} -c' - \frac{M_m}{P} &\leq e_0 + \frac{\mathcal{M}}{P} \leq c - \frac{M_M}{P} \\ \text{soit} \quad -c' - \frac{(M_m + \mathcal{M})}{P} &\leq e_0 \leq c - \frac{(M_M + \mathcal{M})}{P} \end{aligned} \quad (212)$$

Pour que les équations (212) et (210) qui définissent toutes deux un encadrement de  $e_0$  soient compatibles, il faut que la borne inférieure de chacune d'elles soit inférieure à la borne supérieure de l'autre. D'où :

$$\begin{aligned} -(v' - d') &\leq c - \frac{(M_M + \mathcal{M})}{P} \\ \text{et} \quad -c' - \frac{(M_m + \mathcal{M})}{P} &\leq v - d \\ \text{soit} \quad \begin{cases} P \geq \frac{M_M + \mathcal{M}}{v' + c - d'} \\ P \geq \frac{-(M_m + \mathcal{M})}{v + c' - d} \end{cases} \end{aligned} \quad (213)$$

Ces expressions généralisent celles obtenues pour  $P_{II}$  et  $P'_{II}$  en isostatique (§ 5.5.2). Elles présentent l'inconvénient de contenir le moment hyperstatique  $\mathcal{M}$ , a priori inconnu. Ce moment hyperstatique  $\mathcal{M}(x)$  au droit de la section d'abscisse  $x$  dépend des déformations que prendrait la structure rendue isostatique soumise aux seuls effets de sa précontrainte, et donc non pas tant des valeurs locales de  $P$  et de  $e_0$  dans la section d'abscisse  $x$  que de la distribution de ces deux paramètres tout au long de la poutre. Autrement dit, il n'est plus question, pour une structure hyperstatique, de

dimensionner la précontrainte section par section, sauf à faire une hypothèse sur la répartition du moment hyperstatique de précontrainte et à la confirmer, une fois déterminés  $P$  et  $e_0$  en chaque section, ce qui nécessite le plus souvent de procéder à plusieurs approximations successives.

Cette façon d'opérer est généralement efficace dans le cas des ouvrages où la précontrainte varie de façon discontinue par arrêt successif des câbles (construction en encorbellement notamment). Après avoir sommairement dimensionné la précontrainte à partir des équations (211) ou (213), on donne alors la priorité aux conditions pratiques (210) pour se fixer un schéma de câblage, une certaine liberté de choix quant à la position des arrêts de câble permettant d'ajuster plus ou moins bien la répartition du moment hyperstatique à celle qu'on avait escomptée a priori. Si l'ajustement n'est pas satisfaisant, la répartition obtenue pour le moment hyperstatique sert de base à nouvelle approximation.

En revanche, le processus ainsi décrit est souvent divergent lorsqu'on prend le parti d'un câblage filant, simple dans son principe et facile à mettre en œuvre, mais nettement plus contraignant pour le projeteur. Mieux vaut alors chercher, dans un premier temps, une ligne de précontrainte satisfaisant aux conditions mécaniques (209) et en déduire ensuite, pour le câble moyen, un tracé  $e_0$  respectant la double inégalité (210).

### 10.5 Calcul des efforts

#### 10.5.1 Notations et conventions

Considérons une poutre continue sur  $(n + 1)$  appuis simples ( $A_0, A_1, \dots, A_n$ ), donc  $(n - 1)$  fois hyperstatique (figure 108).

La travée  $j$  est délimitée par les appuis  $A_{j-1}$  et  $A_j$  et sa portée est  $\ell_j$ .

On appelle coefficients de souplesse de la travée  $j$  les quantités :

$$a_j = \int_0^{\ell_j} \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)} \quad (214)$$

$$b_j = \int_0^{\ell_j} \frac{x}{\ell_j} \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) \frac{dx}{EI(x)} \quad (215)$$

$$c_j = \int_0^{\ell_j} \left(\frac{x}{\ell_j}\right)^2 \frac{dx}{EI(x)} \quad (216)$$

Dans le cas d'une poutre de section (donc d'inertie) constante, on a :

$$a_j = c_j = \frac{\ell_j}{3EI} \quad \text{et} \quad b_j = \frac{\ell_j}{6EI}$$

Sont comptés comme algébriquement positifs :

- les couples et moments dans le sens des aiguilles d'une montre (un moment fléchissant positif comprime la fibre supérieure) ;
- les rotations dans le sens trigonométrique (opposé à celui des aiguilles d'une montre).

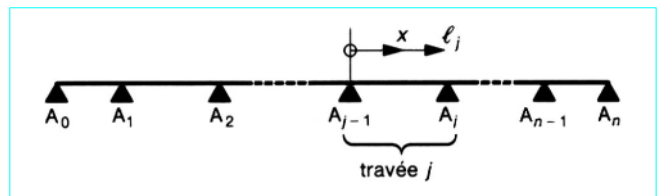


Figure 108 – Poutre continue sur  $(n + 1)$  appuis simples

### 10.5.2 Calcul des sollicitations développées par un chargement quelconque

Considérons, en parallèle à la travée  $j$  de la poutre continue, une travée indépendante présentant les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques, et soumise au même chargement.

Dans la travée  $j$  de la poutre continue, on désigne par :

- $V(x)$  l'effort tranchant en toute section d'abscisse  $x$  ;
- $M(x)$  le moment fléchissant en toute section d'abscisse  $x$  ;
- $\Omega'_j$  la rotation de la section à l'extrémité gauche de la travée  $j$  (section d'abscisse  $x = 0$ ) ;
- $\Omega''_j$  la rotation de la section à l'extrémité droite de la travée  $j$  (section d'abscisse  $x = \ell_j$ ).

Les relations de Bresse permettent d'écrire :

$$\Omega'_j = - \int_0^{\ell_j} M(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) \frac{dx}{EI(x)} \quad (217)$$

$$\Omega''_j = \int_0^{\ell_j} M(x) \frac{x}{\ell_j} \frac{dx}{EI(x)} \quad (218)$$

Les quantités correspondantes de la travée indépendante sont notées :

- $v(x)$  pour l'effort tranchant ;
- $m(x)$  pour le moment fléchissant ;
- $\omega'_j = - \int_0^{\ell_j} m(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) \frac{dx}{EI(x)} \quad (219)$

$$\text{et } \omega''_j = \int_0^{\ell_j} m(x) \frac{x}{\ell_j} \frac{dx}{EI(x)} \quad (220)$$

pour les rotations d'extrémité.

Entre grandeurs homologues relatives aux deux travées considérées, on a les relations suivantes :

$$V(x) = v(x) + \frac{M_j - M_{j-1}}{\ell_j} \quad (221)$$

$$M(x) = m(x) + M_{j-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) + M_j \frac{x}{\ell_j} \quad (222)$$

où  $M_{j-1}$  et  $M_j$  représentent les moments fléchissants au droit des appuis  $A_{j-1}$  et  $A_j$  de la poutre continue.

Compte tenu des équations (214), (215) et (216) et de (222), les expressions (217) et (218) s'écrivent :

$$\Omega'_j = \omega'_j - a_j M_{j-1} - b_j M_j \quad (223)$$

$$\Omega''_j = \omega''_j + b_j M_{j-1} + c_j M_j \quad (224)$$

Dans le domaine du fonctionnement élastique auquel nous nous limitons ici, la déformée de la poutre continue ne peut présenter aucune discontinuité de pente au droit d'un appui intermédiaire  $A_j$ . Cette absence de cassure angulaire à la traversée de l'appui  $A_j$  s'exprime par :

$$\Omega'_{j+1} - \Omega''_j = 0 \quad (225)$$

soit, compte tenu des équations (223) et (224), par :

$$b_j M_{j-1} + (c_j + a_{j+1}) M_j + b_{j+1} M_{j+1} = \omega'_{j+1} - \omega''_j \quad (226)$$

C'est la relation classique dite « des trois moments ». On a autant d'équations (226) que d'appuis intermédiaires, soit  $(n-1)$  équations pour une poutre à  $n$  travées. Ces  $(n-1)$  équations linéaires permettent de calculer les  $(n-1)$  inconnues hyperstatiques que sont les moments sur appuis intermédiaires  $M_j$ .

La résolution de ce système de  $(n-1)$  équations est particulièrement simple lorsqu'une seule travée  $i$  est chargée.

On montre facilement, en effet, que, en dehors de la travée  $i$  chargée, la ligne représentative du moment fléchissant est une ligne polygonale continue dont les sommets se situent au droit des différents appuis intermédiaires et que cette ligne passe, sur chaque travée  $j$  ( $j \neq i$ ) non chargée, à l'ordonnée 0 en des points remarquables appelés foyers (figure 109) :

— foyer de gauche  $F_j$  de la travée  $j$ , si la dite travée  $j$  est à gauche de la travée  $i$  ( $j < i$ ) ;

— foyer de droite  $F'_j$  de la travée  $j$  si cette travée  $j$  est à droite de la travée  $i$  ( $j > i$ ).

Chaque travée  $j$  a donc deux foyers  $F_j$  et  $F'_j$  dont la position ne dépend que de la géométrie de la poutre continue (mais pas du chargement appliqué).

La position des foyers est définie par les rapports focaux :

$$\text{— de gauche} \quad \varphi_j = \frac{A_{j-1} F_j}{F_j A_j}$$

$$\text{— de droite} \quad \varphi'_j = \frac{F'_j A_j}{A_{j-1} F'_j}$$

Ces rapports focaux se calculent par des relations de récurrence très simples. Pour les rapports focaux de gauche, on part de la première travée et l'on a successivement :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \frac{b_2}{\varphi_2} &= a_2 + c_1 - b_1 \varphi_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{b_j}{\varphi_j} &= a_j + c_{j-1} - b_{j-1} \varphi_{j-1} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{b_n}{\varphi_n} &= a_n + c_{n-1} - b_{n-1} \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

De même, pour les rapports focaux de droite, en partant de la travée  $n$  :

$$\begin{aligned} \varphi'_n &= 0 \\ \frac{b_{n-1}}{\varphi'_{n-1}} &= a_n + c_{n-1} - b_n \varphi'_n \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{b_j}{\varphi'_j} &= a_{j+1} + c_j - b_{j+1} \varphi'_{j+1} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{b_1}{\varphi'_1} &= a_2 + c_1 - b_2 \varphi'_2 \end{aligned}$$

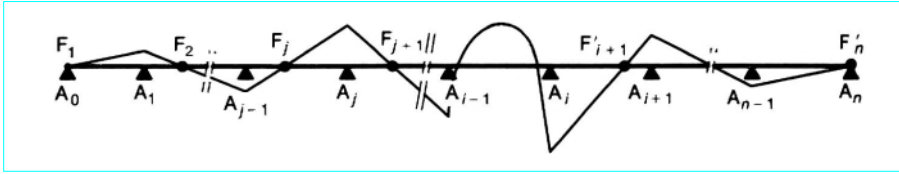


Figure 109 – Ligne représentative du moment fléchissant lorsque seule la travée  $i$  est chargée

Dans le cas où seule la travée  $i$  est chargée, on établit aisément que les moments  $M_{i-1}$  et  $M_i$  au droit des appuis  $A_{i-1}$  et  $A_i$  qui l'encadrent se calculent à partir des rapports focaux, déterminés une fois pour toutes, grâce aux relations précédentes, par les formules suivantes :

$$M_{i-1} = \frac{1}{b_i} \frac{\frac{\omega'_i + \omega''_i}{\varphi_i \varphi'_i} - 1}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} \quad (227)$$

$$M_i = -\frac{1}{b_i} \frac{\frac{\omega'_i + \omega''_i}{\varphi_i \varphi'_i} - 1}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} \quad (228)$$

où  $\omega'_i$  et  $\omega''_i$  sont les rotations d'extrémité, sous l'effet du chargement considéré, de la travée supposée indépendante [rotations données par les expressions (219) et (220)].

Pour obtenir les moments au droit des autres appuis, il suffit de transmettre par les foyers :

$$\begin{aligned} M_{i-2} &= -\varphi_{i-1} M_{i-1} ; & M_{i-3} &= -\varphi_{i-2} M_{i-2} \dots \\ M_{i+1} &= -\varphi'_{i+1} M_i ; & M_{i+2} &= -\varphi'_{i+2} M_{i+1} \dots \end{aligned}$$

Lorsque  $m$  travées sont chargées on peut, bien entendu, procéder par superposition des  $m$  cas correspondant chacun à l'application des charges sur une seule travée.

## 10.6 Calcul des sollicitations hyperstatiques de précontrainte par la méthode interne

### 10.6.1 Applicabilité des équations des trois moments

Comme au paragraphe 10.5.2, considérons en parallèle la travée  $j$  de la poutre continue et une travée indépendante présentant les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques. Supposons ces deux travées soumises à la même précontrainte.

Les moments fléchissants et rotations d'extrémités sont, pour la travée indépendante :

$$m_p(x) = P(x) e_0(x)$$

$$\omega'_{jp} = -\int_0^{\ell_j} P(x) e_0(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) \frac{dx}{EI(x)} \quad (229)$$

$$\omega''_{jp} = \int_0^{\ell_j} P(x) e_0(x) \frac{x}{\ell_j} \frac{dx}{EI(x)} \quad (230)$$

Pour la travée  $j$  de la poutre continue, on a :

$$M_p(x) = P(x) e_0(x) + \mathcal{M}(x) = P(x) e_0(x) + \mathcal{M}_{j-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) + \mathcal{M}_j \frac{x}{\ell_j}$$

et compte tenu de (229) et (230) d'une part, de (214), (215) et (216) d'autre part, les rotations de la section sont :

$$\Omega'_{jp} = -\int_0^{\ell_j} M_p(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_j}\right) \frac{dx}{EI(x)} = \omega'_{jp} - a_j \mathcal{M}_{j-1} - b_j \mathcal{M}_j \quad (231)$$

$$\Omega''_{jp} = \int_0^{\ell_j} M_p(x) \frac{x}{\ell_j} \frac{dx}{EI(x)} = \omega''_{jp} + b_j \mathcal{M}_{j-1} + c_j \mathcal{M}_j \quad (232)$$

En exprimant qu'il n'y a pas de cassure angulaire à la traversée de l'appui  $i$ , on obtient :

$$\Omega'_{i+1,p} - \Omega''_{i,p} = 0$$

soit :

$$b_j \mathcal{M}_{j-1} + (c_j + a_{j+1}) \mathcal{M}_j + b_{j+1} \mathcal{M}_{j+1} = \omega'_{i+1,p} - \omega''_{i,p} \quad (233)$$

Les  $(n-1)$  équations « des trois moments » ainsi écrites permettent de calculer les  $(n-1)$  moments hyperstatiques de précontrainte au droit des  $(n-1)$  appuis intermédiaires.

Bien entendu, on peut, pour résoudre le système correspondant, utiliser la méthode des foyers exposée au paragraphe 10.5.2.

### 10.6.2 Relations de concordance

Un câblage est dit concordant s'il ne développe aucune réaction hyperstatique de précontrainte, et par conséquent aucun moment hyperstatique de précontrainte.

Pour cela, il faut et il suffit que tous les  $\mathcal{M}_i$  soient nuls, donc que les seconds membres des équations (233) soient nuls, ce qui s'écrit :

$$\int_0^{\ell_{i+1}} P(x) e_0(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^{\ell_i} P(x) e_0(x) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI(x)} = 0 \quad (234)$$

Les  $(n-1)$  relations (234) sont dites **relations de concordance**.

Si, pour une fonction  $f(x)$  définie sur les travées  $i$  et  $(i+1)$ , on pose :

$$J_i(f) = \int_0^{\ell_{i+1}} f(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^{\ell_i} f(x) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI(x)}$$

les relations de concordance se mettent sous la forme :

$$J_i(Pe_0) = 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (235)$$

Les  $J_i$  sont  $(n-1)$  nombres attachés à un câblage, et ils doivent être tous nuls pour que le câblage en question soit concordant.

### 10.6.3 Exemples de tracés concordants

#### ■ Tout tracé centré est concordant

Un tracé est dit centré si, partout,  $e_0(x) = 0$ .

Dans ces conditions, on a évidemment :

$$J_i(Pe_0) = \int_0^{\ell_{i+1}} P(x) e_0(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^{\ell_i} P(x) e_0(x) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI(x)} = 0$$

#### ■ Toute ligne de précontrainte est concordante

Considérons un câblage défini, en chaque section d'abscisse  $x$ , par le couple  $P(x)$ ,  $e_0(x)$ .

Comme on l'a vu au paragraphe 10.2.1, la ligne de précontrainte associée est définie par :

$$e_0(x) = \frac{M_p(x)}{P(x)}$$

où  $M_p(x)$  représente le moment total de précontrainte à l'abscisse  $x$ .

Montrons que cette ligne de précontrainte est concordante, autrement dit, que le câble qui transmettrait la force  $P(x)$  et qui serait placé à l'excentricité  $e_{00}(x)$  est concordant.

On a en effet :

$$J_i(Pe_{00}) = J_i(M_p) = \int_0^{\ell_{i+1}} M_p(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right) \frac{dx}{EI(x)} + \int_0^{\ell_i} M_p(x) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI(x)}$$

et donc, selon les équations (231) et (232) :

$$J_i(Pe_{00}) = -\Omega'_{i+1,p} + \Omega''_{i,p}$$

Cette quantité est nulle, puisqu'il n'y a pas de cassure angulaire à la traversée de l'appui  $A_i$  lorsque la poutre se déforme sous l'effet de sa précontrainte, ce qui démontre la concordance de la ligne de précontrainte.

À l'inverse, toute ligne concordante est ligne de précontrainte pour au moins un câble : celui qui, tendu à  $P(x)$ , aurait comme tracé la ligne concordante en question.

Il y a donc identité entre les notions de ligne de précontrainte et de ligne concordante.

#### ■ Tout tracé funiculaire d'un cas de charge quelconque appliqué à une poutre continue est concordant

Considérons une répartition quelconque de charges  $r(x)$  sur une poutre continue ; elle génère en chaque section s'abscisse  $x$  un moment fléchissant  $M_r(x)$ . Un câble tendu à  $P(x)$  est dit funiculaire du cas de charge  $r(x)$  s'il est placé à l'excentricité :

$$e_0(x) = -\frac{M_r(x)}{P(x)}$$

Pour un tel câble, on a :

$$J_i(Pe_0) = -J_i(M_r) = \Omega'_{i+1,r} - \Omega''_{i,r}$$

Cette quantité est nulle puisque la déformée de la poutre sous l'effet du chargement  $r(x)$  ne présente aucune discontinuité de pente à la traversée de l'appui  $A_i$ .

Le fait ainsi établi (que tout tracé funiculaire d'un cas de charge quelconque appliqué à une poutre continue est concordant) a une conséquence intéressante lorsqu'on a affaire à une poutre présentant un noyau limite symétrique [ $c(x) = c'(x)$ ] et soumise à une charge d'exploitation assimilable à une charge uniformément répartie dont l'intensité  $q$  est indépendante de la longueur à laquelle

on l'applique. Dans ce cas, on dispose immédiatement d'une ligne de précontrainte intérieure au fuseau de passage. C'est ce que nous allons montrer.

Pour une section d'abscisse  $x$  de la poutre, on obtient le moment maximal en appliquant la charge variable  $q$  sur la zone  $\Pi_1(x)$  où la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section en cause présente une ordonnée positive (figure 110).

Ainsi disposée, la charge variable  $q$  développe dans la section d'abscisse  $x$  le moment  $M_{q_1}(x)$  et le moment maximal y prend la valeur :

$$M_M(x) = M_g(x) + M_{g'}(x) + M_{q_1}(x)$$

$M_g(x)$  et  $M_{g'}(x)$  représentant les moments dus au poids propre d'une part, aux charges permanentes additionnelles d'autre part, dans la section en cause.

Le moment minimal, quant à lui, est obtenu par application de la charge  $q$  sur la zone  $\Pi_2(x)$ , complémentaire de la zone  $\Pi_1(x)$ , où la ligne d'influence est d'ordonnée négative.

En appelant  $M_{q_2}(x)$  le moment développé par la charge  $q_2$  ainsi disposée, on a, comme précédemment :

$$M_m(x) = M_g(x) + M_{g'}(x) + M_{q_2}(x)$$

Si l'on superpose les deux cas de charge précédemment définis [ $q$  sur  $\Pi_1(x)$  et  $q$  sur  $\Pi_2(x)$ ] on obtient un cas de charge qui, contrairement aux deux autres, est indépendant de la section  $x$  considérée. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{M_M(x) + M_m(x)}{2} &= M_g(x) + M_{g'}(x) + \frac{1}{2}[M_{q_1}(x) + M_{q_2}(x)] \\ &= M_{g+g'+\frac{q}{2}}(x) \end{aligned} \quad (236)$$

où  $M_{g+g'+\frac{q}{2}}(x)$  représente le moment développé, dans la section

d'abscisse  $x$ , par l'ensemble des charges permanentes et de la charge uniforme d'intensité  $q/2$  appliquée sur toute la longueur de la poutre.

Considérons alors une ligne funiculaire de ce cas de charge  $g + g' + \frac{q}{2}$  parfaitement défini. Elle est concordante et constitue donc, pour la distribution de force  $P(x)$ , une ligne de précontrainte :

$$e_0(x) = -\frac{M_{g+g'+\frac{q}{2}}(x)}{P(x)}$$

Examinons comment se situe cette ligne  $e_0(x)$  par rapport au fuseau de passage délimité par les 2 courbes :

$$\begin{aligned} e_1(x) &= c(x) - \frac{M_M(x)}{P(x)} \\ e_2(x) &= -c'(x) - \frac{M_m(x)}{P(x)} \end{aligned}$$

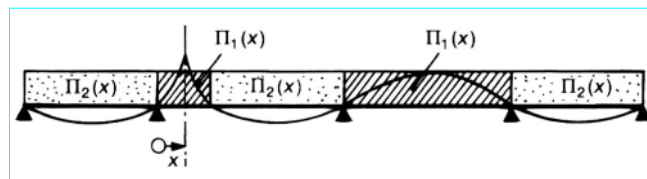


Figure 110 – Ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse  $x$  et zones  $\Pi_1(x)$  et  $\Pi_2(x)$

Comme, par hypothèse :  $c(x) = c'(x)$ , on a, compte tenu de l'équation (236) :

$$e_{00}(x) = - \frac{[M_M(x) + M_m(x)]}{2P(x)} = \frac{e_1(x) + e_2(x)}{2}$$

Autrement dit,  $e_{00}(x)$  est à mi-hauteur du fuseau de passage. Ainsi, dans le strict cadre des hypothèses définies précédemment, on obtient, sans aucun calcul, une ligne de précontrainte intérieure au fuseau de passage, donc mécaniquement satisfaisante, en prenant tout simplement la courbe qui se situe à mi-hauteur de ce fuseau. Il ne reste plus qu'à en déduire un tracé de câble réel, respectant les conditions pratiques d'enrobage.

## 10.7 Calcul des sollicitations de précontrainte par la méthode directe

Rappelons qu'elle consiste simplement à remplacer les câbles par l'ensemble des forces physiques  $\vec{F}_i$  qu'ils exercent sur le béton de la poutre. Les sollicitations développées par ce cas de charge particulier ne sont rien d'autre que les sollicitations totales de précontrainte.

Traisons par cette méthode l'exemple simple d'une poutre de section constante, à deux travées égales de portées  $\ell$  précontrainte par un câble parabolique dont l'excentricité est nulle aux extrémités et vaut  $e_0$  au droit de l'appui intermédiaire  $A_1$  (figure 111). En d'autres termes, sur la 1<sup>re</sup> travée :

$$e_0(x) = e_0 \frac{x}{\ell} \left( 2 - \frac{x}{\ell} \right)$$

On suppose par ailleurs la force de tension constante  $P(x) = P$  sur toute la longueur de la poutre.

Les forces  $\vec{F}_i$  appliquées par le câble sur le béton comprennent (figure 112) :

- les forces concentrées sous ancrages décomposables chacune en une force normale centrée et une force transversale ;
- les forces réparties radiales que l'on peut supposer (en négligeant les termes du 2<sup>e</sup> ordre) verticales et uniformes ; leur intensité, mesurée algébriquement sur la verticale ascendante, vaut  $\varpi = \frac{P}{r} = - \frac{2Pe_0}{\ell^2}$ ,  $r$  étant le rayon de courbure au sommet de la parabole.

Les forces réparties tangentiellles sont nulles du fait que  $P = Cte$ .

Les forces transversales sous ancrages sont reprises directement par les appuis. Les forces normales centrées sous ancrages ne génèrent qu'un effort normal en toute section :  $N_p(x) = P$ .

Seules les charges  $\varpi$  provoquent dans la poutre l'apparition d'efforts tranchants et de moments fléchissants qu'on peut facilement calculer par la relation des trois moments (226) qui s'écrit ici :

$$b_1 M_0 + (c_1 + a_2) M_1 + b_2 M_2 = \omega'_2 - \omega''_1$$

$$\text{avec} \quad b_1 = b_2 = \frac{\ell}{6EI} \quad c_1 = a_2 = \frac{\ell}{3EI}$$

$$M_0 = M_2 = 0$$

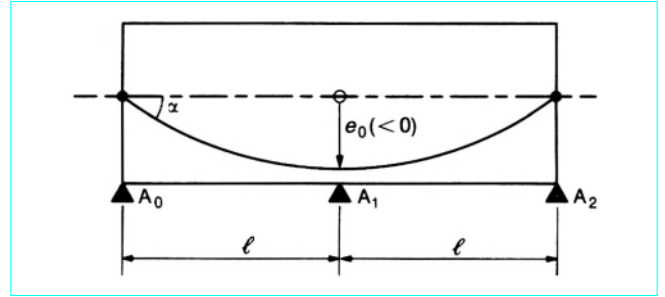


Figure 111 – Deux travées à précontrainte parabolique

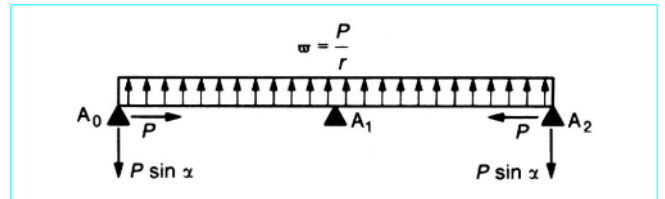


Figure 112 – Forces  $\vec{F}_i$  appliquées par le câble sur le béton

Les rotations d'extrémité des travées 1 et 2, supposées indépendantes, sous l'effet de la charge uniformément répartie sont données par la formule classique :

$$\omega'_2 = -\omega''_1 = \varpi \frac{\ell^3}{24EI} = -Pe_0 \frac{\ell}{12EI} \quad (237)$$

$$\text{D'où} \quad \frac{2\ell}{3EI} M_1 = \varpi \frac{\ell^3}{12EI} = -Pe_0 \frac{\ell}{6EI}$$

$$\text{et, finalement} \quad M_1 = -\frac{Pe_0}{4}$$

C'est là le moment total de précontrainte au droit de l'appui  $A_1$ .

En une section quelconque de la 1<sup>re</sup> travée, le moment total de précontrainte  $M_p(x)$  est donné par :

$$M_p(x) = m(x) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

où  $m(x)$  représente le moment fléchissant développé par la charge  $\varpi$  à l'abscisse  $x$  de la 1<sup>re</sup> travée supposée indépendante [voir formule (222)] :

$$m(x) = -\varpi \frac{x(\ell-x)}{2} = Pe_0 \frac{x}{\ell} \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) \quad (238)$$

$$\text{Donc} \quad M_p(x) = Pe_0 \frac{x}{\ell} \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{Pe_0}{4} \frac{x}{\ell} = Pe_0 \frac{x}{\ell} \left( \frac{3}{4} - \frac{x}{\ell} \right)$$

$$\text{et} \quad V_p(x) = \frac{2Pe_0}{\ell} \left( \frac{3}{8} - \frac{x}{\ell} \right)$$

La ligne de précontrainte s'en déduit facilement (figure 113) :

$$e_{00}(x) = \frac{M_p(x)}{P(x)} = e_0 \frac{x}{\ell} \left( \frac{3}{4} - \frac{x}{\ell} \right)$$

### ■ Remarque

Il peut paraître surprenant qu'appliquée sous sa forme (226), comme nous venons de le faire, la relation des trois moments donne le moment total de précontrainte, alors que sous sa forme (233) elle ne fournit que le moment hyperstatique de précontrainte. En réalité,



ce ne sont pas les mêmes chargements qui sont envisagés sur les travées, supposées indépendantes, selon qu'on utilise la méthode directe ou la méthode interne.

Dans le cas de la méthode interne, on aurait à considérer :

$$m_p(x) = P(x)e_0(x) = Pe_0 \frac{x}{\ell} \left( 2 - \frac{x}{\ell} \right)$$

[à comparer à  $m(x)$  donné par la formule (238) et, corrélativement :

$$\omega'_{2p} = -\omega''_{1p} = -\int_0^{\ell_1} P(x)e_0(x) \frac{x}{\ell} \frac{dx}{EI(x)} = -\frac{5}{12} \frac{Pe_0\ell}{EI}$$

[à comparer avec les valeurs de  $\omega'_2$  et  $\omega''_1$  données par (237)].

L'équation (233) s'écrirait :

$$b_1 M_0 + (c_1 + a_2) M_1 + b_2 M_2 = \omega'_{2p} - \omega''_{1p}$$

soit 
$$\frac{2\ell}{3EI} M_1 = -\frac{5}{6} \frac{Pe_0\ell}{EI}$$

D'où 
$$M_1 = -\frac{5}{4} Pe_0$$

On retrouverait bien ainsi le moment total de précontrainte obtenu précédemment sur appui intermédiaire :

$$M_1 = Pe_0 + M_1 = Pe_0 - \frac{5}{4} Pe_0 = -\frac{Pe_0}{4}$$

## 10.8 Lignes d'influence des moments hyperstatiques de précontrainte

### 10.8.1 Définition

Considérons, entre les abscisses  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$  d'une poutre continue, un tronçon élémentaire de câble tel que  $Pe_0 = 1$ .

Ce tronçon de câble génère un moment hyperstatique de précontrainte dont la valeur au droit de l'appui  $A_j$  est  $M_j^*(\alpha) d\alpha$ .

$M_j^*(\alpha)$  est la fonction d'influence du moment hyperstatique de précontrainte au droit de l'appui  $A_j$ . La ligne représentative de  $M_j^*(\alpha)$  est la ligne d'influence du moment hyperstatique de précontrainte au droit de l'appui  $A_j$ .

### 10.8.2 Allure de la ligne d'influence $M_j^*(\alpha)$

L'effet du tronçon de câble considéré équivaut à celui de :

- deux forces normales centrées  $+P$  et  $-P$ , appliquées aux abscisses  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$  ;
- deux couples  $+Pe_0$  et  $-Pe_0$  appliqués aux mêmes abscisses, les forces étant comptées algébriquement positives de la gauche

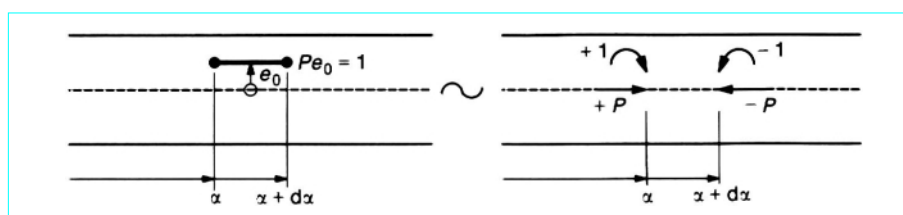


Figure 114 – Tronçon élémentaire de câble et forces exercées sur le béton

vers la droite et les couples algébriquement positifs dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 114).

Les forces centrées n'induisent aucun moment et il suffit, pour trouver  $M_j^*(\alpha) d\alpha$ , d'étudier l'effet des deux couples précédemment définis.

Pour ce faire, introduisons une rotule en  $A_j$  et appliquons le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti aux deux cas de charges suivants agissant sur la poutre ainsi articulée en  $A_j$  (figure 115).

(1) Couples  $+1$  et  $-1$  aux abscisses  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$  ; couple  $+M_j^*(\alpha) d\alpha$  immédiatement à droite de  $A_j$  et  $-M_j^*(\alpha) d\alpha$  immédiatement à gauche. Il convient de remarquer que les rotations de part et d'autre de  $A_j$  sont les mêmes (soit  $\omega$  leur valeur commune) du fait qu'on applique aux deux lèvres de l'articulation des couples opposés égaux en valeur absolue au moment fléchissant  $M_j^*(\alpha) d\alpha$  qui existerait en  $A_j$  dans la poutre parfaitement continue, sans rotule en ce point.

(2) Couples  $+1$  immédiatement à droite de  $A_j$  et  $-1$  immédiatement à gauche.

D'après le théorème de Maxwell-Betti le travail  $W_{12}$  des forces du système (1) dans les déplacements dus au système (2) est égal au travail  $W_{21}$  des forces du système (2) dans les déplacements dus au système (1).

Les couples étant comptés positifs dans le sens des aiguilles d'une montre et les rotations positives dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre), le travail d'un couple  $C$  dans la rotation  $\varphi$  vaut  $-C\varphi$ .

En écrivant les termes correspondant aux différents couples dans l'ordre où ils sont représentés sur la figure 115, on a :

$$W_{12} = -y'(\alpha) + y'(\alpha + d\alpha) + M_j^*(\alpha) d\alpha \theta_j'' - M_j^*(\alpha) d\alpha \theta_{j+1}'$$

$y'(\alpha)$  désignant la dérivée de  $y(\alpha)$ , autrement dit la rotation de la section d'abscisse  $\alpha$  de la poutre sous l'effet du système de forces (2).

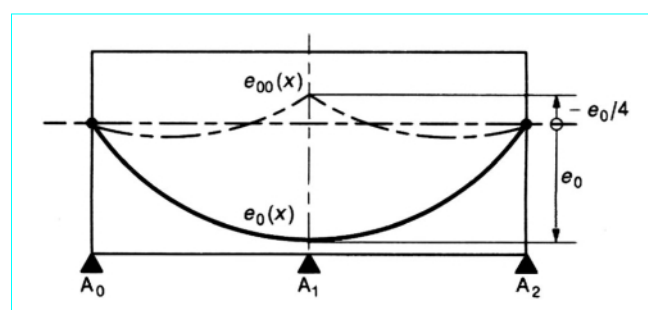


Figure 113 – Ligne de précontrainte

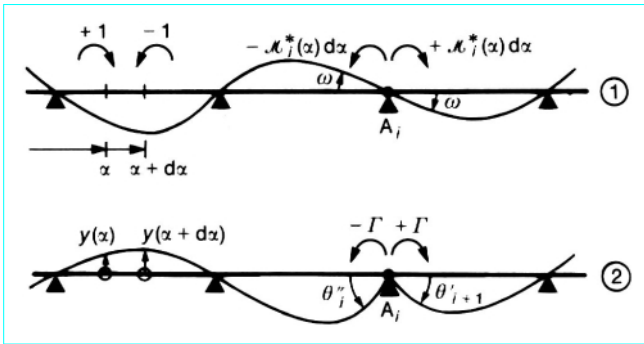


Figure 115 – Systèmes de forces (1) et (2) appliqués à la poutre articulée en  $A_i$  et déformations correspondantes

Ceci s'écrit encore :

$$W_{12} = y''(\alpha) d\alpha - M_i^*(\alpha) d\alpha \Delta\theta$$

expression dans laquelle  $y''(\alpha)$  représente la dérivée seconde de la fonction  $y(\alpha)$  et  $\Delta\theta = \theta'_{i+1} - \theta'_i$  la brisure angulaire de la déformée de la poutre à la traversée de son articulation lorsqu'on la soumet au système de forces (2).

De la même façon :

$$W_{21} = \Gamma\omega - \Gamma\omega = 0$$

Par conséquent :

$$y''(\alpha) d\alpha - M_i^*(\alpha) d\alpha \Delta\theta = 0$$

$$\text{Soit} \quad M_i^*(\alpha) = \frac{1}{\Delta\theta} y''(\alpha)$$

Or, si l'on désigne par  $m(\alpha)$  le moment fléchissant à l'abscisse  $\alpha$  de la poutre articulée lorsqu'on lui applique le système de forces (2) (figure 115), on a :

$$y''(\alpha) = \frac{m(\alpha)}{EI(\alpha)}$$

$$\text{Par suite} \quad M_i^*(\alpha) = \frac{1}{\Delta\theta} \frac{m(\alpha)}{EI(\alpha)}$$

Cette expression de  $M_i^*(\alpha)$  est particulièrement intéressante lorsqu'on a affaire à une poutre d'inertie constante : elle nous montre que, dans ce cas, la ligne d'influence du moment hyperstatique de précontrainte au droit de l'appui  $A_i$  se déduit, par une simple affinité de rapport  $1/EI \Delta\theta$ , de la ligne représentative du moment fléchissant dans la poutre articulée en  $A_i$  et soumise à 2 couples  $\pm \Gamma$  immédiatement à droite de  $A_i$  et  $-\Gamma$  immédiatement à gauche. On a donc, sans calcul, la ligne d'influence à une affinité près, dès lors qu'on connaît la position des foyers (figure 116).

### 10.8.3 Utilisation des lignes d'influence des moments hyperstatiques de précontrainte

■ Pour un câblage quelconque, défini par les deux fonctions  $P(\alpha)$  et  $e_0(\alpha)$ , la connaissance de la fonction  $M_i^*(\alpha)$  permet d'obtenir le moment hyperstatique de précontrainte  $M_i$  au droit de l'appui  $A_i$  par simple quadrature. On a en effet :

$$M_i = \int P(\alpha) e_0(\alpha) M_i^*(\alpha) d\alpha$$

l'intégration étant étendue à toute la longueur de la poutre.

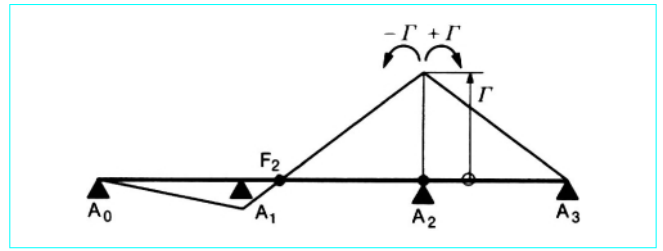


Figure 116 – Ligne représentative du moment fléchissant  $m(\alpha)$  dans la poutre articulée en  $A_2$ . C'est aussi, à une affinité près, la ligne d'influence du moment hyperstatique de précontrainte en  $A_2$

#### ■ Retouches à des tracés de câblage ou de ligne de précontrainte.

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait défini une ligne de précontrainte théorique  $e_{00}(\alpha)$  mécaniquement satisfaisante pour la distribution  $P(\alpha)$  de la force de précontrainte et que, pour des raisons pratiques, on souhaite apporter des retouches localisées  $\Delta e_{00}(\alpha)$  à ce tracé théorique, la ligne  $e'_{00}(\alpha) = e_{00}(\alpha) + \Delta e_{00}(\alpha)$  ainsi obtenue devant conserver le caractère de ligne de précontrainte, autrement dit, satisfaire comme  $e_{00}(\alpha)$  aux relations de concordance.

La connaissance des lignes d'influence, ou tout au moins de leur allure, permet d'orienter le projeteur dans le choix de ces retouches. En effet, la ligne  $e_{00}(\alpha)$  étant concordante, on a :

$$\int P(\alpha) e_{00}(\alpha) M_i^*(\alpha) d\alpha = 0 \quad (\text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1)$$

La ligne  $e'_{00}(\alpha)$  doit, elle aussi, satisfaire à :

$$\int P(\alpha) e'_{00}(\alpha) M_i^*(\alpha) d\alpha = 0 \quad (\text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1)$$

D'où, par différence :

$$\int P(\alpha) \Delta e_{00}(\alpha) M_i^*(\alpha) d\alpha = 0 \quad (239)$$

Considérons, à titre d'exemple, un ouvrage symétrique à trois travées, précontraint par un câblage filant, lui aussi symétrique, pour lequel on peut admettre  $P(\alpha) = Cte = P$ .

À l'effet de chaque tronçon élémentaire de câble de longueur  $d\alpha$  à l'abscisse  $\alpha$ , on peut associer celui du tronçon symétrique, de longueur  $d\alpha$  et d'abscisse  $L - \alpha$ ,  $L$  désignant la longueur totale de l'ouvrage (figure 117), et donc considérer, au lieu des fonctions d'influence  $M_1^*(\alpha)$  et  $M_2^*(\alpha)$ , la pseudo-fonction d'influence  $M'^*(\alpha) = M_1^*(\alpha) + M_2^*(L - \alpha)$ .

Supposons que, par le calcul, on ait obtenu une ligne de précontrainte  $e_{00}(\alpha)$  présentant des points anguleux au droit des appuis intermédiaires et qu'on souhaite écrêter les pics correspondants en arrondissant le tracé dans le voisinage immédiat des appuis en question (figure 117). Dans les zones (I) et (III), en cause,  $M'^*(\alpha)$  est pratiquement constante (elle l'est strictement sur la travée centrale), et comme  $P(\alpha)$  est aussi constante, on doit avoir, d'après (239) :

$$\int \Delta e_{00}(\alpha) d\alpha = 0 \quad (240)$$

$\Delta e_{00}(\alpha)$  étant négatif sur les zones (I) et (III), il va falloir compenser ces retouches vers le bas par des retouches vers le haut, par exemple, vers le milieu de l'ouvrage en zone (II), là où la fonction  $M'^*(\alpha)$  est constante et égale aux valeurs qu'elle prend sur (I) et (III).

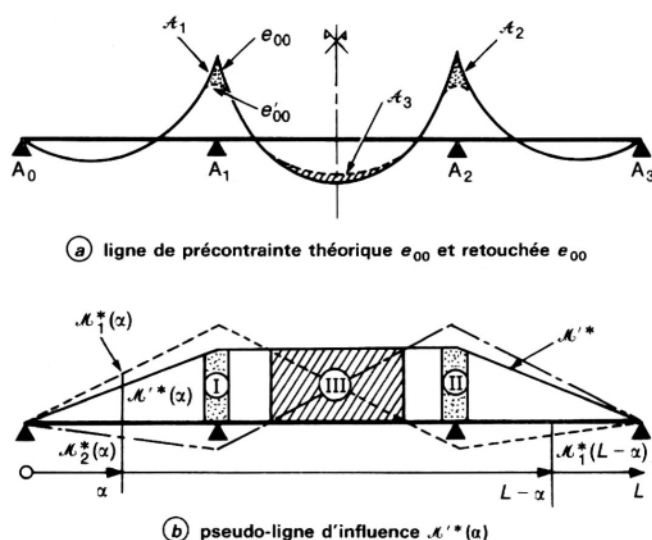


Figure 117 – Poutre symétrique à 3 travées

L'équation (240) nous montre que, dans ces conditions, l'aire  $\mathcal{A}_3$  doit être égale à la somme des aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  (figure 117a).

Dans le même ordre d'idées, on peut remarquer que les lignes d'influence des moments hyperstatiques de précontrainte sur appuis  $A_i$  présentent une ordonnée nulle au droit des appuis

extrêmes et donc faible à proximité de ces appuis. On peut ainsi, sans perturber sensiblement la distribution des moments hyperstatiques de précontrainte, modifier un tracé théorique de câblage dans ces zones de façon à implanter au mieux les ancrages d'about, compte tenu des sujétions d'encombrement.

### Notations et Symboles

Symbole	Définition
$A$	aire d'une section droite d'armatures
$B$	aire d'une section droite de béton
$E$	module d'élasticité
$F$	force ou action en général
$G$	action permanente
$G$	centre de gravité
$I$	moment d'inertie d'une section par rapport à son axe central $Gz$
$J$	moment d'inertie d'une section par rapport à un axe parallèle à $Gz$
$K$	coefficient
$M$	moment fléchissant
$N$	effort normal
$P$	{ action de la précontrainte force de précontrainte
$Q$	charge ou action variable
$R$	réaction d'appui
$S$	sollicitation quelconque

Les notations employées dans cet article sont généralement conformes à celles des règlements BAEL 83 et BPEL 83. Elles s'en écartent cependant sur quelques points.

— le surlignage désigne ici des valeurs limites, qu'il s'agisse de contraintes ou de sollicitations ;

— l'astérisque représente les valeurs de calcul pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.

### Notations et Symboles

Symbole	Définition
$T$	{ moment de torsion température
$V$	effort tranchant
$W$	vent
$Z$	bras de levier du couple élastique
$\mathcal{C}$	moment de torsion
$\mathcal{M}$	moment fléchissant
$\mathcal{N}$	effort normal
$\mathcal{R}$	réaction
$\mathcal{V}$	effort tranchant
	{ hyperstatique de précontrainte hyperstatique de précontrainte
$\mathcal{M}$	moment par rapport à un point autre que $G$
$a$	dimension (en général, longitudinale)
$b$	{ dimension (en général, transversale) épaisseur (nette) d'une âme
$c$	ordonnée du point le plus haut du noyau limite de traction

Les notations employées dans cet article sont généralement conformes à celles des règlements BAEL 83 et BPEL 83. Elles s'en écartent cependant sur quelques points.

— le surlignage désigne ici des valeurs limites, qu'il s'agisse de contraintes ou de sollicitations ;

— l'astérisque représente les valeurs de calcul pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.

Notations et Symboles	
Symbole	Définition
$-c'$	ordonnée du point le plus bas du noyau limite de traction
$d$	distance minimale du câble moyen à la fibre supérieure
$d'$	distance minimale du câble moyen à la fibre inférieure
$e$	excentricité d'une force normale par rapport au centre de gravité de la section
$e_0$	excentricité de la précontrainte
$e_1$	excentricité du point le plus haut du noyau de passage (de traction)
$e_2$	excentricité du point le plus bas du noyau de passage (de traction)
$f$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{coefficient de frottement d'un câble sur son conduit} \\ \text{résistance d'un matériau} \end{array} \right.$
$g$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{rentrée d'ancrage} \\ \text{densité de poids propre} \end{array} \right.$
$g'$	densité de charges permanentes additionnelles
$h$	hauteur totale d'une section droite
$h_0$	épaisseur d'une membrure
$j$	nombre de jours
$k$	coefficient (en général)
$\ell$	longueur ou portée
$n$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{coefficient d'équivalence acier-béton} \\ \text{nombre entier} \end{array} \right.$
$q$	densité de charge variable
$r$	rayon
$s$	espacement des armatures, en général ; écart-type
$t$	temps
$u$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{dimension} \\ \text{périmètre} \end{array} \right.$
$v$	distance du centre de gravité à la fibre supérieure
$v'$	distance du centre de gravité à la fibre inférieure
$x$	abscisse
$y$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ordonnée (sur l'axe Gy)} \\ \text{profondeur de l'axe neutre} \end{array} \right.$
$z$	coordonnée selon l'axe Gz
<p>Les notations employées dans cet article sont généralement conformes à celles des règlements BAEL 83 et BPEL 83. Elles s'en écartent cependant sur quelques points.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>— le surlignage désigne ici des valeurs limites, qu'il s'agisse de contraintes ou de sollicitations ;</li><li>— l'astérisque représente les valeurs de calcul pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.</li></ul>	

Notations et Symboles	
Symbole	Définition
$\Gamma$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{couple d'encastrement} \\ \text{ordonnée du point le plus haut du noyau} \\ \text{limite, au sens strict} \end{array} \right.$
$-\Gamma'$	ordonnée du point le plus bas du noyau limite, au sens strict
$\Delta$	variation
$\Phi$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{coefficient} \\ \text{rapport de la déformation finale de} \\ \text{fluage à la déformation instantanée} \end{array} \right.$
$\Omega$	aire
$\alpha$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{angle d'une armature de précontrainte avec} \\ \text{la fibre moyenne d'une poutre} \\ \text{coefficient} \end{array} \right.$
$\beta$	angle des bielles d'effort tranchant avec la fibre moyenne
$\gamma$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{coefficient partiel de sécurité} \\ \text{ordonnée du point le plus haut} \\ \text{du noyau limite de compression} \end{array} \right.$
$-\gamma'$	ordonnée du point le plus bas du noyau limite de compression
$\delta$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{variation d'une grandeur} \\ \text{distance} \end{array} \right.$
$\varepsilon$	déformation relative
$\zeta$	coefficient de striction
$\eta$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ordonnée d'un point courant d'une section droite} \\ \text{coefficient de fissuration d'une armature passive} \end{array} \right.$
$\theta$	angle
$\lambda$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{ouverture relative de la fourchette de précontrainte} \\ \text{élancement mécanique} \end{array} \right.$
$\mu$	coefficient
$\nu$	coefficient de Poisson
$\rho$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{rendement géométrique d'une section} \\ \text{relaxation relative} \\ \text{coefficient} \end{array} \right.$
$\sigma$	contrainte normale
$\tau$	contrainte tangente
$\varphi$	coefficient de <i>perte en ligne</i>
$\psi$	coefficient réducteur d'une action caractéristique
<p>Les notations employées dans cet article sont généralement conformes à celles des règlements BAEL 83 et BPEL 83. Elles s'en écartent cependant sur quelques points.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>— le surlignage désigne ici des valeurs limites, qu'il s'agisse de contraintes ou de sollicitations ;</li><li>— l'astérisque représente les valeurs de calcul pour les justifications vis-à-vis des états limites ultimes.</li></ul>	

## Liste des Indices

<i>A</i>	action accidentelle
<i>F</i>	action, en général
<i>G</i>	actions permanentes
<i>M</i>	maximum
<i>P</i>	précontrainte
<i>Q</i>	action variable
<i>b</i>	béton
<i>c</i>	compression
<i>d</i>	{ de calcul différé
<i>e</i>	élastique (ou à la limite d'élasticité)
<i>f</i>	{ fissuration fréquent
<i>fℓ</i>	fluage
<i>g</i>	{ par rentrée d'ancrage poids propre garantie (ou spécifiée)
<i>g'</i>	charges permanentes additionnelles
<i>h</i>	hyperstatique
<i>i</i>	{ initial instantané

## Liste des Indices

<i>j</i>	âgé de <i>j</i> jours
<i>k</i>	caractéristique
<i>m</i>	moyen (ou probable)
<i>m</i>	minimum
max	maximum
min	minimum
<i>n</i>	{ net nominal
<i>o</i>	à l'origine
<i>p</i>	précontrainte
<i>q</i>	charges variables
<i>qp</i>	quasi permanent
<i>r</i>	{ retrait rupture
<i>s</i>	passive
<i>t</i>	{ traction transversale
<i>u</i>	ultime
<i>v</i>	à long terme