

# Calcul des structures

## Voiles minces

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

<b>1. Définition et état de contrainte d'un voile mince .....</b>	A 320 - 2
1.1 Membranes et coques .....	— 2
1.2 État de contrainte d'un voile mince fléchi (coque) .....	— 2
1.3 État de contrainte d'un voile mince sans flexion (membrane) .....	— 4
<b>2. Théorie de la membrane pour les voiles minces de forme quelconque .....</b>	— 5
2.1 Théorie de la membrane en coordonnées cartésiennes .....	— 5
2.2 Voiles dont la surface moyenne est un paraboloïde .....	— 7
2.3 Voiles dont la surface moyenne est un conoïde .....	— 9
2.4 Théorie de la membrane en coordonnées curvilignes .....	— 9
2.5 Transformation d'un voile par affinité .....	— 12
2.6 Voile dont la surface moyenne est un hyperbololoïde à une nappe .....	— 13
<b>3. Voiles de révolution .....</b>	— 14
3.1 Notations et formules préliminaires .....	— 14
3.2 Équations générales de la théorie de la membrane .....	— 14
3.3 Voiles soumis à une densité de force symétrique .....	— 16
3.4 Voiles soumis à une densité de force quelconque .....	— 19
3.5 Flexion symétrique des voiles de révolution .....	— 21
<b>4. Voiles cylindriques .....</b>	— 25
4.1 Notations et formules préliminaires .....	— 25
4.2 Voiles cylindriques non fléchis (théorie de la membrane) .....	— 25
4.3 Flexion des voiles cylindriques (théorie simplifiée) .....	— 27
4.4 Tube cylindrique soumis à une sollicitation indépendante de $\theta$ .....	— 29
4.5 Voiles cylindriques autoportants .....	— 31
<b>Pour en savoir plus .....</b>	Doc. A 320

Doc. A 320

**C**et article étudie l'équilibre de membrane des voiles minces.

Les notations sont définies au début de la présente rubrique **Calcul des structures**.

# 1. Définition et état de contrainte d'un voile mince

## 1.1 Membranes et coques

Portons sur la normale  $Az$  en un point  $A$  d'une surface  $\Sigma$ , et de part et d'autre de cette surface, deux longueurs égales  $AA_1 = AA_2 = 1/2 h$ , petites devant les dimensions et les rayons de courbure principaux de la surface  $\Sigma$ . Lorsque  $A$  décrit la surface  $\Sigma$ ,  $A_1$  et  $A_2$  décrivent deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  parallèles à  $\Sigma$ . Le solide engendré par le segment  $A_1A_2$  est un *voile mince de surface moyenne  $\Sigma$  et d'épaisseur  $h$* .

Un voile mince est géométriquement défini par sa surface moyenne  $\Sigma$ , par son épaisseur  $h$  et par les *conditions d'appui* sur le contour de la surface moyenne ou *bord* du voile (bord encastré, bord articulé, bord libre, etc.).

Les forces appliquées à un voile mince sont des forces de volume (poids propre), des forces de surface (neige, vent, pression d'un liquide, etc.) et des forces de ligne (réactions des appuis distribuées le long des bords du voile).

Considérons un élément  $d\Sigma$  de la surface moyenne, et soit  $dV$  l'élément du voile engendré par  $A_1A_2$  lorsque  $A$  décrit  $d\Sigma$ . Les éléments de réduction, au centre de gravité de  $d\Sigma$ , des forces appliquées à l'élément  $dV$  comprennent une résultante générale  $\vec{F} d\Sigma$  et un moment résultant  $\vec{\Gamma} d\Sigma$ . Le principe de Saint-Venant (article *Théorie de l'élasticité* [A 305]) nous apprend que les contraintes et les déformations, en un point du voile éloigné de l'élément  $dV$ , sous l'effet des forces appliquées à l'élément  $dV$ , ne dépendent que de  $\vec{F} d\Sigma$  et de  $\vec{\Gamma} d\Sigma$ . Il est donc légitime, pour calculer un voile mince, de remplacer les forces extérieures réellement appliquées au voile par la densité de force  $\vec{F}$  et par la densité de couple  $\vec{\Gamma}$ . En outre, l'épaisseur du voile étant petite, il est possible de supposer  $\vec{\Gamma}$  négligeable.

Considérons (figure 1) un repère orthonormé  $Axyz$ ; les axes  $Ax$  et  $Ay$  sont dans le plan tangent en  $A$  à  $\Sigma$ , et l'axe  $Az$  est normal à  $\Sigma$ . Relativement aux axes  $Axyz$ , les composantes du tenseur contrainte sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

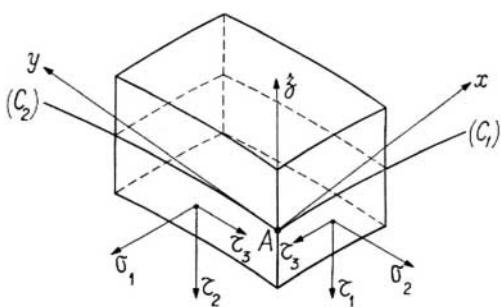


Figure 1 – Composantes du tenseur contrainte

Les seules forces agissant sur le voile étant, par hypothèse, appliquées à la surface moyenne, la composante  $\sigma_3$  est nulle sur les surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  qui limitent le voile. Nous admettrons, le voile étant mince, que la composante  $\sigma_3$  est toujours négligeable.

Lorsque les composantes non nulles  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3$  du tenseur contrainte dépendent de  $z$ , les sections du voile normales à la surface moyenne transmettent des efforts normaux, des efforts de cisaillement, des efforts tranchants, des moments fléchissants et des moments de torsion ; dans ce cas, le voile est un *voile mince fléchi*, ou **coque**.

Lorsque les composantes non nulles du tenseur contrainte ne dépendent pas de  $z$ , donc sont uniformément distribuées sur l'épaisseur du voile, seules les composantes  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\tau_3$  sont différentes de zéro, puisque les composantes  $\tau_1, \tau_2$  et  $\sigma_3$ , nulles pour  $z = \pm 1/2 h$ , sont identiquement nulles ; dans ce cas, le voile est un *voile mince sans flexion*, ou **membrane**.

## 1.2 État de contrainte d'un voile mince fléchi (coque)

### 1.2.1 État de contrainte en coordonnées curvilignes orthogonales

Définissons sur la surface moyenne  $\Sigma$  un système de coordonnées curvilignes orthogonales  $(u_1, u_2)$ . En un point  $A$  de  $\Sigma$  passent deux lignes coordonnées  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dont les courbures normales en  $A$  sont  $1/r_1$  et  $1/r_2$ . Le repère orthonormé  $Axyz$  est constitué par les tangentes  $Ax$  et  $Ay$  aux lignes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et par la normale  $Az$  à  $\Sigma$  (figure 1).

Considérons (figure 2) d'abord une section  $a_1 b_1 c_1 d_1$  du voile normal en  $A$  à  $(C_1)$  et correspondant à une longueur d'arc  $ds_2$  de  $(C_2)$ . Les forces élastiques qui s'exercent sur cette section ont une résultante générale de composantes  $(-N_1 ds_2, -N_{12} ds_2, Q_1 ds_2)$  et un moment résultant de composantes  $(-M_{12} ds_2, M_1 ds_2, 0)$  suivant  $Ax$ ,  $Ay$  et  $Az$ . En tenant compte de ce que l'élément d'aire de la section compris entre  $z$  et  $z + dz$  a pour valeur  $(1 + z/r_2) dz ds_2$ , nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \\ N_{12} &= \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_3 \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \\ Q_1 &= - \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_2 \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \\ M_1 &= - \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_1 z \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \\ M_{12} &= - \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_3 z \left(1 + \frac{z}{r_2}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

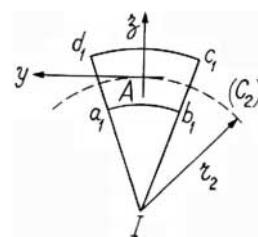


Figure 2 – Section de voile normale à  $(C_1)$

Puis, si nous considérons une section du voile normale en  $A$  à  $(C_2)$  et correspondant à une longueur d'arc  $ds_1$  de  $(C_1)$ , les forces élastiques qui s'exercent sur cette section ont une résultante générale de composantes  $(-N_{21} ds_1, -N_2 ds_1, Q_2 ds_1)$  et un moment résultant de composantes  $(-M_2 ds_1, M_{21} ds_1, 0)$  suivant  $Ax$ ,  $Ay$  et  $Az$ , et nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \\ N_{21} &= \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_3 \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \\ Q_2 &= - \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_1 \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \\ M_2 &= - \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_2 z \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \\ M_{21} &= - \int_{-1/2h}^{1/2h} \tau_3 z \left(1 + \frac{z}{r_1}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Les efforts normaux  $N_1$  et  $N_2$  sont positifs lorsqu'ils ont pour effet de tendre le voile ; les moments fléchissants  $M_1$  et  $M_2$  sont positifs lorsqu'ils ont pour effet de comprimer la face supérieure  $z = 1/2 h$ .

L'état de contrainte est défini en chaque point de la surface moyenne par :

— le **tenseur tension** qui a pour composantes les tensions normales  $N_1$  et  $N_2$ , et les tensions de cisaillement  $N_{12}$  et  $N_{21}$  ; ce tenseur est représenté par la matrice :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_{21} \\ N_{12} & N_2 \end{bmatrix}$$

— le **vecteur effort tranchant** de composantes  $Q_1$  et  $Q_2$ , représenté par la matrice colonne :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

— le **tenseur flexion** qui a pour composantes les moments fléchissants  $M_1$  et  $M_2$ , et les moments de torsion  $M_{12}$  et  $M_{21}$  ; ce tenseur est représenté par la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_{21} \\ M_{12} & M_2 \end{bmatrix}$$

$N_1, N_{12}, Q_1, M_1$  et  $M_{12}$  sont les efforts internes par unité de longueur transmis par une section du voile normale en  $A$  à  $(C_1)$  ;  $N_2, N_{21}, Q_2, M_2$  et  $M_{21}$  sont les efforts internes par unité de longueur transmis par une section du voile normale à  $(C_2)$  (figure 3).

Il est remarquable que l'on ait  $N_{12} \neq N_{21}$  et  $M_{12} \neq M_{21}$ . Cependant, lorsque  $r_3$  ne dépend pas de  $z$ , on a  $N_{12} = N_{21}$  et, dans le cas d'un voile sphérique ( $r_1 = r_2$ ), on a  $N_{12} = N_{21}$  et  $M_{12} = M_{21}$ . En fait, puisque  $z$  est très petit devant  $r_1$  et  $r_2$ ,  $N_{12}$  diffère très peu de  $N_{21}$ , et  $M_{12}$  diffère très peu de  $M_{21}$ . Il est pourtant indispensable de tenir compte de ces différences insignifiantes dans l'étude des voiles minces fléchis. En effet, nous avons six équations d'équilibre (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303]), et la loi de comportement du matériau permet d'exprimer les quatre composantes du tenseur tension et les quatre composantes du tenseur flexion en fonction des composantes ( $u, v, w$ ) du déplacement du point  $A$  suivant le repère mobile  $Axyz$ . Au total, nous obtenons quatorze équations pour treize inconnues (dix composantes définissant l'état de contrainte et trois composantes de déplacement). Mais il se trouve que l'équation d'équilibre des moments autour de la normale est une conséquence des autres, de sorte que nous avons en réalité treize équations pour treize inconnues. Si nous avions admis  $N_{12} = N_{21}$  et  $M_{12} = M_{21}$ , nous aurions obtenu douze équations dont aucune n'est la conséquence des autres, pour déterminer onze inconnues.

## 1.2.2 Changement de coordonnées curvilignes orthogonales

### 1.2.2.1 Transformation du tenseur tension

Considérons (figure 4) une section  $BC$  du voile, dont la normale fait l'angle  $\theta$  avec  $Ax$ . En écrivant l'équilibre des forces appliquées au triangle infiniment petit  $ABC$ , nous trouvons que la section  $BC$  transmet par unité de longueur un effort normal  $N(\theta)$  et un effort de cisaillement  $T(\theta)$  :

$$\left. \begin{aligned} N(\theta) &= N_1 \cos^2 \theta + N_2 \sin^2 \theta + (N_{12} + N_{21}) \sin \theta \cos \theta \\ T(\theta) &= (N_2 - N_1) \sin \theta \cos \theta + N_{12} \cos^2 \theta - N_{21} \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

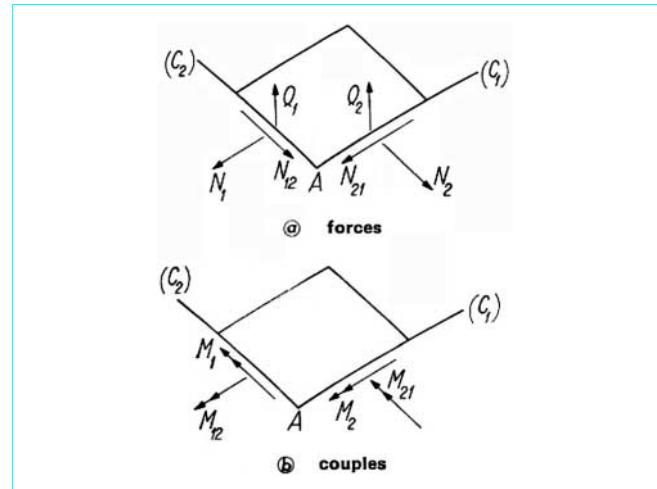


Figure 3 – Efforts internes transmis par des sections de voile normales à  $(C_1)$  et à  $(C_2)$

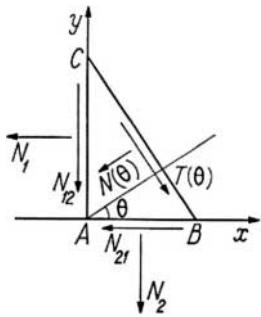


Figure 4 – Forces transmises par une section BC en coordonnées curvilignes orthogonales

Il en résulte que  $N(\theta)$  varie entre un maximum et un minimum correspondant à deux *sections principales* dont l'angle  $\theta$  est défini par :

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = (N_{12} + N_{21}) \cos 2\theta - (N_1 - N_2) \sin 2\theta = 0$$

soit par :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{N_{12} + N_{21}}{N_1 - N_2}$$

Les sections principales sont donc orthogonales.

Il existe également deux sections qui ne transmettent pas d'effort de cisaillement ; elles sont définies par  $T(\theta) = 0$ , soit :

$$(N_{12} + N_{21}) \cos 2\theta - (N_1 - N_2) \sin 2\theta + (N_{12} - N_{21}) = 0$$

et, puisque  $N_{12}$  diffère très peu de  $N_{21}$ , ces deux sections, qui ne sont pas orthogonales, sont très voisines des sections principales.

Choisissons un nouveau système de coordonnées curvilignes orthogonales dont le repère  $Ax'y'z$  se déduit du repère  $Axyz$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de la normale  $Az$  à la surface moyenne, et soit  $S$  la matrice orthogonale ( $S^t = S^{-1}$ ) :

$$S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Il résulte des formules (3) que la matrice  $N'$  du tenseur tension relativement aux axes  $Ax'y'z$  a pour expression :

$$N' = S^t NS$$

$N$  est donc bien la matrice d'un tenseur dont les invariants sont :

$$N_1 + N_2, \quad N_1 N_2 - N_{12} N_{21}, \quad N_{12} - N_{21}$$

### 1.2.2.2 Transformation du tenseur flexion

L'équilibre des couples appliqués au triangle  $ABC$  (figure 5) permet de calculer le moment fléchissant  $M(\theta)$  et le couple de torsion  $C(\theta)$  transmis par unité de longueur par la section  $BC$  dont la normale fait l'angle  $\theta$  avec  $Ax$  :

$$\left. \begin{aligned} M(\theta) &= M_1 \cos^2 \theta + M_2 \sin^2 \theta + (M_{12} + M_{21}) \sin \theta \cos \theta \\ C(\theta) &= (M_2 - M_1) \sin \theta \cos \theta + M_{12} \cos^2 \theta - M_{21} \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Il en résulte que la matrice  $M'$  du tenseur flexion relativement aux axes  $Ax'y'z$  a pour expression :

$$M' = S^t MS$$

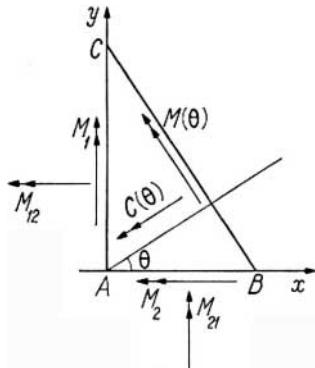


Figure 5 – Couples transmis par une section BC en coordonnées curvilignes orthogonales

$M$  est donc bien la matrice d'un tenseur dont les invariants sont :

$$M_1 + M_2, \quad M_1 M_2 - M_{12} M_{21}, \quad M_{12} - M_{21}$$

### 1.2.2.3 Transformation du vecteur effort tranchant

L'effort tranchant transmis par la section  $BC$  par unité de longueur a pour valeur, comme le montre l'équilibre des forces appliquées normalement au plan du triangle  $ABC$  :

$$Q(\theta) = Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta$$

Il en résulte que, relativement aux axes  $Ax'y'z$ , la matrice colonne représentant le vecteur effort tranchant a pour expression :

$$Q' = S^t Q$$

$Q$  est donc bien la matrice d'un vecteur.

## 1.3 État de contrainte d'un voile mince sans flexion (membrane)

### 1.3.1 État de contrainte en coordonnées curvilignes orthogonales

Dans ce cas, les composantes non nulles  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\tau_3$  du tenseur contrainte ne dépendent pas de  $z$ . L'état de contrainte du voile est défini par le tenseur tension dont les composantes :

$$N_1 = \sigma_1 h, \quad N_2 = \sigma_2 h, \quad N_{12} = N_{21} = \tau_3 h$$

sont égales aux composantes du tenseur contrainte plan ( $\sigma_1, \sigma_2, \tau_3$ ) multipliées par l'épaisseur  $h$  du voile.

Une section dont la normale fait l'angle  $\theta$  avec  $Ax$  transmet par unité de longueur un effort normal  $N(\theta)$  et un effort de cisaillement  $T(\theta)$  :

$$\left. \begin{aligned} N(\theta) &= N_1 \cos^2 \theta + N_2 \sin^2 \theta + 2N_{12} \sin \theta \cos \theta \\ T(\theta) &= (N_2 - N_1) \sin \theta \cos \theta + N_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Il existe donc en chaque point de la surface moyenne du voile deux directions principales pour lesquelles on a :

$$T(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial \theta} = 0$$

Les directions principales sont orthogonales ; elles sont en effet définies par :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2N_{12}}{N_1 - N_2}$$

Une direction principale  $AX$  correspond au maximum  $N_1$  de  $N(\theta)$ , et l'autre direction principale  $AY$  correspond au minimum  $N_2$  de  $N(\theta)$ . Les *tensions principales* ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \left[ N_1 + N_2 + \sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4N_{12}^2} \right] \\ N_2 &= \frac{1}{2} \left[ N_1 + N_2 - \sqrt{(N_1 - N_2)^2 + 4N_{12}^2} \right] \end{aligned}$$

### 1.3.2 État de contrainte en coordonnées curvilignes quelconques

En un point  $A$  de la surface moyenne passent deux lignes coordonnées  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Nous désignons par  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs unités portés par les tangentes  $Ax$  et  $Ay$  à  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , et par  $\varphi$  l'angle  $(Ax, Ay)$  (figure 6). Désignons par  $\vec{\Phi}_1$  et  $\vec{\Phi}_2$  les vecteurs tensions transmis par les sections du voile dirigées suivant  $Ax$  et  $Ay$ , et décomposons les vecteurs  $\vec{\Phi}_1$  et  $\vec{\Phi}_2$  suivant  $Ax$  et  $Ay$  :

$$\vec{\Phi}_1 = -N_{21}\vec{i} - N_2\vec{j}, \quad \vec{\Phi}_2 = -N_1\vec{i} - N_{12}\vec{j}$$

Montrons que  $N_{12} = N_{21}$ . Le tenseur tension satisfait, comme le tenseur contrainte, au théorème de réciprocité de Cauchy (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303]) ; donc la projection de  $\vec{\Phi}_1$  sur la normale à  $Ay$  est égale à la projection de  $\vec{\Phi}_2$  sur la normale à  $Ax$ , soit  $N_{12} \sin \varphi = N_{21} \sin \varphi$ .

Dans le repère  $Axyz$ , le tenseur tension est donc défini par trois composantes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12} = N_{21}$ .

Il est possible, connaissant  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$ , de déterminer les directions principales et les tensions principales. L'angle  $\theta$  que fait  $Ax$  avec une direction principale est donné par :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{N_2 \sin 2\varphi + 2N_{12} \sin \varphi}{N_1 + N_2 \cos 2\varphi + 2N_{12} \cos \varphi}$$

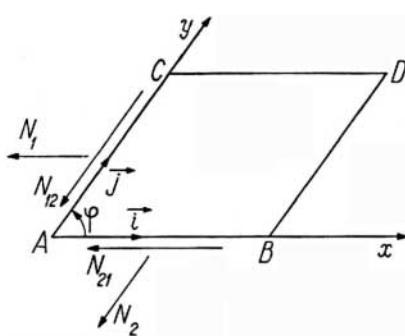


Figure 6 – État de contrainte en coordonnées curvilignes quelconques

Les tensions principales ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2 \sin \varphi} (N_1 + N_2 + \sqrt{\Delta}) \\ N_2 &= \frac{1}{2 \sin \varphi} (N_1 + N_2 - \sqrt{\Delta}) \end{aligned}$$

$\Delta$  désignant l'expression :

$$\Delta = (N_1 - N_2)^2 + 4(N_1 \cos \varphi + N_{12})(N_2 \cos \varphi + N_{12})$$

## 2. Théorie de la membrane pour les voiles minces de forme quelconque

### 2.1 Théorie de la membrane en coordonnées cartésiennes

#### 2.1.1 Équations générales d'équilibre

Soit :

$$\vec{z} = f(x, y)$$

l'équation de la surface moyenne  $\Sigma$  du voile, rapportée à trois axes rectangulaires  $Oxyz$  de vecteurs unités  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ . Pour simplifier l'écriture, nous désignerons les dérivées premières de  $f(x, y)$  par :

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}$$

et les dérivées secondes de  $f(x, y)$  par :

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nous prendrons comme lignes coordonnées tracées sur  $\Sigma$  les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ , intersections de  $\Sigma$  par les plans parallèles aux plans  $Oxz$  et  $Oyz$ . Nous désignerons par  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs unités tangents à  $(C_1)$  et à  $(C_2)$ , et par  $\vec{k}$  le vecteur unité normal à  $\Sigma$ . Des considérations de géométrie analytique élémentaire montrent que :

$$\vec{i} = \frac{\vec{I} + \alpha \vec{K}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \vec{j} = \frac{\vec{J} + \beta \vec{K}}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{K} - \alpha \vec{I} - \beta \vec{J}}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}$$

Nous supposons le voile soumis à une densité superficielle de force  $\vec{\omega}$ .

Le tenseur tension sera défini par ses composantes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$  suivant les tangentes aux lignes coordonnées (§ 1.3.2).

Écrivons l'équilibre d'un élément  $ABCD$  de la surface du voile (figure 7), compris entre deux lignes coordonnées voisines  $[C_1(y)]$  et  $[C_1(y + dy)]$ , et deux lignes coordonnées voisines  $[C_2(x)]$  et  $[C_2(x + dx)]$ . Nous avons :

$$AB = ds_1 = \sqrt{1 + \alpha^2} dx, \quad AD = ds_2 = \sqrt{1 + \beta^2} dy$$

La résultante des forces appliquées à l'élément  $ABCD$  a pour expression :

$$\vec{\omega} d\Sigma = \vec{\omega} \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} dx dy$$

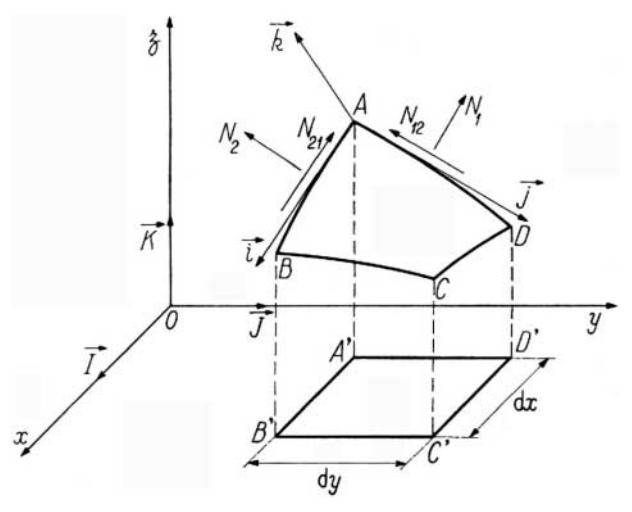


Figure 7 – Équilibre d'un élément de la surface du voile

L'équilibre des forces appliquées à l'élément  $ABCD$  se traduit par l'équation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial x} [(N_1 \vec{i} + N_{12} \vec{j}) ds_2] + \frac{\partial}{\partial y} [(N_{12} \vec{i} + N_2 \vec{j}) ds_1] + \vec{\omega} d\Sigma = 0$$

L'équation d'équilibre des moments est identiquement vérifiée au second ordre près.

Remplaçons, dans l'équation d'équilibre,  $ds_1$ ,  $ds_2$  et  $d\Sigma$  par leurs valeurs  $\sqrt{1+\alpha^2} dx$ ,  $\sqrt{1+\beta^2} dy$  et  $\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2} dx dy$ , et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  par leurs expressions en fonction de  $\vec{I}$ ,  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$ . En posant :

$$\bar{N}_1 = N_1 \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}}, \quad \bar{N}_{12} = N_{12}, \quad \bar{N}_2 = N_2 \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2}} \quad (6)$$

l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} [\bar{N}_1 (\vec{I} + \alpha \vec{K}) + \bar{N}_{12} (\vec{J} + \beta \vec{K})] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{N}_{12} (\vec{I} + \alpha \vec{K}) + \bar{N}_2 (\vec{J} + \beta \vec{K})] + \vec{\omega} \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2} = 0$$

Cette équation vectorielle est équivalente à trois équations scalaires. Si l'on désigne par  $(X, Y, Z)$  les composantes du vecteur  $\vec{\omega}$  et par  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  les composantes du vecteur  $\vec{\omega} \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$  suivant les axes  $Oxyz$ , nous obtenons par un calcul simple les **équations d'équilibre** :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial y} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial y} + \bar{Y} &= 0 \\ A \bar{N}_1 + 2B \bar{N}_{12} + C \bar{N}_2 + \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

dans lesquelles  $\zeta$  est défini par :

$$\zeta = \bar{Z} - \alpha \bar{X} - \beta \bar{Y} \quad (8)$$

On notera que  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  sont les composantes de la densité de force rapportée à la projection de l'aire de  $\Sigma$  sur le plan  $Oxy$ , et que  $\zeta$

est la projection du vecteur  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  sur  $Oz$  effectuée parallèlement au plan tangent à  $\Sigma$ . Les deux premières équations d'équilibre, qui expriment l'équilibre de la projection  $A' B' C' D'$  de l'élément  $ABCD$  sur le plan  $Oxy$ , ne diffèrent pas des équations d'équilibre de l'élasticité plane (article Théorie de l'élasticité [A 305]).

Le tenseur tension doit, en outre, satisfaire aux **conditions aux limites** sur les bords du voile ; nous distinguerons :

– les *bords libres*, le long desquels deux conditions sont imposées au tenseur tension : nullité de la composante normale et de la composante de cisaillement ;

– les *bords simplement appuyés*, le long desquels une seule condition est imposée au tenseur tension ; l'exemple le plus courant de bord simplement appuyé est fourni par un *tympan* ; un tympan est une poutre ayant une grande rigidité à la flexion dans l'un de ses plans principaux et une très faible rigidité dans l'autre ; un tympan ne peut donc exercer que des réactions contenues dans le plan de grande rigidité à la flexion ;

– les *bords doublement appuyés*, le long desquels aucune condition n'est imposée au tenseur tension.

Bien entendu, les appuis doivent être conçus de manière à n'exercer que des densités de réaction contenues dans le plan tangent au voile.

Lorsque les équations d'équilibre et les conditions aux limites permettent de déterminer  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$ , le voile est dit *statiquement déterminé* ou *isostatique*. S'il existe plusieurs états de contrainte vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites, le voile est dit *statiquement indéterminé* ou *hyperstatique*. Nous n'aborderons pas l'étude des voiles hyperstatiques, qui nécessite le calcul compliqué des déformations du voile ; il peut même être nécessaire de faire intervenir des flexions du voile.

## 2.1.2 Propriétés des équations d'équilibre

Les équations d'équilibre (7) forment un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre dont les coefficients sont des fonctions des variables  $x$  et  $y$ . Le problème de Cauchy consiste à déterminer  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  et  $\bar{N}_{12}$  en tout point de la surface  $\Sigma$  connaissant leurs valeurs le long d'une courbe  $(C)$  tracée sur  $\Sigma$  ; il suffit, en vertu de la dernière équation d'équilibre, de se donner les valeurs de deux des trois fonctions  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  et  $\bar{N}_{12}$  le long de la courbe  $(C)$ .

Dans le cas où la courbe  $(C)$  n'est pas une intégrale de l'équation différentielle :

$$Adx^2 + 2Bdx dy + Cdy^2 = 0 \quad (9)$$

on peut montrer qu'il est possible, en utilisant les équations d'équilibre et leurs dérivées, de calculer toutes les dérivées des fonctions  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  et  $\bar{N}_{12}$ , donc de représenter ces fonctions par leurs développements en série de Taylor.

Les courbes qui vérifient l'équation différentielle (9) sont les *caractéristiques* du système (7) ; comme l'équation (9) est du second degré en  $dy/dx$ , il existe deux familles de caractéristiques réelles ou imaginaires, dont les équations sont de la forme :

$$U_1(x, y) = Cte, \quad U_2(x, y) = Cte$$

Or,  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant les dérivées secondes de la fonction  $f(x, y)$ , l'équation (9) est l'équation différentielle des asymptotiques de  $\Sigma$ . Nous avons donc obtenu le résultat fondamental suivant : *les caractéristiques des équations d'équilibre sont les asymptotiques de la surface moyenne du voile*.

Nous pouvons distinguer trois cas :

•  $AC - B^2 > 0$  : dans ce cas où  $\Sigma$  a ses courbures principales de même signe, les asymptotiques sont imaginaires, et les équations d'équilibre sont du type *elliptique*. On démontre alors que le système (7) n'a de solution que si les données sont analytiques.

•  $AC - B^2 < 0$  : dans ces cas où  $\Sigma$  a ses courbures principales opposées, les asymptotiques sont réelles et distinctes, et les équations d'équilibre sont du type *hyperbolique*. On démontre que la donnée de deux des fonctions  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  et  $\bar{N}_{12}$  le long d'un arc  $AB$ , qui n'appartient pas à une caractéristique et qui n'est pas rencontrée en plus d'un point par chaque caractéristique, permet de déterminer les fonctions  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{N}_{12}$  dans tout le domaine  $AHBK$  limité par les caractéristiques qui passent par  $A$  et  $B$  (figure 8).

•  $AC - B^2 = 0$  : dans ce cas limite où la surface est développable, les asymptotiques sont confondues, et les équations d'équilibre sont du type *parabolique*.

Il peut se faire que les équations (7) soient du type elliptique dans certaines zones de  $\Sigma$  et du type hyperbolique dans d'autres zones de  $\Sigma$  (exemple d'un voile en forme de tore), les différentes zones étant séparées par des lignes de points paraboliques.

### 2.1.3 Fonction de tension

Il est souvent commode, pour résoudre le système (7), d'introduire une fonction de tension  $\Phi$ , analogue à la fonction d'Airy de l'élasticité plane (article *Théorie de l'élasticité* [A 305], telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{N}_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int \bar{X} dx \\ \bar{N}_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int \bar{Y} dy \\ \bar{N}_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (10)$$

Les équations d'équilibre sont satisfaites si la fonction de tension  $\Phi$  est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre :

$$C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \zeta - A \int \bar{X} dx - C \int \bar{Y} dy = 0 \quad (11)$$

Les caractéristiques de l'équation (11) sont également les asymptotes de la surface moyenne du voile.

■ Lorsque les caractéristiques sont *imaginaires*, le changement de variables :

$$U_1(x, y) = \xi + i\eta, \quad U_2(x, y) = \xi - i\eta$$

qui substitue aux variables  $x$  et  $y$  deux nouvelles variables réelles  $\xi$  et  $\eta$ , transforme l'équation (11) en l'équation réduite *elliptique* :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + c = 0$$

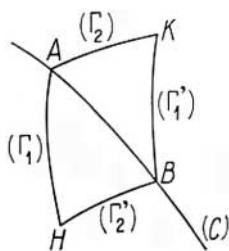


Figure 8 – Caractéristiques des équations d'équilibre

■ Lorsque les caractéristiques sont *réelles*, le changement de variables :

$$U_1(x, y) = \xi, \quad U_2(x, y) = \eta$$

transforme l'équation (11) en l'équation réduite *hyperbolique* :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + c = 0$$

■ Lorsque les caractéristiques sont *confondues*, le changement de variables :

$$U(x, y) = \xi, \quad y = \eta$$

transforme l'équation (11) en l'équation réduite *parabolique* :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + b \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + c = 0$$

Dans les équations réduites, les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions de  $\xi$  et de  $\eta$ .

## 2.2 Voiles dont la surface moyenne est un paraboloïde

### 2.2.1 Paraboloïde elliptique

La surface moyenne du voile a pour équation (figure 9) :

$$z = f \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + g \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

Le voile est limité par quatre tympans situés dans les plans :

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b$$

Nous supposons le voile soumis à une densité de charge  $p(x, y)$  rapportée à la projection horizontale ; nous avons donc :

$$\bar{X} = 0, \quad \bar{Y} = 0, \quad \bar{Z} = \zeta = -p(x, y)$$

La fonction de tension vérifie l'équation aux dérivées partielles (11) :

$$\frac{g}{b^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{f}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} p(x, y) = 0$$

et satisfait aux conditions aux limites :

$$N_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \bar{N}_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = a$$

$$N_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \bar{N}_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad y = b$$

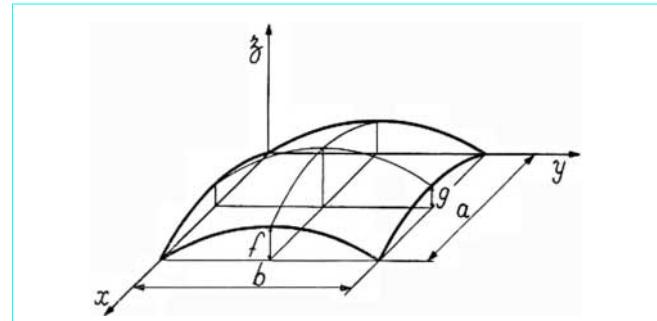


Figure 9 – Paraboloïde elliptique

La fonction  $\Phi(x, y)$  varie donc linéairement le long du contour du voile. Comme elle n'est définie qu'à une fonction linéaire près, les conditions aux limites précédentes peuvent être remplacées par la condition  $\Phi = 0$  le long du contour.

La fonction  $\Phi$ , qui s'annule pour  $y = 0$  et  $y = b$ , peut être représentée par une série de sinus :

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

En développant  $p(x, y)$  en série de sinus dans l'intervalle  $0 \leq y \leq b$  :

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

avec :

$$p_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b p(x, y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

et en reportant les développements de  $\Phi(x, y)$  et de  $p(x, y)$  dans l'équation aux dérivées partielles, nous voyons que la fonction  $F_n(x)$  est une intégrale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\frac{g}{b^2} F_n''(x) - n^2 \frac{f\pi^2}{a^2 b^2} F_n(x) = -\frac{1}{2} p_n(x)$$

En posant :

$$\omega = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{f}{g}}$$

et en désignant par  $f_n(x)$  une intégrale particulière que l'on peut toujours déterminer par la méthode de la variation des constantes, nous trouvons que la fonction  $F_n(x)$  est de la forme :

$$F_n(x) = f_n(x) + A_n \operatorname{ch} n\omega x + B_n \operatorname{sh} n\omega x$$

$A_n$  et  $B_n$  étant des constantes que l'on détermine en écrivant que  $\Phi(x, y)$  est nul pour  $x = 0$  et  $x = a$  :

$$f_n(0) + A_n = 0$$

$$f_n(a) + A_n \operatorname{ch} n\omega a + B_n \operatorname{sh} n\omega a = 0$$

Connaissant ainsi la fonction de tension :

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) + A_n \operatorname{ch} n\omega x + B_n \operatorname{sh} n\omega x] \sin \frac{n\pi y}{b}$$

on calcule  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  et  $\bar{N}_{12}$  au moyen des formules :

$$\bar{N}_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \bar{N}_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \bar{N}_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

puis  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$  au moyen des formules (6).

## 2.2.2 Paraboloïde hyperbolique

■ En premier lieu, supposons l'équation du paraboloïde de la forme :

$$z = \frac{xy}{c}$$

avec  $c$  paramètre ayant la dimension d'une longueur.

La solution générale des équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \bar{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial y} + \bar{X} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial y} + \bar{Y} = 0$$

$$\frac{2}{c} \bar{N}_{12} + \zeta = 0$$

s'écrit,  $g(x)$  et  $h(y)$  désignant deux fonctions arbitraires :

$$\bar{N}_1 = \int \left( \frac{1}{2} c \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \bar{X} \right) dx + h(y)$$

$$\bar{N}_2 = \int \left( \frac{1}{2} c \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \bar{Y} \right) dy + g(x)$$

$$\bar{N}_{12} = -\frac{1}{2} c \zeta(x, y)$$

Il ne peut donc exister de bord libre le long d'une génératrice. Lorsque le contour du voile se compose de quatre génératrices, on peut déterminer les fonctions  $g(x)$  et  $h(y)$  en supposant les bords  $AB$  et  $AC$  simplement appuyés (tympons) ; les bords  $BD$  et  $CD$  doivent être doublement appuyés.

De nombreuses couvertures de bâtiments sont constituées par un ou plusieurs morceaux de paraboloïdes hyperboliques limités par quatre génératrices.

■ En second lieu, lorsque l'équation du paraboloïde est de la forme :

$$z = \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} \quad (R_1 > 0, R_2 > 0)$$

l'équation (11) vérifiée par la fonction de tension s'écrit :

$$\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\zeta - \frac{1}{R_1} \int \bar{X} dx + \frac{1}{R_2} \int \bar{Y} dy$$

En effectuant le changement de variables :

$$x\sqrt{R_2} + y\sqrt{R_1} = \xi, \quad x\sqrt{R_2} - y\sqrt{R_1} = \eta$$

cette équation devient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = \varphi(\xi, \eta)$$

$\varphi(\xi, \eta)$  désignant une fonction qu'il est facile de déterminer dans chaque cas particulier. La solution générale de cette équation réduite est :

$$\Phi(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} \int_0^{\eta} \varphi(u, v) du dv + G_1(\xi) + G_2(\eta)$$

$G_1$  et  $G_2$  désignant deux fonctions arbitraires. En revenant aux variables  $x$  et  $y$ , nous obtenons la solution :

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + G_1(x\sqrt{R_2} + y\sqrt{R_1}) + G_2(x\sqrt{R_2} - y\sqrt{R_1})$$

Cette solution permet de déterminer comment doivent être conçus les appuis d'un voile limité par un contour  $\Gamma$  pour que ce voile soit isostatique.

## 2.3 Voiles dont la surface moyenne est un conoïde

Un *conoïde* est une surface engendrée par une droite ( $G$ ), appelée génératrice, qui reste parallèle à un plan fixe ( $\Pi$ ). En prenant pour plan ( $\Pi$ ) le plan  $Oyz$ , l'équation d'un conoïde est de la forme :

$$z = y g(x) + h(x)$$

Les dérivées premières et secondes de  $z$  ont pour valeurs :

$$\alpha = y g'(x) + h'(x), \quad \beta = g(x)$$

Les coefficients de (11), sont :

$$A = y g''(x) + h''(x), \quad B = g'(x), \quad C = 0$$

Notons que  $B$  ne dépend que de  $x$ , et que :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = g''(x)$$

Les asymptotiques du conoïde sont, d'une part, les génératrices ( $G$ ) et, d'autre part, les courbes ( $C$ ) dont les projections sur le plan  $Oxy$  sont les courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$A dx + 2B dy = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$2B \frac{dy}{dx} + B' y + h''(x) = 0$$

L'équation précédente est une équation différentielle linéaire dont l'intégrale générale :

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{|B(x)|}} + \varphi(x) \quad (12)$$

dépend linéairement d'une constante  $C_1$  ; l'intégrale particulière  $\varphi(x)$  peut être déterminée par la méthode de la variation de la constante :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\sqrt{|B(x)|}} \int_{x_0}^x \frac{h''(t)\sqrt{|B(t)|}}{B(t)} dt$$

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial y} + \bar{X} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial y} + \bar{Y} &= 0 \\ A \bar{N}_1 + 2B \bar{N}_{12} + \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

La première et la troisième permettent de déterminer  $\bar{N}_1$  et  $\bar{N}_{12}$  ; en éliminant  $\bar{N}_{12}$  entre ces deux équations, nous trouvons que  $\bar{N}_1$  est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$2B \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial x} - A \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial y} = \bar{N}_1 B' + \frac{\partial \zeta}{\partial y} - 2B \bar{X} \quad (14)$$

dont les caractéristiques ( $\Gamma$ ) sont les courbes intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx}{2B} = -\frac{dy}{A} = \frac{d\bar{N}_1}{\bar{N}_1 B' + \frac{\partial \zeta}{\partial y} - 2B \bar{X}} \quad (15)$$

L'égalité des deux premiers rapports (15) montre que les caractéristiques ( $\Gamma$ ) et les asymptotiques ( $C$ ) du conoïde se projettent sur le plan  $Oxy$  suivant les mêmes courbes. L'égalité du premier et du dernier rapport (15) montre que les caractéristiques ( $\Gamma$ ) qui se projettent sur  $Oxy$  suivant la courbe d'équation (12) s'obtiennent en intégrant l'équation différentielle linéaire :

$$2B \frac{d\bar{N}_1}{dx} - B' \bar{N}_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - 2B \bar{X} = f(x, C_1)$$

L'intégrale générale de cette équation est de la forme :

$$\bar{N}_1 = C_2 \sqrt{|B(x)|} + \psi(x, C_1) \quad (16)$$

l'intégrale particulière  $\psi(x, C_1)$  pouvant toujours être déterminée par la méthode de la variation de la constante :

$$\psi(x, C_1) = \frac{1}{2} \sqrt{|B(x)|} \int_{x_0}^x \frac{f(t, C_1)}{B(t) \sqrt{|B(t)|}} dt$$

Toute surface intégrale de l'équation (14) est un lieu de caractéristiques ( $\Gamma$ ) obtenu en choisissant  $C_2 = F(C_1)$ , fonction arbitraire de  $C_1$ . L'intégrale générale de l'équation (14) dépend donc d'une fonction arbitraire d'une variable  $C_1$  gardant une valeur constante le long des asymptotiques ( $C$ ) du conoïde. Cette fonction arbitraire est donc déterminée par les valeurs de  $\bar{N}_1$  (ou de  $\bar{N}_{12}$  en vertu de la dernière équation d'équilibre) le long d'une courbe rencontrant une seule fois les asymptotiques ( $C$ ).

Connaissant ainsi  $\bar{N}_1$ , la dernière équation (13) donne  $\bar{N}_{12}$ .

Enfin,  $\bar{N}_{12}$  étant connu, la seconde équation d'équilibre (13) donne  $\bar{N}_2$  :

$$\bar{N}_2 = - \int \left( \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial x} + \bar{Y} \right) dy + G(x) \quad (17)$$

$G(x)$  est une fonction arbitraire de  $x$ , déterminée par les valeurs de  $\bar{N}_2$  le long d'une courbe rencontrant une seule fois les génératrices. Par exemple, si nous nous donnons les valeurs  $\bar{N}_2(x, y_0)$  le long de la section du conoïde par le plan  $y = y_0$ , nous trouvons :

$$\bar{N}_2(x, y) = \bar{N}_2(x, y_0) - \int_{y_0}^y \left( \frac{\partial \bar{N}_{12}}{\partial x} + \bar{Y} \right) dy$$

Ainsi, dans le cas où la surface moyenne du voile est un conoïde, l'intégration des équations d'équilibre se ramène à l'intégration successive de deux équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, dont les caractéristiques peuvent être déterminées au moyen de quadratures.

## 2.4 Théorie de la membrane en coordonnées curvilignes

### 2.4.1 Équations d'équilibre en coordonnées curvilignes quelconques

Relativement aux axes rectangulaires  $Oxyz$ , les coordonnées d'un point  $M$  de la surface moyenne  $\Sigma$  du voile sont données par les formules :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

équivalentes à l'équation vectorielle :

$$\vec{M} = \vec{M}(u, v)$$

Les lignes coordonnées sont les courbes  $(C_1)$  définies par une valeur constante de  $v$ , et les courbes  $(C_2)$  définies par une valeur constante de  $u$ .

L'élément linéaire de la surface  $\Sigma$  a pour expression :

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

Pour simplifier les calculs, nous substituerons aux fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  de  $u$  et  $v$  les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $\varphi$  de  $u$  et  $v$  définies par :

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = a^2 \\ F &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = ab \cos \varphi \\ G &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = b^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Désignons, en un point  $M$  de  $\Sigma$  (point  $A$  sur la figure 10, par  $\vec{t}_1$  et  $\vec{t}_2$  les vecteurs unités tangents en  $M$  aux lignes coordonnées  $(C_1)$  et  $(C_2)$  qui se coupent sous l'angle  $\varphi$ , et par  $\vec{N}$  le vecteur unité normal à  $\Sigma$ , tel que le trièdre  $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{N})$  soit direct. En supposant les lignes coordonnées orientées de façon que l'angle  $\varphi = (\vec{t}_1, \vec{t}_2)$  soit compris entre 0 et  $\pi$ , nous avons,  $\sin \varphi$  étant positif :

$$\left. \begin{aligned} \vec{t}_1 &= \frac{1}{a} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \vec{t}_2 = \frac{1}{b} \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \\ \vec{N} &= \frac{1}{\sin \varphi} (\vec{t}_1 \wedge \vec{t}_2) = \frac{1}{ab \sin \varphi} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Nous supposons le voile soumis à une densité de force  $\vec{\omega}$ , et nous définissons le tenseur tension par ses composantes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$  (§ 1.3.2). Écrivons l'équilibre d'un élément  $ABCD$  de la surface du voile (figure 10) compris entre deux lignes coordonnées voisines  $[C_1(v)]$  et  $[C_1(v+dv)]$ , et entre deux lignes coordonnées voisines  $[C_2(u)]$  et  $[C_2(u+du)]$ .

L'aire de l'élément  $ABCD$  ayant pour valeur :

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv = (ab \sin \varphi) du dv$$

la résultante des forces extérieures appliquée à l'élément est :

$$\vec{\omega} dS = \vec{\omega} ab \sin \varphi du dv$$

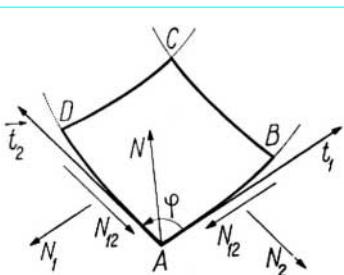


Figure 10 – Composantes du tenseur tension en coordonnées curvilignes quelconques

L'équilibre des forces appliquées à l'élément se traduit par l'équation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial u} [b(N_1 \vec{t}_1 + N_{12} \vec{t}_2)] + \frac{\partial}{\partial v} [a(N_{12} \vec{t}_1 + N_2 \vec{t}_2)] + \vec{\omega} ab \sin \varphi = 0$$

ou, compte tenu des deux premières relations (19) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{b}{a} N_1 \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + N_{12} \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( N_{12} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} + \frac{a}{b} N_2 \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \\ + \vec{\omega} ab \sin \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Il est inutile d'écrire l'équation d'équilibre des moments des forces appliquées à l'élément, qui, au second ordre près, est identiquement vérifiée.

L'équation d'équilibre (20) est équivalente à trois équations scalaires, que l'on obtient en la multipliant scalairement par les vecteurs  $\vec{t}_1$ ,  $\vec{t}_2$  et  $\vec{N}$ . Pour cela, nous aurons besoin de quelques formules préliminaires.

En premier lieu, nous déduisons des relations (19) les formules :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \vec{t}_1 &= a, & \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \vec{t}_2 &= a \cos \varphi, & \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \vec{N} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \vec{t}_1 &= b \cos \varphi, & \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \vec{t}_2 &= b, & \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \vec{N} &= 0 \end{aligned}$$

En second lieu, en dérivant les relations (19) par rapport à  $u$  et  $v$ , nous obtenons les formules :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} \cdot \vec{t}_1 &= \frac{\partial a}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{t}_1 &= \frac{\partial a}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} \cdot \vec{t}_1 &= \frac{1}{a} \frac{\partial (ab \cos \varphi)}{\partial v} - \frac{b}{a} \frac{\partial b}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} \cdot \vec{t}_2 &= \frac{1}{b} \frac{\partial (ab \cos \varphi)}{\partial u} - \frac{a}{b} \frac{\partial a}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{t}_2 &= \frac{\partial b}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} \cdot \vec{t}_2 &= \frac{\partial b}{\partial v} \end{aligned}$$

Enfin, nous déduisons de la dernière relation (19) les formules :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} \cdot \vec{N} &= \frac{1}{ab \sin \varphi} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} \right) = \frac{A}{ab \sin \varphi} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{N} &= \frac{1}{ab \sin \varphi} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} \right) = \frac{B}{ab \sin \varphi} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} \cdot \vec{N} &= \frac{1}{ab \sin \varphi} \left( \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} \right) = \frac{C}{ab \sin \varphi} \end{aligned}$$

$A$ ,  $B$  et  $C$  désignant les déterminants égaux aux produits mixtes :

$$A = \begin{vmatrix} x'_u & x_v & x''_{u^2} \\ y_u & y'_v & y''_{u^2} \\ z_u & z'_v & z''_{u^2} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x''_{uv} \\ y'_u & y'_v & y''_{uv} \\ z'_u & z'_v & z''_{uv} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x''_{v^2} \\ y'_u & y'_v & y''_{v^2} \\ z'_u & z'_v & z''_{v^2} \end{vmatrix}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} & \left( b \frac{\partial N_1}{\partial u} + a \frac{\partial N_{12}}{\partial v} \right) + \left( b \frac{\partial N_{12}}{\partial u} + a \frac{\partial N_2}{\partial v} \right) \cos \varphi + \frac{\partial b}{\partial u} (N_1 - N_2) \\ & \quad + \frac{1}{a} \frac{\partial (a^2 \cos \varphi)}{\partial v} N_2 + 2 \frac{\partial a}{\partial v} N_{12} + \varpi_1 ab \sin \varphi = 0 \\ & \left( b \frac{\partial N_1}{\partial u} + a \frac{\partial N_{12}}{\partial v} \right) \cos \varphi + \left( b \frac{\partial N_{12}}{\partial u} + a \frac{\partial N_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial a}{\partial v} (N_2 - N_1) \\ & \quad + \frac{1}{b} \frac{\partial (b^2 \cos \varphi)}{\partial u} N_1 + 2 \frac{\partial b}{\partial u} N_{12} + \varpi_2 ab \sin \varphi = 0 \\ & \frac{b}{a} AN_1 + 2BN_{12} + \frac{a}{b} CN_2 + \varpi_n (ab \sin \varphi)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Nous avons désigné par  $\varpi_1$ ,  $\varpi_2$  et  $\varpi_n$  les projections de la densité de force  $\varpi$  sur les vecteurs  $\vec{t}_1$ ,  $\vec{t}_2$  et  $\vec{N}$ .

Les équations (21) forment un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. On peut montrer que les caractéristiques de ce système sont les courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0$$

donc sont les lignes asymptotiques de la surface moyenne du voile.

Les deux premières équations d'équilibre (21) ne dépendent que de  $a$ ,  $b$  et  $\varphi$ , c'est-à-dire des coefficients  $E$ ,  $F$  et  $G$  de la première forme quadratique (élément linéaire) de la surface ; elles ne dépendent donc que des éléments géodésiques des lignes coordonnées et sont identiques pour deux surfaces applicables l'une sur l'autre. La dernière équation d'équilibre (21) dépend des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  de la seconde forme quadratique de la surface  $\Sigma$ .

Lorsque les lignes coordonnées sont les asymptotiques de la surface moyenne du voile, ce qui ne peut se présenter que pour une surface à courbures opposées, la dernière équation d'équilibre donne la tension de cisaillement  $N_{12}$  du voile.

## 2.4.2 Équations d'équilibre en coordonnées curvilignes orthogonales

### 2.4.2.1 Formules de Darboux-Ribaucour

En un point  $M$  d'une courbe  $(\Gamma)$  tracée sur une surface  $\Sigma$ , nous pouvons définir deux trièdres trirectangles directs (figure 11) :

— le **trièdre de Frenet** constitué par la tangente, la normale principale et la binormale ; nous désignons par  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  et  $\vec{b}$  les vecteurs unités dirigés suivant les axes de ce trièdre ;

— le **trièdre de Darboux-Ribaucour** constitué par la tangente la normale géodésique située dans le plan tangent à la surface et la normale à la surface ; nous désignons par  $\vec{t}$ ,  $\vec{G}$  et  $\vec{N}$  les vecteurs unités dirigés suivant les axes de ce trièdre.

Soient  $1/p$  et  $1/T$  la courbure et la torsion de  $(\Gamma)$ , et  $s$  l'abscisse curviligne de  $(\Gamma)$  comptée positivement dans le sens du vecteur  $\vec{t}$  ; nous rappelons les formules classiques de Frenet :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{p}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{T}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{p} - \frac{\vec{b}}{T}$$

Désignons par  $\theta$  l'angle  $(\vec{n}, \vec{N})$ . Des relations évidentes :

$$\vec{G} = \vec{n} \sin \theta - \vec{b} \cos \theta, \quad \vec{N} = \vec{n} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta$$

et des formules de Frenet, nous déduisons les **formules de Darboux-Ribaucour** :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{G}}{r} + \frac{\vec{N}}{R}, \quad \frac{d\vec{G}}{ds} = -\frac{\vec{N}}{\tau} - \frac{\vec{t}}{r}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{G}}{\tau}$$

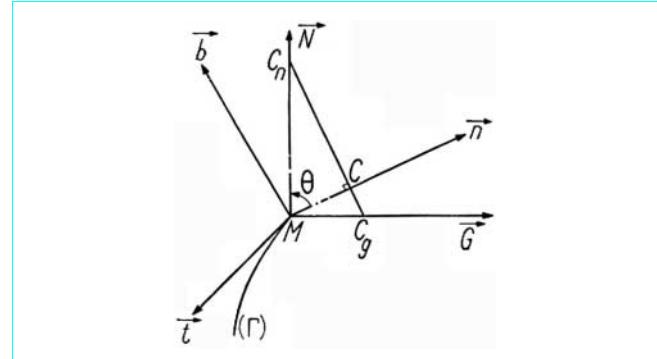


Figure 11 – Trièdre de Frenet ( $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ ) et trièdre de Darboux-Ribaucour ( $\vec{t}$ ,  $\vec{G}$ ,  $\vec{N}$ )

dans lesquelles la *courbure normale*  $1/R$ , la *courbure géodésique*  $1/r$  et la *torsion géodésique*  $1/\tau$  sont définies par les formules :

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{p}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\sin \theta}{p}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$$

Soit  $C$  le centre de courbure de  $(\Gamma)$  ; le plan normal en  $C$  à la normale principale coupe la normale à la surface au centre de courbure normale  $C_n$  et la normale géodésique au centre de courbure géodésique  $C_g$  ; en effet :

$$\overline{MC} = p, \quad \overline{MC_n} = \frac{p}{\cos \theta} = R, \quad \overline{MC_g} = \frac{p}{\sin \theta} = r$$

$R$  est le rayon de courbure en  $M$  de la section de  $\Sigma$  par le plan normal  $MtN$  ; le centre de courbure  $C$  de la section de la surface par un plan  $P$  passant par  $Mt$  est la projection du centre de courbure normale  $C_n$  sur le plan  $P$  (théorème de Meusnier).

### 2.4.2.2 Équations d'équilibre

Les équations d'équilibre (21) deviennent, lorsque  $\varphi = \pi/2$  :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{a} \frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_{12}}{\partial v} + \frac{N_1 - N_2}{ab} \frac{\partial b}{\partial u} + \frac{2N_{12}}{ab} \frac{\partial a}{\partial v} + \varpi_1 = 0 \\ & \frac{1}{a} \frac{\partial N_{12}}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_2}{\partial v} + \frac{N_2 - N_1}{ab} \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{2N_{12}}{ab} \frac{\partial b}{\partial u} + \varpi_2 = 0 \\ & \frac{b}{a} AN_1 + 2BN_{12} + \frac{a}{b} CN_2 + a^2 b^2 \varpi_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Les formules de Darboux-Ribaucour permettent de calculer pour chacune des lignes coordonnées ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) les courbures normales  $1/R_1$  et  $1/R_2$ , les courbures géodésiques  $1/r_1$  et  $1/r_2$ , et les torsions géodésiques  $1/\tau_1$  et  $1/\tau_2$ . On obtient ainsi les formules :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{A}{a^3 b}, & \frac{1}{R_2} &= \frac{C}{ab^3} \\ \frac{1}{r_1} &= -\frac{1}{ab} \frac{\partial a}{\partial v}, & \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{ab} \frac{\partial b}{\partial u} \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\tau_1} = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{B}{a^2 b^2} \end{aligned}$$

de sorte que les équations d'équilibre (22) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_{12}}{\partial v} + \frac{N_1 - N_2}{r_2} - \frac{2N_{12}}{r_1} + \varpi_1 &= 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial N_{12}}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_2}{\partial v} + \frac{N_1 - N_2}{r_1} + \frac{2N_{12}}{r_2} + \varpi_2 &= 0 \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - \frac{2N_{12}}{\tau} + \varpi_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

En particulier, lorsque les lignes coordonnées  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont les *lignes de courbure* de la surface du voile, la dernière équation d'équilibre (23) devient, puisque la torsion géodésique des lignes de courbure est nulle :

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + \varpi_n = 0 \quad (24)$$

Cette équation montre que la composante normale de la densité de force appliquée au voile est équilibrée par les composantes normales  $N_1$  et  $N_2$  grâce aux courbures principales de la surface.

### 2.4.3 Voiles dont la surface moyenne est développable

Une surface développable est engendrée pour les tangentes  $(G)$  à une courbe  $(\Gamma)$  appelée *arête de rebroussement* (figure 12). Les lignes de courbure de cette surface sont les génératrices  $(G)$  et leurs trajectoires orthogonales, qui sont les développantes de l'arête de rebroussement. Désignons par  $v$  l'abscisse curviligne de  $(\Gamma)$  et par  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  les vecteurs unités du trièdre de Frenet de  $(\Gamma)$ . Un point  $M$  de la surface développable est défini par l'équation vectorielle :

$$\vec{M}(u, v) = \vec{P}(v) + (u - v) \vec{t}(v)$$

Les lignes coordonnées  $v = Cte$  sont les génératrices, et les lignes coordonnées  $u = Cte$  sont les trajectoires orthogonales des génératrices ; en effet, nous avons :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \vec{t}, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \frac{u - v}{\rho} \vec{n}$$

$1/\rho$  désignant la courbure de  $(\Gamma)$ . Les lignes coordonnées sont donc les lignes de courbure de la surface, et :

$$\vec{t}_1 = \vec{t}, \quad \vec{t}_2 = \vec{n}, \quad a = 1, \quad b = \frac{u - v}{\rho}$$

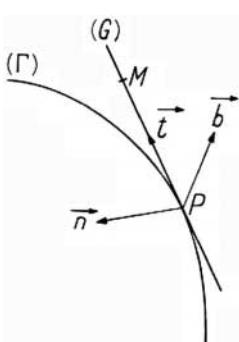


Figure 12 – Surface développable

Les dérivées secondes de  $\vec{M}(u, v)$  ont pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial u \partial v} &= \frac{\vec{n}}{\rho} \\ \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial v^2} &= \vec{n} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{u - v}{\rho} \right) - \frac{u - v}{\rho} \left( \frac{\vec{t}}{\rho} + \frac{\vec{b}}{\tau} \right) \end{aligned} \right\}$$

$1/\tau$  désignant la torsion de  $(\Gamma)$ .

Les déterminants  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour valeurs :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -\frac{(u - v)^2}{\rho^2 \tau} = -\frac{b^2}{T}$$

Il en résulte que les équations d'équilibre (22) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_{12}}{\partial v} + \frac{N_1 - N_2}{u - v} + \varpi_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial N_2}{\partial v} + \frac{2N_{12}}{u - v} + \varpi_2 &= 0 \\ N_2 &= \varpi_n b T \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Les équations (25) s'intègrent au moyen de quadratures. En effet, connaissant  $N_2$ , la seconde équation (25) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont l'intégrale générale  $N_{12}$  dépend linéairement d'une constante qui est une fonction arbitraire de  $v$ . Puis connaissant  $N_2$  et  $N_{12}$ , la première équation (25) est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'intégrale générale  $N_1$  dépend linéairement d'une constante qui est une fonction arbitraire de  $v$ . La solution la plus générale du système (25) contient donc deux fonctions arbitraires de  $v$ , que l'on détermine au moyen des conditions aux limites.

## 2.5 Transformation d'un voile par affinité

### 2.5.1 Voile défini en coordonnées cartésiennes

Soient trois constantes  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $v$  ; l'affinité :

$$x = \lambda x', \quad y = \mu y', \quad z = v z' \quad (26)$$

transforme le voile  $V$  dont la surface moyenne  $\Sigma$  a pour équation :

$$z = f(x, y)$$

en un voile  $V'$  dont la surface moyenne  $\Sigma'$  a pour équation :

$$z' = \frac{1}{v} f(\lambda x', \mu y') = f'(x', y')$$

Supposons le voile  $V'$  soumis à une densité de force dont les composantes rapportées à la projection du voile sur  $Ox'y'$  sont  $\bar{X}', \bar{Y}'$  et  $\bar{Z}'$ .

Dans ces conditions, si nous posons :

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}' &= \mu \bar{X}, & \bar{Y}' &= \lambda \bar{Y}, & \bar{Z}' &= \frac{\lambda \mu}{v} \bar{Z} \\ \bar{N}'_1 &= \frac{\mu}{\lambda} \bar{N}_1, & \bar{N}'_{12} &= \bar{N}_{12}, & \bar{N}'_2 &= \frac{\lambda}{\mu} \bar{N}_2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

il est aisément de voir que les équations d'équilibre du voile  $V'$  se transforment en les équations d'équilibre du voile  $V$  soumis à la densité de force dont les composantes rapportées à la projection du voile sur  $Oxy$  sont  $\bar{X}, \bar{Y}$  et  $\bar{Z}$ .

Ainsi, à tout état d'équilibre d'un voile  $V$ , les formules (27) associent un état d'équilibre d'un voile  $V'$  déduit de  $V$  par l'affinité (26).

## 2.5.2 Voile défini en coordonnées curvilignes

Les équations paramétriques de la surface moyenne  $\Sigma$  du voile  $V$  sont :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

et les équations paramétriques de la surface moyenne  $\Sigma'$  du voile  $V'$  déduit de  $V$  par l'affinité (26) sont :

$$x' = \frac{1}{\lambda} x(u, v), \quad y' = \frac{1}{\mu} y(u, v), \quad z' = \frac{1}{v} z(u, v)$$

Sur la surface  $\Sigma$ , les lignes coordonnées  $(C_1)$  et  $(C_2)$  permettent de définir les composantes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$  du tenseur tension. Sur la surface  $\Sigma'$ , les lignes coordonnées  $(C'_1)$  et  $(C'_2)$  permettent de définir les composantes  $N'_1$ ,  $N'_2$  et  $N'_{12}$  du tenseur tension.

Soient, en un point  $A$  de la surface  $\Sigma$  :

- $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  les cosinus directeurs de la tangente à  $(C_1)$  ;
- $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  les cosinus directeurs de la tangente à  $(C_2)$  ;
- $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$ .

Dans l'affinité, un élément d'arc  $ds_1$  de  $(C_1)$  devient un élément d'arc  $ds'_1$  de  $(C'_1)$ , un élément d'arc  $ds_2$  de  $(C_2)$  devient un élément d'arc  $ds'_2$  de  $(C'_2)$ , et un élément d'aire  $d\Sigma$  devient un élément d'aire  $d\Sigma'$ . Des considérations de géométrie analytique montrent que :

$$\begin{aligned} \frac{ds'_1}{ds_1} &= \rho_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{\lambda^2} + \frac{\beta_1^2}{\mu^2} + \frac{\gamma_1^2}{v^2}} \\ \frac{ds'_2}{ds_2} &= \rho_2 = \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{\lambda^2} + \frac{\beta_2^2}{\mu^2} + \frac{\gamma_2^2}{v^2}} \\ \frac{d\Sigma'}{d\Sigma} &= k = \sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\mu^2 v^2} + \frac{\beta_3^2}{v^2 \lambda^2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda^2 \mu^2}} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, si l'on pose :

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{X}{k\lambda}, & Y' &= \frac{Y}{k\mu}, & Z' &= \frac{Z}{kv} \\ N'_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_2} N_1, & N'_{12} &= N_{12}, & N'_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} N_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Il est aisément de voir que les équations d'équilibre du voile  $V'$  se transforment en les équations d'équilibre du voile  $V$  soumis à la densité de force  $(X, Y, Z)$ .

Ainsi, à tout état d'équilibre d'un voile  $V$ , les formules (28) associent un état d'équilibre d'un voile  $V'$  déduit de  $V$  par l'affinité (26).

Les résultats précédents (§ 2.5) ne s'étendent pas aux voiles fléchis.

## 2.6 Voile dont la surface moyenne est un hyperbololoïde à une nappe

Il est toujours possible de transformer par affinité la surface moyenne du voile en un hyperbololoïde de révolution à une nappe :

$$(x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \alpha + z^2 = R^2$$

$R$  est le rayon du cercle de gorge, et  $\alpha$  est l'angle des génératrices et du plan  $Oxy$  du cercle de gorge.

L'hyperbololoïde possède deux systèmes de génératrices ( $G_1$ ) et ( $G_2$ ) dont les projections sur  $Oxy$  sont des tangentes au cercle de gorge :

$$\begin{aligned} (G_1) \quad x \cos 2v + y \sin 2v &= R \\ (G_2) \quad x \cos 2u + y \sin 2u &= R \end{aligned}$$

Les trois équations précédentes, résolues par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$ , donnent une représentation paramétrique de l'hyperbololoïde :

$$x = R \frac{\cos(u+v)}{\cos(u-v)}, \quad y = R \frac{\sin(u+v)}{\cos(u-v)}, \quad z = R \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin(u-v)}{\cos(u-v)}$$

dans laquelle les lignes coordonnées sont les génératrices, donc les asymptotiques, de la surface.

Résumons les calculs qui permettent d'écrire les équations d'équilibre (21). Nous avons :

$$a = b = \frac{R}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos^2(u-v)}, \quad 1 + \cos \varphi = \frac{2R \cos \alpha}{a}$$

La dernière équation (21) donne la tension de cisaillement  $N_{12}$  :

$$N_{12} = -\bar{\omega}_n R \frac{1 - \cos^2 \alpha \cos^2(u-v)}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos^2(u-v)}$$

$N_{12}$  étant connu, on trouve que les deux premières équations (21) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(aN_1)}{\partial u} + \frac{\partial(aN_2)}{\partial v} \cos \varphi + F_1(u, v) &= 0 \\ \frac{\partial(aN_1)}{\partial u} \cos \varphi + \frac{\partial(aN_2)}{\partial v} + F_2(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

$F_1(u, v)$  et  $F_2(u, v)$  étant des fonctions connues. Nous en déduisons :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(aN_1)}{\partial u} &= \frac{-F_1 + F_2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = Q_1(u, v) \\ \frac{\partial(aN_2)}{\partial v} &= \frac{-F_2 + F_1 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = Q_2(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$Q_1(u, v)$  et  $Q_2(u, v)$  étant deux fonctions connues.

La solution générale du système (29) dépend d'une fonction arbitraire de  $u$  et d'une fonction arbitraire de  $v$ , que l'on détermine au moyen des conditions aux limites. Supposons que nous connaissons les composantes du tenseur tension le long d'une courbe  $(C)$  de l'hyperbololoïde, rencontrée en un seul point par chaque génératrice ;  $(C)$  peut, par exemple, être un parallèle de l'hyperbololoïde d'équation  $u - v = Cte$ . Il suffit, du reste,  $N_{12}$  étant connu, de se donner la composante normale et la composante tangentielle du tenseur tension s'exerçant sur une coupure faite suivant la courbe  $(C)$ , pour connaître le tenseur tension le long de la courbe  $(C)$ .

En un point  $A(u_0, v_0)$  de la courbe  $(C)$ , nous connaissons donc les valeurs  $(aN_1)_A$  et  $(aN_2)_A$ . Les équations (29) permettent de calculer  $aN_1$  en un point quelconque  $P_1(u, v_0)$  de la génératrice  $AG_1$ , et de calculer  $aN_2$  en un point quelconque  $P_2(u_0, v)$  de la génératrice  $AG_2$  :

$$\begin{aligned} (aN_1)_{P_1} &= (aN_1)_A + \int_{u_0}^u Q_1(t, v_0) dt \\ (aN_2)_{P_2} &= (aN_2)_A + \int_{v_0}^v Q_2(u_0, t) dt \end{aligned}$$

Nous savons donc calculer les composantes du tenseur tension en tout point  $P$  tel que les deux génératrices passant par  $P$  rencontrent la courbe  $(C)$ .

### 3. Voiles de révolution

#### 3.1 Notations et formules préliminaires

Un point quelconque  $A$  d'un voile mince de révolution d'axe  $Oz$  (figure 13) se trouve à l'intersection d'un méridien ( $\Gamma$ ) et d'un parallèle ( $C$ ). La position de ce point est définie par les angles  $\varphi$  et  $\theta$  :

$$\varphi = (Iz, IA), \quad \theta = (Ox, Or)$$

$I$  étant le point où la normale au voile coupe l'axe de révolution ;  $\varphi$ , compté positivement de  $Oz$  vers  $Or$ , est compris entre  $O$  et  $\pi$ .

Au point  $A$  est lié un trièdre trirectangle direct dont les vecteurs unités  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$  sont dirigés suivant la tangente au méridien dans le sens des  $\varphi$  croissants, suivant la tangente au parallèle dans le sens des  $\theta$  croissants, et suivant la normale à la surface. Des composantes des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  suivant les axes  $Oxyz$ , nous déduisons les relations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{i}}{\partial \varphi} &= -\vec{k}, \quad \frac{\partial \vec{i}}{\partial \theta} = \vec{j} \cos \varphi \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial \theta} = -\vec{i} \cos \varphi - \vec{k} \sin \varphi \\ \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} &= \vec{i}, \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \theta} = \vec{j} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Il est parfois utile (voiles coniques) de substituer à l'angle  $\varphi$  l'abscisse curviligne  $s$  du méridien comptée dans un sens tel que l'on ait :

$$ds = \frac{dr}{\cos \varphi}$$

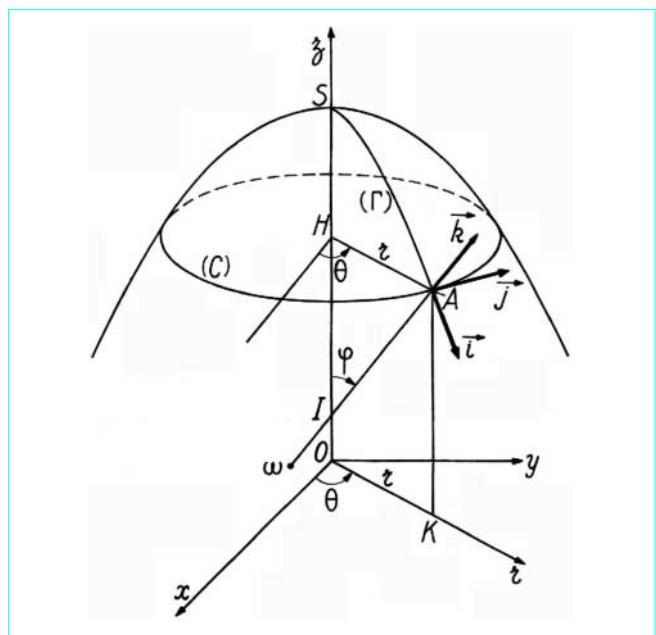


Figure 13 – Voile de révolution

Le rayon de courbure  $\rho$  du méridien est un nombre algébrique :

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dr}{d\varphi}$$

$\rho$  est positif si le centre de courbure  $\omega$  du méridien est du même côté que  $I$  par rapport à  $A$ . Nous noterons les relations :

$$dr = \rho \cos \varphi d\varphi, \quad dz = -\rho \sin \varphi d\varphi$$

Les rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$  suivant le méridien et suivant le parallèle ont pour valeurs :

$$R_1 = \rho, \quad R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}$$

Nous désignerons par  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  les composantes de la densité de force  $\vec{\omega}$  appliquée au voile suivant  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  :

$$\vec{\omega} = p_1 \vec{i} + p_2 \vec{j} + p_3 \vec{k}$$

Enfin, la déformation du voile donne à  $A$  un déplacement  $\delta \vec{A} = \vec{AA'}$  dont les composantes suivant  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont désignées par  $u$ ,  $v$  et  $w$  :

$$\delta \vec{A} = \vec{AA'} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

#### 3.2 Équations générales de la théorie de la membrane

##### 3.2.1 Équations d'équilibre

###### 3.2.1.1 Densité de force quelconque

Les composantes du tenseur tension sont :

- $N_1$  effort normal par unité de longueur qui s'exerce sur un parallèle ;
- $N_2$  effort normal par unité de longueur qui s'exerce sur un méridien ;
- $N_{12}$  effort de cisaillement par unité de longueur qui s'exerce sur un parallèle ou sur un méridien.

L'équilibre des forces appliquées à un élément  $ABCD$  (figure 14) compris entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins se traduit par l'équation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [(N_1 \vec{i} + N_{12} \vec{j}) r d\theta] d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} [(N_{12} \vec{i} + N_2 \vec{j}) \rho d\varphi] d\theta + \vec{\omega} r \rho d\theta d\varphi = 0$$

Compte tenu des relations (30) et de ce que  $\rho$  ne dépend pas de  $\theta$ , l'équation précédente est équivalente aux trois équations scalaires d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r N_1)}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} - \rho N_2 \cos \varphi + p_1 r \rho &= 0 \\ \frac{\partial (r N_{12})}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \rho N_{12} \cos \varphi + p_2 r \rho &= 0 \\ r N_1 + \rho N_2 \sin \varphi - p_3 r \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

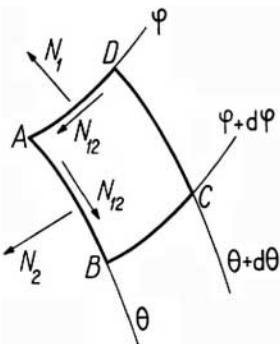


Figure 14 – Forces appliquées à un élément compris entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins

ou, en faisant intervenir les rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\left. \begin{aligned} R_2 \sin \varphi \frac{\partial N_1}{\partial \varphi} + R_1 \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + R_1 (N_1 - N_2) \cos \varphi + p_1 R_1 R_2 \sin \varphi &= 0 \\ R_2 \sin \varphi \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} + R_1 \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + 2 R_1 N_{12} \cos \varphi + p_2 R_1 R_2 \sin \varphi &= 0 \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} &= p_3 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Si l'on choisit pour variables l'angle  $\theta$  et l'abscisse curviligne  $s$  du méridien, les équations d'équilibre (31) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r N_1)}{\partial s} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} - N_2 \cos \varphi + p_1 r &= 0 \\ \frac{\partial (r N_{12})}{\partial s} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + N_{12} \cos \varphi + p_2 r &= 0 \\ r N_1 + p N_2 \sin \varphi - p_3 r \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

### 3.2.1.2 Densité de force ne dépendant pas de $\theta$

Dans ce cas, les composantes du tenseur tension sont des fonctions de la seule variable  $\varphi$ .

La seconde équation (31) ne renferme que  $N_{12}$ , et son intégration se ramène à une quadrature, car on peut la mettre sous la forme :

$$\frac{d(r^2 N_{12})}{d\varphi} = -p_2 r^2 \rho$$

Les deux autres équations d'équilibre (31) ne renferment que  $N_1$  et  $N_2$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(r N_1)}{d\varphi} - p N_2 \cos \varphi + p_1 r \rho &= 0 \\ r N_1 + p N_2 \sin \varphi - p_3 r \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Leur intégration se ramène également à une quadrature, car en éliminant  $N_2$  on obtient une équation qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{d(r N_1 \sin \varphi)}{d\varphi} = (p_3 \cos \varphi - p_1 \sin \varphi) r \rho \quad (35)$$

et qui n'est autre que l'équation d'équilibre d'une portion du voile comprise entre deux parallèles voisins.

Dans le cas où le voile a un sommet  $S$  situé sur l'axe de révolution, l'intégration de l'équation (35) donne la formule :

$$N_1 = \frac{F}{2\pi r \sin \varphi} \quad (36)$$

$F$  désignant la résultante générale, dirigée suivant  $Oz$ , des forces appliquées à la partie du voile située au-dessus du parallèle défini par  $\varphi$ .

Ayant calculé  $N_1$ , la seconde équation (34) donne  $N_2$ .

Ce cas se rencontre lorsque la densité de force a la symétrie de révolution :  $p_2$  est nul, et  $p_1$  et  $p_3$  ne dépendent pas de  $\theta$ . Dans ce cas,  $N_{12}$  est nul, et  $N_1$  et  $N_2$  ne sont fonction que de  $\varphi$ .

## 3.2.2 Calcul des déformations et des déplacements

### 3.2.2.1 Densité de force quelconque

La loi de Hooke permet, connaissant  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$ , de calculer les composantes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $g_{12}$  du tenseur déformation :  $e_1$  est la dilatation suivant le méridien,  $e_2$  est la dilatation suivant le parallèle, et  $2 g_{12}$  est la diminution de l'angle initialement droit formé par la tangente au méridien et la tangente au parallèle :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{Eh} (N_1 - v N_2) \\ e_2 &= \frac{1}{Eh} (N_2 - v N_1) \\ 2 g_{12} &= \frac{2(1+v)}{Eh} N_{12} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

avec  $h$  épaisseur du voile,

$E$  module d'Young,

$v$  coefficient de Poisson (article *Théorie de l'élasticité* [A 305]).

Pour obtenir les équations qui permettent de calculer les composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  du déplacement, connaissant  $e_1$ ,  $e_2$  et  $2 g_{12}$ , considérons en un point  $A$  du voile deux éléments d'arc infiniment petits du méridien et du parallèle :

$$\overrightarrow{AB} = \rho d\varphi \vec{i}, \quad \overrightarrow{AC} = r d\theta \vec{j}$$

Après déformation, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  viennent en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , et nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} &= \rho d\varphi \vec{i} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}) \\ \overrightarrow{A'C'} &= r d\theta \vec{j} + \frac{\partial}{\partial \theta} (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}) \end{aligned}$$

et les composantes du tenseur déformation sont :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{(\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{i}}{|\overrightarrow{AB}|} \\ e_2 &= \frac{(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{AC}) \cdot \vec{j}}{|\overrightarrow{AC}|} \\ 2 g_{12} &= \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \end{aligned}$$

En remplaçant  $\overrightarrow{A'B'}$  et  $\overrightarrow{A'C'}$  par les expressions données précédemment, en effectuant les dérivations grâce aux formules (30) et en considérant  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et leurs dérivées comme des quantités très

petites, nous obtenons les équations aux dérivées partielles vérifiées par les composantes du déplacement :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \\ e_2 &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \\ 2g_{12} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

### 3.2.2.2 Densité de force ne dépendant pas de $\theta$

Dans ce cas,  $u$ ,  $v$  et  $w$  ne dépendent pas de  $\theta$ , et les équations (38) se réduisent à :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) \\ e_2 &= \frac{1}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) \\ 2g_{12} &= \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{v}{r} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

La dernière équation (39) permet de calculer  $v$ , connaissant  $g_{12}$ , au moyen d'une quadrature ; on peut en effet l'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{2\rho g_{12}}{r}$$

Les deux premières équations (39) permettent de calculer  $u$  et  $w$  ; en éliminant  $w$  entre ces équations, on obtient une équation qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{u}{\sin \varphi} \right) = \frac{\rho e_1 \sin \varphi - r e_2}{\sin^2 \varphi}$$

Le calcul de  $u$  n'exige donc qu'une seule quadrature, puis la seconde équation (39) donne  $w$ .

Lorsque la densité de force appliquée au voile possède la symétrie de révolution,  $N_{12}$  est nul ; il en résulte que  $g_{12}$  et par suite  $v$  sont nuls.

## 3.3 Voiles soumis à une densité de force symétrique

### 3.3.1 Coupoles

Nous supposons une coupole de révolution soumise aux deux densités de force suivantes, qui possèdent la symétrie de révolution :

— le *poids propre*, de densité  $\rho$  par unité de surface du voile ; les composantes de  $\rho$  sont :

$$p_1 = \rho \sin \varphi, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -\rho \cos \varphi$$

— la *surcharge de neige*, de densité  $q$  par unité de surface horizontale ; les composantes de  $q$  sont :

$$p_1 = q \sin \varphi \cos \varphi, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -q \cos^2 \varphi$$

Le calcul des composantes du tenseur tension (§ 3.2.1.2) n'exige qu'une seule quadrature. Lorsque le plan tangent au sommet  $S$  de la coupole est horizontal, le sommet  $S$  est un *ombilic* ( $R_1 = R_2$ ) ; donc  $r/\sin \varphi$  tend vers  $\rho_s$  lorsque  $\varphi$  tend vers zéro, et nous trouvons :

$$(N_1)_s = (N_2)_s = \frac{1}{2} p_3 \rho_s$$

Le calcul des composantes du déplacement (§ 3.2.2.2) n'exige également qu'une seule quadrature.

Donnons l'**exemple** d'une **coupole sphérique** (figure 15) ; nous avons,  $R$  désignant le rayon de la coupole :

$$\rho = \frac{r}{\sin \varphi} = R$$

Le poids propre donne les tensions :

$$N_1 = -\rho R \frac{1}{1 + \cos \varphi}$$

$$N_2 = -\rho R \left( \cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right)$$

$N_1$  est toujours un effort de compression.

$N_2$  est un effort de compression si  $\varphi < \varphi_0$ , et un effort de traction si  $\varphi > \varphi_0$ , l'angle  $\varphi_0$  étant défini par  $\cos \varphi_0 = 1/(1 + \cos \varphi_0)$  ; on trouve  $\varphi_0 \approx 51^\circ 50'$ .

Les formules précédentes ne représentent les tensions réelles que si les appuis sont tels que les réactions soient tangentes aux méridiens. Généralement, les supports de la coupole n'exercent que des réactions verticales ; les tensions horizontales  $N_1 \cos \alpha$  sont équilibrées par un anneau de bordure soumis à une traction uniforme. Comme l'allongement de cet anneau n'est pas en général égal à l'allongement du voile le long du parallèle d'appui, la coupole subira des flexions au voisinage des appuis. Nous verrons au paragraphe 3.5 que les efforts de flexion diminuent très rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'appui, de sorte qu'à une distance suffisante de l'appui les formules précédentes donnent les tensions avec une bonne exactitude.

La surcharge de neige donne les tensions :

$$N_1 = -\frac{1}{2} q R, \quad N_2 = -\frac{1}{2} q R \cos 2\varphi$$

$N_1$  est un effort de compression constant ;  $N_2$  est un effort de compression si  $\varphi < 45^\circ$ , et un effort de traction si  $\varphi > 45^\circ$ .

### 3.3.2 Coupole d'égale résistance

Proposons-nous de déterminer l'épaisseur  $h$  et la forme de la méridienne d'une coupole de façon que, sous l'effet du seul poids propre, cette coupole (figure 16) soit soumise à une contrainte de compression uniforme  $\sigma$  ; nous devons avoir :

$$N_1 = N_2 = -\sigma h$$

Si  $\Delta$  désigne le poids volumique du matériau constituant la coupole, les composantes du poids propre sont :

$$p_1 = \Delta h \sin \varphi, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -\Delta h \cos \varphi$$

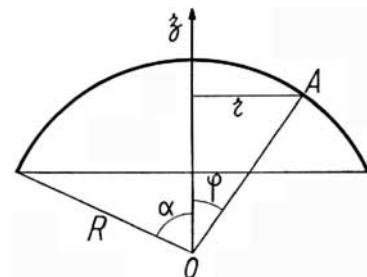


Figure 15 – Coupole sphérique

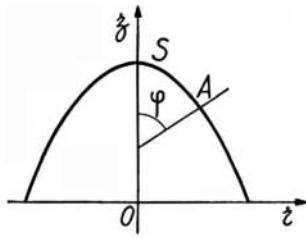


Figure 16 – Coupe d'égale résistance

En reportant les valeurs précédentes dans la seconde équation (34), nous obtenons le rayon de courbure de la méridienne :

$$\rho = \frac{ar}{r \cos \varphi - a \sin \varphi} \quad \left( a = \frac{\sigma}{\Delta} \right)$$

$a$  est une longueur ; nous en déduisons, puisque  $\rho = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dr}{d\varphi}$  :

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{ar \cos \varphi}{r \cos \varphi - a \sin \varphi}$$

La solution de cette équation différentielle se calcule par intégration numérique à partir du sommet  $S$  ( $\varphi = 0$ ), en observant qu'en ce point où le second membre est indéterminé, nous avons, en vertu d'une remarque faite au paragraphe 3.3.1 :

$$\left( \frac{dr}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = \rho_s = \left( \frac{2N_1}{\rho_s} \right)_{\varphi=0} = \frac{2\sigma h}{\Delta h} = 2a$$

La cote  $z$  se calcule ensuite par intégration numérique :

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{ar \sin \varphi}{r \cos \varphi - a \sin \varphi}$$

Enfin l'épaisseur  $h$  est déterminée par la première équation (34) ; on aboutit ainsi à la formule :

$$h = h_0 \exp \left( \frac{z_0 - z}{a} \right)$$

avec  $z_0$  cote du sommet,  
 $h_0$  épaisseur au sommet.

### 3.3.3 Réservoir demi-sphérique

Le réservoir demi-sphérique représenté sur la figure 17 est rempli d'un liquide de poids volumique  $\Delta$  jusqu'au niveau du parallèle  $CC'$  ( $\varphi = \varphi_0$ ). Il est supporté le long du parallèle  $AA'$  ( $\varphi = \pi/2$ ). Le long du parallèle défini par  $z = R \cos \varphi$ , la pression normale exercée par le liquide est :

$$p = \begin{cases} \Delta R (\cos \varphi - \cos \varphi_0) & \text{si } \varphi < \varphi_0 \\ 0 & \text{si } \varphi \geq \varphi_0 \end{cases}$$

Calculons d'abord les tensions  $N_1$  et  $N_2$  dans la paroi mouillée ( $\varphi < \varphi_0$ ) ; en utilisant la formule (36), ce qui revient à écrire que les tensions  $N_1$  le long du parallèle  $DD'$  équilibrivent les pressions sur la partie  $DBD'$  du réservoir, nous trouvons :

$$N_1 = \frac{1}{6} \Delta R^2 \frac{2(1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi) - 3(1 + \cos \varphi) \cos \varphi_0}{1 + \cos \varphi}$$

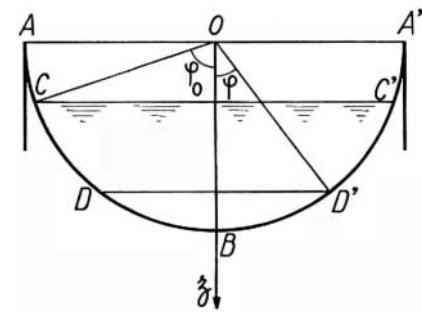


Figure 17 – Réservoir demi-sphérique

La seconde équation (34), qui s'écrit :

$$N_1 + N_2 = \Delta R^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

donne ensuite  $N_2$  :

$$N_2 = \frac{1}{6} \Delta R^2 \frac{2(-1 + 2 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi) - 3(1 + \cos \varphi) \cos \varphi_0}{1 + \cos \varphi}$$

Au-dessus de la surface du liquide ( $\varphi \geq \varphi_0$ ), nous avons  $N_1 + N_2 = 0$  puisque la pression  $p$  est nulle, et nous trouvons :

$$N_1 = -N_2 = \frac{1}{6} \Delta R^2 \frac{2(1 - \cos^3 \varphi_0) - 3 \sin^2 \varphi_0 \cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi}$$

Lorsque le réservoir est plein ( $\varphi_0 = \pi/2$ ), nous avons :

$$N_1 = \frac{1}{3} \Delta R^2 \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad N_2 = \frac{1}{3} \Delta R^2 \frac{-1 + 2 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

$N_1$  varie de  $\frac{1}{2} \Delta R^2$  au fond  $B$  à  $\frac{1}{3} \Delta R^2$  le long du parallèle  $AA'$ .

$N_2$  varie de  $\frac{1}{2} \Delta R^2$  au fond  $B$  à  $-\frac{1}{3} \Delta R^2$  le long du parallèle  $AA'$ .

### 3.3.4 Réservoir métallique d'égale résistance

Proposons-nous de déterminer la méridienne d'un réservoir en tôle mince d'épaisseur constante  $h$ , contenant un liquide de poids volumique  $\Delta$ , dont la pression au point haut  $A$  et  $\Delta z_0$ , de façon que l'on ait en tout point du réservoir (figure 18) :

$$N_1 = N_2 = \sigma h = N = Cte$$

En un point du réservoir situé à la distance  $z - z_0$  au-dessous du plan horizontal de  $A$ , la pression du liquide est :

$$p = \Delta z$$

Le problème posé est identique au problème de la recherche de la forme d'une goutte d'eau reposant sur un plan horizontal. En effet, les forces capillaires font qu'il se forme une surface mince à tension uniforme qui enveloppe l'eau et l'empêche de s'étaler.

La première équation (34) est identiquement vérifiée ; en définissant la longueur  $a$  par  $a^2 = N/\Delta$ , la seconde équation (34) s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{z}{a^2}$$

On peut déterminer approximativement la forme du réservoir en procédant de la façon suivante. Au sommet  $A$  du réservoir, les rayons de courbure principaux sont égaux à  $\rho_0 = 2 a^2/z_0$ . Nous pouvons donc prendre pour premier élément d'arc  $AA_1$  du méridien un petit arc de cercle de rayon  $\rho_0$  ; nous en déduisons les valeurs  $\varphi_1$ ,  $r_1$  et  $z_1$  en  $A_1$  ; le rayon de courbure en  $A_1$  est donné par la relation :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{z_1}{a^2} - \frac{\sin \varphi_1}{r_1}$$

et nous pouvons prendre pour deuxième élément d'arc  $A_1A_2$  du méridien un petit arc de cercle de rayon  $\rho_1$ , et ainsi de suite. L'approximation est d'autant meilleure que les éléments d'arc sont plus petits.

Un réservoir ainsi déterminé est d'égale résistance tant que la pression en  $A$  reste égale à  $\Delta z_0$ . Pour toute autre valeur de cette pression,  $N_1$  et  $N_2$  varient le long des méridiens. L'équilibre du réservoir nécessite alors des efforts tranchants le long du parallèle d'appui  $DD'$  ; par suite, la paroi du réservoir supporte des efforts de flexion au voisinage de ce parallèle.

### 3.3.5 Voiles coniques

Il n'est plus possible de prendre  $\varphi$  pour variable ; nous définirons donc la position d'un point  $A$  du voile par l'angle  $\theta$  et par la distance  $s = \overline{SA}$  du point  $A$  au sommet du cône (figure 19).

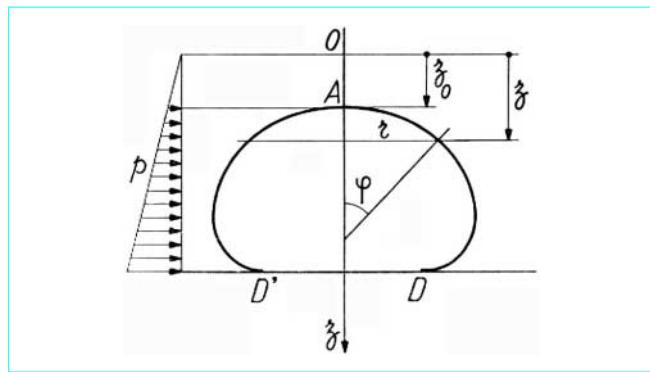


Figure 18 – Réservoir métallique d'égale résistance

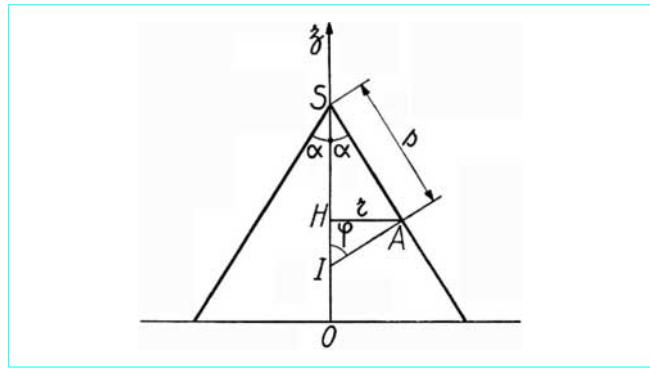


Figure 19 – Voile conique

Soit  $\alpha$  le demi-angle au sommet du cône, compte tenu des relations :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad r = s \sin \alpha, \quad \rho = \infty$$

les équations d'équilibre (33) se réduisent, le voile étant soumis à une densité de force ayant la symétrie de révolution, aux deux équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(sN_1)}{ds} - N_2 + p_1 s &= 0 \\ N_2 &= p_3 \tan \alpha \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Compte tenu de la valeur de  $N_2$ , nous pouvons remplacer la première équation (40) par l'équation :

$$\frac{d(sN_1)}{ds} = (p_3 \tan \alpha - p_1) s \quad (41)$$

Enfin, les équations (39) se réduisent aux deux équations suivantes qui permettent le calcul des composantes  $u$  et  $w$  du déplacement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= e_1 \\ u \sin \alpha + w \cos \alpha &= e_2 s \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Par exemple, dans le cas d'un réservoir conique (figure 20), la pression du liquide de poids volumique  $\Delta$  le long du parallèle d'abscisse  $s$  est :

$$p_3 = \Delta (s_B - s) \cos \alpha$$

L'équation (41) s'écrit donc :

$$\frac{d(sN_1)}{ds} = \Delta s (s_B - s) \sin \alpha$$

En intégrant et en déterminant la constante d'intégration de façon que  $N_1$  soit nul pour  $s = s_B$ , nous trouvons :

$$N_1 = -\Delta \frac{(s_B - s)^2 (s_B + 2s)}{6s} \sin \alpha$$

La tension  $N_2$  est donnée par la seconde équation (40) :

$$N_2 = \Delta s (s_B - s) \sin \alpha$$

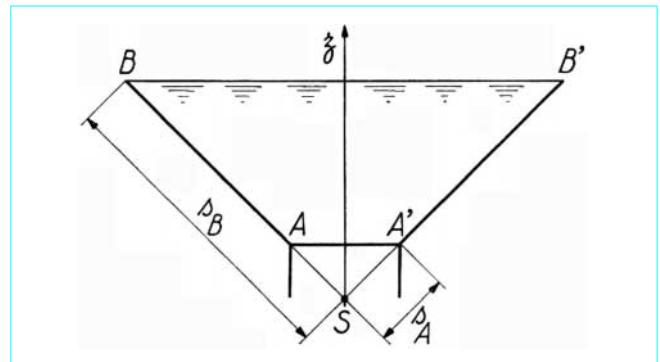


Figure 20 – Réservoir conique

## 3.4 Voiles soumis à une densité de force quelconque

### 3.4.1 Recherche de la solution générale des équations d'équilibre

Nous allons chercher la solution des équations d'équilibre (32) sous forme de séries trigonométriques :

$$\begin{aligned} N_1 &= F_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\varphi) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n(\varphi) \sin n\theta \\ N_2 &= G_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\varphi) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n(\varphi) \sin n\theta \\ N_{12} &= H_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\varphi) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n(\varphi) \cos n\theta \end{aligned}$$

Pour cela, développons les composantes de la densité de force appliquée au voile en séries trigonométriques :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{10}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{1n}(\varphi) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{1n}(\varphi) \sin n\theta \\ p_2 &= p_{20}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\varphi) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{2n}(\varphi) \cos n\theta \\ p_3 &= p_{30}(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n}(\varphi) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{3n}(\varphi) \sin n\theta \end{aligned}$$

Les composantes ( $F_0$ ,  $G_0$ ,  $H_0$ ) du tenseur tension, dues à la densité de force ( $p_{10}$ ,  $p_{20}$ ,  $p_{30}$ ) indépendante de  $\theta$ , se calculent au moyen de deux intégrations, comme il a été dit au paragraphe 3.2.1.2.

Si l'on reporte les développements dans les équations (32) et si l'on pose :

$$k = \frac{R_1}{R_2}$$

on trouve que les fonctions  $F_n$ ,  $G_n$  et  $H_n$  sont des intégrales du système différentiel :

$$\left. \begin{aligned} F'_n + (1+k) F_n \cotg \varphi + \frac{nk}{\sin \varphi} H_n + (p_{1n} - p_{3n} \cotg \varphi) R_1 &= 0 \\ H'_n + \frac{n}{\sin \varphi} F_n + 2kH_n \cotg \varphi + \left( p_{2n} - \frac{n}{\sin \varphi} p_{3n} \right) R_1 &= 0 \\ F_n + kG_n &= p_{3n} R_1 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

et que les fonctions  $\bar{F}_n$ ,  $\bar{G}_n$  et  $\bar{H}_n$  sont des intégrales du système différentiel, qui ne diffère du précédent que par le changement de  $n$  en  $-n$  :

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}'_n + (1+k) \bar{F}_n \cotg \varphi - \frac{nk}{\sin \varphi} \bar{H}_n + (\bar{p}_{1n} - \bar{p}_{3n} \cotg \varphi) R_1 &= 0 \\ \bar{H}'_n - \frac{n}{\sin \varphi} \bar{F}_n + 2k\bar{H}_n \cotg \varphi + \left( \bar{p}_{2n} + \frac{n}{\sin \varphi} \bar{p}_{3n} \right) R_1 &= 0 \\ \bar{F}_n + k\bar{G}_n &= \bar{p}_{3n} R_1 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

À l'exception de certains types particuliers de voiles, les voiles sphériques par exemple, l'intégration formelle des systèmes (43) ou (44) n'est pas possible. Dans le cas général, il faudra recourir à des méthodes d'intégration numérique pas à pas.

### 3.4.2 Voiles sphériques

#### 3.4.2.1 Intégration des équations d'équilibre

Dans ce cas où  $k = 1$ , si l'on pose :

$$Y_n = F_n + H_n, \quad Z_n = F_n - H_n$$

les deux premières équations (43) fournissent deux équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les intégrales générales sont :

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= \frac{[\operatorname{tg}(\varphi/2)]^{-n}}{\sin^2 \varphi} \\ &\quad \left[ C_1 - R \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( p_{1n} + p_{2n} - \frac{n + \cos \varphi}{\sin \varphi} p_{3n} \right) \sin^2 \varphi \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^n d\varphi \right] \\ Z_n &= \frac{[\operatorname{tg}(\varphi/2)]^n}{\sin^2 \varphi} \\ &\quad \left[ C_2 - R \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( p_{1n} - p_{2n} + \frac{n - \cos \varphi}{\sin \varphi} p_{3n} \right) \sin^2 \varphi \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{-n} d\varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

De même, si l'on pose dans les deux premières équations (44) :

$$\bar{Y}_n = \bar{F}_n + \bar{H}_n, \quad \bar{Z}_n = \bar{F}_n - \bar{H}_n$$

on trouve que  $\bar{Y}_n$  et  $\bar{Z}_n$  sont encore donnés par les formules (45) à condition de changer  $n$  en  $-n$ .

$G_n$  est ensuite donné par la dernière équation (43) et  $\bar{G}_n$  par la dernière équation (44).

#### 3.4.2.2 Coupole sphérique soumise à la pression du vent

Reprendons la coupole représentée sur la figure 15. La pression exercée par un vent soufflant dans la direction  $Ox$  est normale à la surface. Si  $\alpha$  désigne l'angle de  $Ox$  et de la normale  $\vec{k}$  à la surface, le vent exerce sur la coupole une densité de force de composantes :

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = p \cos \alpha = p \sin \varphi \cos \theta$$

La face au vent est soumise à une pression, et la face sous le vent est soumise à une dépression.

Le développement en série de Fourier de  $p_3$  se réduit au seul terme  $n = 1$ . En reportant les valeurs  $p_{11} = p_{21} = 0$  et  $p_{31} = p \sin \varphi$  dans les formules (45) et en effectuant les intégrations, nous trouvons :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1 + \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left[ C_1 - pR \left( \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right] \\ Z_1 &= \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left[ C_2 + pR \left( \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right] \end{aligned}$$

Les tensions  $N_1$  et  $N_{12}$  ont alors pour expressions :

$$N_1 = \frac{1}{Z} (Y_1 + Z_1) \cos \theta, \quad N_{12} = \frac{1}{2} (Y_1 - Z_1) \sin \theta$$

soit :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\cos \theta}{\sin^3 \varphi} \left[ \frac{1}{2} (C_1 + C_2) + \frac{1}{2} (C_1 - C_2) \cos \varphi - pR \left( \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \cos^4 \varphi \right) \right] \\ N_{12} &= \frac{\sin \theta}{\sin^3 \varphi} \left[ \frac{1}{2} (C_1 - C_2) + \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \cos \varphi - pR \left( \cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right] \end{aligned}$$

Nous déterminons les constantes  $C_1$  et  $C_2$  de façon que les tensions  $N_1$  et  $N_{12}$  soient finies pour  $\varphi = 0$  au sommet  $S$  de la coupole ; en effectuant des développements limités, nous trouvons :

$$C_1 = -C_2 = \frac{2}{3} pR$$

Il est intéressant de remarquer que les équations d'équilibre d'une petite calotte sphérique de centre  $S$  conduisent au même résultat.

Compte tenu des valeurs de  $C_1$  et de  $C_2$ , nous obtenons les tensions :

$$N_1 = \frac{1}{3} pR \frac{\sin \varphi \cos \varphi (2 + \cos \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} \cos \theta$$

$$N_{12} = \frac{1}{3} pR \frac{\sin \varphi (2 + \cos \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} \sin \theta$$

$$N_2 = \frac{1}{3} pR \frac{\sin \varphi (3 + 4 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} \cos \theta$$

La valeur de  $N_2$  se déduit de l'équation :

$$N_1 + N_2 = pR \sin \varphi \cos \theta$$

### 3.4.3 Voiles coniques

#### 3.4.3.1 Intégration des équations d'équilibre

En conservant les notations définies au paragraphe 3.3.5, les équations d'équilibre (33) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(sN_1)}{\partial s} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} - N_2 + p_1 s &= 0 \\ \frac{\partial(sN_{12})}{\partial s} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + N_{12} + p_2 s &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$N_2 = p_3 s \operatorname{tg} \alpha$$

Nous allons chercher la solution des équations d'équilibre sous forme de séries trigonométriques :

$$\begin{aligned} N_1 &= F_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(s) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n(s) \sin n\theta \\ N_2 &= G_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(s) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{G}_n(s) \sin n\theta \\ N_{12} &= H_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(s) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n(s) \cos n\theta \end{aligned}$$

Pour cela, développons les composantes de la densité de force appliquée au voile en séries trigonométriques :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{10}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{1n}(s) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{1n}(s) \sin n\theta \\ p_2 &= p_{20}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(s) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{2n}(s) \cos n\theta \\ p_3 &= p_{30}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n}(s) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_{3n}(s) \sin n\theta \end{aligned}$$

Les composantes ( $F_0$ ,  $G_0$ ,  $H_0$ ) du tenseur tension, dues à la densité de force ( $p_{10}$ ,  $p_{20}$ ,  $p_{30}$ ) indépendante de  $\theta$ , se calculent au moyen d'une seule intégration par la méthode donnée au paragraphe 3.3.5.

Si l'on reporte les développements dans les équations (46), on trouve, en tenant compte des valeurs :

$$G_n = p_{3n} s \operatorname{tg} \alpha, \quad \bar{G}_n = \bar{p}_{3n} s \operatorname{tg} \alpha$$

que les fonctions  $H_n$  et  $F_n$  sont les intégrales de deux équations linéaires du premier ordre, dont les intégrales générales sont :

$$\left. \begin{aligned} H_n &= \frac{1}{s^2} \left[ C_{1n} + \int_{s_0}^s \left( \frac{n}{\cos \alpha} p_{3n} - p_{2n} \right) s^2 ds \right] \\ F_n &= \frac{1}{s} \left\{ C_{2n} + \int_{s_0}^s \left[ (p_{3n} \operatorname{tg} \alpha - p_{1n}) s - \frac{n}{\sin \alpha} H_n \right] ds \right\} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

et que les fonctions  $\bar{H}_n$  et  $\bar{F}_n$  sont les intégrales de deux équations linéaires du premier ordre dont les intégrales générales sont :

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_n &= \frac{1}{s^2} \left[ \bar{C}_{1n} - \int_{s_0}^s \left( \frac{n}{\cos \alpha} \bar{p}_{3n} + \bar{p}_{2n} \right) s^2 ds \right] \\ \bar{F}_n &= \frac{1}{s} \left\{ \bar{C}_{2n} + \int_{s_0}^s \left[ (\bar{p}_{3n} \operatorname{tg} \alpha - \bar{p}_{1n}) s + \frac{n}{\sin \alpha} \bar{H}_n \right] ds \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Nous avons ainsi obtenu la solution générale des équations (46) ; bien entendu, on ne calculera pas  $N_2$  par son développement en série de Fourier, puisque  $N_2$  est donné par la dernière équation (46).

#### 3.4.3.2 Effet d'un séisme sur une coupole conique

Considérons la coupole conique, représentée sur la figure 21 appuyée le long du parallèle  $AA'$  (axe  $Ox$ ) et limitée supérieurement par le parallèle  $BB'$ . Un séisme d'accélération  $\gamma = \lambda g$  ( $g$  accélération de la pesanteur) dirigé suivant  $Ox$  a pour effet d'appliquer au voile une densité de force  $q = \lambda p$  ( $p$  poids propre du voile) dirigée suivant  $Ox$ . Cette densité de force a pour composantes :

$$p_1 = q \sin \alpha \cos \theta$$

$$p_2 = -q \sin \theta$$

$$p_3 = q \cos \alpha \cos \theta$$

Nous avons donc :

$$p_{11} = q \sin \alpha, \quad p_{21} = -q, \quad p_{31} = q \cos \alpha$$

et les tensions  $N_1$  et  $N_{12}$  ont pour expressions :

$$N_1 = F_1(s) \cos \theta, \quad N_{12} = H_1(s) \sin \theta$$

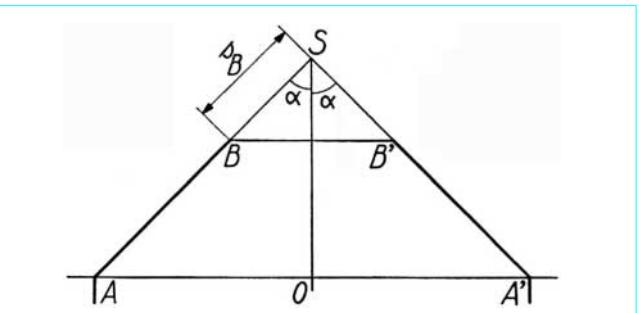


Figure 21 – Coupole conique

Les fonctions  $H_1(s)$  et  $F_1(s)$ , données par les formules (47), ont pour expressions :

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2} \left( C_1 + \frac{2}{3} qs^3 \right)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \left[ C_2 - \frac{1}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{3} qs^2 - \frac{C_1}{s} \right) \right]$$

Nous déterminons les constantes  $C_1$  et  $C_2$  en écrivant que  $N_1$  et  $N_{12}$ , donc  $H_1(s)$  et  $F_1(s)$ , s'annulent sur le parallèle supérieur  $s = s_B$ ; nous trouvons ainsi :

$$C_1 = -\frac{2}{3} qs_B^3, \quad C_2 = q \frac{s_B^2}{\sin \alpha}$$

Les tensions dans le voile ont donc pour valeurs :

$$N_1 = -q \frac{(s - s_B)^2 (s + 2s_B)}{3s^2 \sin \alpha} \cos \theta$$

$$N_2 = q \sin \alpha \cos \theta$$

$$N_{12} = \frac{2}{3} q \frac{s^3 - s_B^3}{s^2} \sin \theta$$

## 3.5 Flexion symétrique des voiles de révolution

### 3.5.1 Équations d'équilibre

Lorsque la densité de force appliquée au voile possède la symétrie de révolution ( $p_2$  nul,  $p_1$  et  $p_3$  ne dépendant pas de  $\theta$ ), l'état de contrainte du voile est défini par :

- les tensions normales  $N_1$  et  $N_2$  s'exerçant sur les sections dirigées suivant un parallèle et un méridien ;
- l'effort tranchant  $Q_1$  s'exerçant sur une section dirigée suivant un parallèle ;
- les moments fléchissants  $M_1$  et  $M_2$  s'exerçant sur les sections dirigées suivant un parallèle et un méridien.

Les composantes  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $Q_1$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont des fonctions de  $\varphi$ .

L'équilibre des forces et des couples appliqués à un élément du voile compris entre deux parallèles et deux méridiens infiniment voisins se traduit par les deux équations vectorielles :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [(N_1 \vec{i} - Q_1 \vec{k}) r d\theta] d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_2 \vec{j} \rho d\varphi) d\theta + (p_1 \vec{i} + p_3 \vec{k}) r \rho d\varphi d\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (-M_1 \vec{j} r d\theta) d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_2 \vec{i} \rho d\varphi) d\theta + Q_1 \vec{j} r \rho d\varphi d\theta = 0$$

En effectuant, grâce aux formules (30), les dérivations, nous trouvons que les relations vectorielles précédentes sont équivalentes aux trois équations d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(rN_1)}{d\varphi} - \rho N_2 \cos \varphi - r Q_1 + p_1 r \rho = 0 \\ r N_1 + \rho N_2 \sin \varphi + \frac{d(rQ_1)}{d\varphi} - p_3 r \rho = 0 \\ \frac{d(rM_1)}{d\varphi} - \rho M_2 \cos \varphi - r p Q_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

que l'on peut également écrire en faisant intervenir les rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\left. \begin{aligned} R_2 \sin \varphi \frac{dN_1}{d\varphi} + R_1 (N_1 - N_2) \cos \varphi - Q_1 R_2 \sin \varphi \\ + p_1 R_1 R_2 \sin \varphi = 0 \\ (R_2 N_1 + R_1 N_2) \sin \varphi + R_2 \sin \varphi \frac{dQ_1}{d\varphi} + Q_1 R_1 \cos \varphi \\ - p_3 R_1 R_2 \sin \varphi = 0 \\ R_2 \sin \varphi \frac{dM_1}{d\varphi} + R_1 (M_1 - M_2) \cos \varphi - Q_1 R_1 R_2 \sin \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Les trois équations d'équilibre sont évidemment insuffisantes pour déterminer les cinq fonctions inconnues.

### 3.5.2 Calcul de l'état de contrainte, connaissant les déplacements

#### 3.5.2.1 Formules préliminaires. Rotation de la tangente au méridien

Le déplacement d'un point de la surface moyenne du voile est défini par ses deux composantes  $u(\varphi)$  et  $w(\varphi)$ . Les dilatations  $e_1$  et  $e_2$  suivant le méridien et suivant le parallèle sont, d'après les équations (39) :

$$\left. \begin{aligned} e_1 = \frac{1}{\rho} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) = \frac{1}{R_1} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right) \\ e_2 = \frac{1}{r} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) = \frac{1}{R_2} (u \cot \varphi + w) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Calculons la rotation  $\chi$  autour du vecteur  $\vec{j}$  de la tangente au méridien pendant la déformation. Un élément d'arc  $\vec{AB}$  du méridien devient  $\vec{A'B'}$  après déformation :

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \rho \vec{i} d\varphi \\ \vec{A'B'} &= \left( \rho + \frac{du}{d\varphi} + w \right) \vec{i} d\varphi + \left( \frac{dw}{d\varphi} - u \right) \vec{k} d\varphi \end{aligned}$$

En évaluant de deux façons différentes le produit vectoriel des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{A'B'}$  :

$$\vec{AB} \wedge \vec{A'B'} = \rho^2 \chi \vec{j} d\varphi^2 = -\rho \left( \frac{dw}{d\varphi} - u \right) \vec{j} d\varphi^2$$

nous trouvons :

$$\chi = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{dw}{d\varphi} - u \right) = -\frac{1}{R_1} \left( \frac{dw}{d\varphi} - u \right) \quad (52)$$

Il existe une importante relation entre les trois fonctions  $e_1$ ,  $e_2$  et  $\chi$  qui ne dépendent que de  $u$  et  $w$  :

$$\chi = (e_1 - e_2) \cot \varphi - \frac{R_2}{R_1} \frac{de_2}{d\varphi} \quad (53)$$

#### 3.5.2.2 Expressions de $N_1$ , $N_2$ , $M_1$ et $M_2$ en fonction de $u$ et $w$

Soit  $h$  l'épaisseur du voile, qui, par hypothèse, est petite devant les rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$ . Après déformation, les rayons de courbure principaux deviennent  $R_1 + \delta R_1$  et  $R_2 + \delta R_2$ ; les variations  $\delta R_1$  et  $\delta R_2$  sont supposées petites.

À la distance  $z$  ( $|z| < 1/2 h$ ) de la surface moyenne, la dilatation  $e_1(z)$  suivant la direction du méridien a pour valeur :

$$e_1(z) = \frac{(R_1 + \delta R_1 + z) d(\varphi + \chi) - (R_1 + z) d\varphi}{(R_1 + z) d\varphi}$$

soit, en négligeant des quantités très petites :

$$e_1(z) = \frac{\delta R_1}{R_1 + z} + \frac{d\chi}{d\varphi}$$

En éliminant  $\delta R_1$  entre l'équation précédente et la relation :

$$e_1 = e_1(0) = \frac{\delta R_1}{R_1} + \frac{d\chi}{d\varphi}$$

nous obtenons l'expression suivante de  $e_1(z)$  :

$$e_1(z) = \frac{R_1}{R_1 + z} e_1 + \frac{z}{R_1 + z} \frac{d\chi}{d\varphi}$$

À la distance  $z$  de la surface moyenne, la dilatation  $e_2(z)$  suivant la direction du parallèle a pour valeur :

$$e_2(z) = \frac{(R_2 + \delta R_2 + z) \sin(\varphi + \chi) d\theta - (R_2 + z) \sin \varphi d\theta}{(R_2 + z) \sin \varphi d\theta}$$

soit, en négligeant des quantités très petites :

$$e_2(z) = \frac{\delta R_2}{R_2 + z} + \chi \cotg \varphi$$

En éliminant  $\delta R_2$  entre l'équation précédente et la relation :

$$e_2 = e_2(0) = \frac{\delta R_2}{R_2} + \chi \cotg \varphi$$

nous obtenons l'expression suivante de  $e_2(z)$  :

$$e_2(z) = \frac{R_2}{R_2 + z} e_2 + \frac{z}{R_2 + z} \chi \cotg \varphi$$

Les contraintes normales  $\sigma_1(z)$  et  $\sigma_2(z)$  sont données par les lois de l'élasticité (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le présent traité) :

$$\sigma_1(z) = \frac{E}{1 - \nu^2} [e_1(z) + \nu e_2(z)]$$

$$\sigma_2(z) = \frac{E}{1 - \nu^2} [e_2(z) + \nu e_1(z)]$$

Enfin,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont donnés par les formules (1) et (2) :

$$N_1 = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_1(z) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \quad N_2 = \int_{-1/2h}^{1/2h} \sigma_2(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$$

$$M_1 = - \int_{-1/2h}^{1/2h} z \sigma_1(z) \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \quad M_2 = - \int_{-1/2h}^{1/2h} z \sigma_2(z) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz$$

En effectuant les calculs indiqués précédemment, et en négligeant toujours des quantités très petites, nous trouvons,  $K$  et  $D$  désignant la **rigidité de membrane** et la **rigidité de flexion** du voile :

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (54)$$

les formules :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= K(e_1 + \nu e_2) \\ N_2 &= K(e_2 + \nu e_1) \\ M_1 &= -D \left( \frac{1}{R_1} \frac{d\chi}{d\varphi} + \frac{\nu}{R_2} \chi \cotg \varphi \right) \\ M_2 &= -D \left( \frac{1}{R_2} \chi \cotg \varphi + \frac{\nu}{R_1} \frac{d\chi}{d\varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

En remplaçant dans les équations (55)  $e_1$ ,  $e_2$  et  $\chi$  par leurs expressions (51) et (52), et en accentuant, pour simplifier l'écriture, les dérivées par rapport à  $\varphi$ , nous obtenons les équations :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= K \left( \frac{u' + w}{R_1} + \nu \frac{u \cotg \varphi + w}{R_2} \right) \\ N_2 &= K \left( \frac{u \cotg \varphi + w}{R_2} + \nu \frac{u' + w}{R_1} \right) \\ M_1 &= D \left[ \frac{1}{R_1} \left( \frac{w' - u}{R_1} \right)' + \frac{\nu}{R_2} \left( \frac{w' - u}{R_1} \right) \cotg \varphi \right] \\ M_2 &= D \left[ \frac{1}{R_2} \left( \frac{w' - u}{R_1} \right) \cotg \varphi + \frac{\nu}{R_1} \left( \frac{w' - u}{R_1} \right)' \right] \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Les équations d'équilibre (50) et les équations (56) forment un système de sept équations différentielles linéaires permettant, compte tenu des conditions aux limites, de déterminer les sept fonctions inconnues  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q_1$ ,  $u$  et  $w$ .

### 3.5.3 Calcul des efforts de flexion

#### 3.5.3.1 Principe de la méthode

Considérons (figure 22) un voile appuyé le long du parallèle  $AA'$  ( $\varphi = \varphi_0$ ) et soumis à la densité de force de composantes :

$$p_1 = p_1(\varphi), \quad p_2 = 0, \quad p_3 = p_3(\varphi)$$

Nous pouvons appliquer à ce voile la théorie de la membrane (§ 2).

Nous trouvons ainsi des tensions  $\bar{N}_1(\varphi)$  et  $\bar{N}_2(\varphi)$ , et nous pouvons calculer les déplacements correspondants  $\bar{u}(\varphi)$  et  $\bar{w}(\varphi)$ . Nous en déduisons, au moyen des formules (51) et (52), les dilatations  $\bar{e}_1(\varphi)$  et  $\bar{e}_2(\varphi)$  et la rotation  $\bar{\chi}(\varphi)$  de la tangente au méridien ; les deux dernières formules (55) donnent alors les moments fléchissants  $\bar{M}_1(\varphi)$  et  $\bar{M}_2(\varphi)$  résultant de la déformation de membrane. Il est aisé de voir que le rapport des contraintes normales dues aux moments  $\bar{M}_1$  et  $\bar{M}_2$  aux contraintes normales dues aux tensions  $N_1$  et  $N_2$  a pour ordre de grandeur  $h/R_1$ , donc est très petit ; aussi pouvons-nous négliger les moments fléchissants  $\bar{M}_1(\varphi)$  et  $\bar{M}_2(\varphi)$ , de sorte que la *solution de membrane est une intégrale particulière des équations de la flexion*.

Mais la solution de membrane ne permet pas en général de satisfaire aux conditions aux limites le long du parallèle d'appui, puisque  $\bar{w}(\varphi_0)$  et  $\bar{w}'(\varphi_0)$  ont des valeurs bien déterminées. Nous devrons ajouter à l'état d'équilibre de membrane un état d'équilibre de flexion dû à une densité de couple  $\gamma_0$  et à une densité de force de composantes  $p_{10}$  et  $p_{30}$  appliquées le long du parallèle d'appui. Cet état d'équilibre de flexion est défini par les sept fonctions  $N_1(\varphi)$ ,  $N_2(\varphi)$ ,  $M_1(\varphi)$ ,  $M_2(\varphi)$ ,  $Q_1(\varphi)$ ,  $u(\varphi)$  et  $w(\varphi)$  qui vérifient les équations (56) et les équations d'équilibre rendues homogènes ( $p_1 = p_3 = 0$ ).

Nous avons :

$$\gamma_0 = M_1(\varphi_0), \quad p_{10} = N_1(\varphi_0), \quad p_{30} = -Q_1(\varphi_0)$$

et, ces forces étant en équilibre, nous avons :

$$p_{10} \sin \varphi_0 - p_{30} \cos \varphi_0 = N_1(\varphi_0) \sin \varphi_0 + Q_1(\varphi_0) \cos \varphi_0 = 0 \quad (57)$$

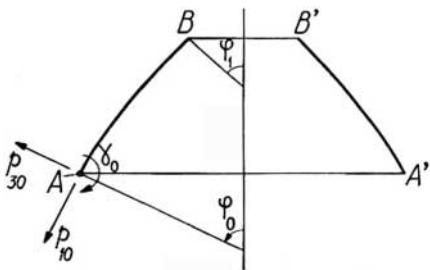


Figure 22 – Densité de force appliquée à un voile de révolution appuyé le long du parallèle AA'

L'état d'équilibre de flexion dépend donc de deux paramètres que l'on détermine par les conditions aux limites le long du parallèle d'appui.

#### Exemple

■ Si le voile est *encastré* le long de AA', nous devons avoir :

$$\bar{w}(\varphi_0) + w(\varphi_0) = 0, \quad \bar{w}'(\varphi_0) + w'(\varphi_0) = 0$$

ou, ce qui revient au même d'après les formules (51) et (52) puisque  $u(\varphi_0) = 0$  :

$$\bar{e}_2(\varphi_0) + e_2(\varphi_0) = 0, \quad \bar{\chi}(\varphi_0) + \chi(\varphi_0) = 0$$

■ Si le voile est *articulé* le long de AA', nous devons avoir :

$$\bar{e}_2(\varphi_0) + e_2(\varphi_0) = 0, \quad M_1(\varphi_0) = 0$$

Finalement, l'état d'équilibre du voile est défini par les tensions  $\mathcal{N}_1(\varphi)$  et  $\mathcal{N}_2(\varphi)$ , et les moments fléchissants  $\mathcal{M}_1(\varphi)$  et  $\mathcal{M}_2(\varphi)$  :

$$\mathcal{N}_1(\varphi) = \bar{N}_1(\varphi) + N_1(\varphi), \quad \mathcal{M}_1(\varphi) = M_1(\varphi)$$

$$\mathcal{N}_2(\varphi) = \bar{N}_2(\varphi) + N_2(\varphi), \quad \mathcal{M}_2(\varphi) = M_2(\varphi)$$

Nous sommes donc ramenés à chercher l'état d'équilibre de flexion du voile soumis à des forces de bordure en équilibre.

#### 3.5.3.2 Flexion du voile soumis à des forces de bordure

Il suffit de déterminer les huit fonctions  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q_1$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  et  $\chi$ , puisque les équations (51) permettent ensuite de calculer  $u$  et  $w$ . Ces huit fonctions vérifient les équations d'équilibre (50) rendues homogènes ( $p_1 = p_3 = 0$ ), l'équation (53), et les équations (55). Montrons que six de ces huit équations permettent d'exprimer les huit fonctions à l'aide des deux seules fonctions  $\chi$  et  $\psi = Q_1 R_2$ . En effet :

— les deux dernières équations (55) donnent  $M_1$  et  $M_2$  en fonction de  $\chi$  ;

— les deux premières équations (50) permettent d'exprimer  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $\psi$  ; en éliminant  $N_2$  entre ces deux équations, on trouve :

$$\frac{d}{d\varphi} (N_1 R_2 \sin^2 \varphi + Q_1 R_2 \sin \varphi \cos \varphi) = 0$$

donc, la constante d'intégration étant nulle d'après la formule (57) :

$$(N_1 \sin \varphi + Q_1 \cos \varphi) R_2 \sin \varphi = 0$$

la seconde équation (50) donne ensuite  $N_2$  ; nous obtenons ainsi les relations :

$$N_1 = -\frac{1}{R_2} \psi \cotg \varphi, \quad N_2 = -\frac{1}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi} \quad (58)$$

— en résolvant les deux premières équations (55) par rapport à  $e_1$  et à  $e_2$ , et en tenant compte des valeurs (58), nous trouvons les formules :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -\frac{1}{K(1-v^2)} \left( \frac{1}{R_2} \psi \cotg \varphi - \frac{v}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi} \right) \\ e_2 &= -\frac{1}{K(1-v^2)} \left( \frac{1}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{v}{R_2} \psi \cotg \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Il suffit alors, pour obtenir les deux équations différentielles vérifiées par les deux fonctions  $\chi$  et  $\psi$ , de reporter les valeurs de  $M_1$  et de  $M_2$  dans la dernière équation d'équilibre (50) et de reporter les valeurs (59) de  $e_1$  et de  $e_2$  dans l'équation (53). En définissant l'opérateur  $\mathcal{L}$  de Meissner qui fait correspondre à la fonction  $F$  la fonction :

$$\mathcal{L}(F) = \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2F}{d\varphi^2} + \left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{R_2}{R_1} \cotg \varphi \right] \frac{dF}{d\varphi} - \frac{R_1}{R_2} F \cotg^2 \varphi \right\} \quad (60)$$

les équations différentielles vérifiées par  $\varphi$  et  $\psi$  s'écrivent simplement :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(\chi) - \frac{v}{R_1} \chi &= -\frac{1}{D} \psi \\ \mathcal{L}(\psi) + \frac{v}{R_1} \psi &= K(1-v^2) \chi \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

En éliminant  $\psi$  entre ces deux équations, nous voyons que  $\chi$  est une intégrale de l'équation linéaire et homogène du quatrième ordre :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(\chi) - v\mathcal{L}\left(\frac{\chi}{R_1}\right) + \frac{v}{R_1} \mathcal{L}(\chi) + \left[ \frac{K(1-v^2)}{D} - \frac{v^2}{R_1^2} \right] \chi = 0 \quad (62)$$

Connaissant  $\chi$ , on calcule  $\psi$  au moyen de la première équation (61).

Les quatre constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites. Par exemple, dans le cas du voile de la figure 22 :

$$\bar{\chi}(\varphi_0) + \chi(\varphi_0) = 0, \quad \bar{e}_2(\varphi_0) + e_2(\varphi_0) = 0$$

$$N_1(\varphi_1) = 0, \quad M_1(\varphi_1) = 0$$

L'équation (62) se simplifie lorsque  $R_1$  est constant, c'est-à-dire lorsque la surface du voile est un tore, une sphère, un cône ou un cylindre ; dans ce cas, en posant :

$$\lambda^4 = \frac{K(1-v^2)}{D} - \frac{1}{R_1^2} = \frac{12(1-v^2)}{h^2} - \frac{1}{R_1^2}$$

l'équation (62) se réduit à :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(\chi) + \lambda^4 \chi = 0 \quad (63)$$

dont l'intégrale générale est une combinaison linéaire des intégrales des deux équations :

$$\mathcal{L}(\chi) \pm i\lambda^2 \chi = 0$$

Ces dernières équations peuvent, dans certains cas, être intégrées au moyen de fonctions spéciales : fonctions hypergéométriques dans le cas de la sphère, et fonctions de Kelvin dans le cas du cône.

### 3.5.3.3 Solution approchée de Geckeler

Dans le dessein d'obtenir une solution approchée, nous étudions le cas simple d'un cylindre limité par deux parallèles  $AA'$  et  $BB'$  (figure 23) ; soit  $a$  le rayon du cylindre, et  $s$  et  $s'$  les distances d'un point du cylindre aux plans des parallèles  $AA'$  et  $BB'$ .

Les équations d'équilibre (50) rendues homogènes s'écrivent, dans le cas d'un voile cylindrique :

$$\frac{dN_1}{ds} = 0, \quad N_2 + a \frac{dQ_1}{ds} = 0, \quad \frac{dM_1}{ds} - Q_1 = 0$$

Nous pouvons donc exprimer  $N_1$  et  $N_2$  en fonction de  $\psi = aQ_1$  :

$$N_1 = C, \quad N_2 = -\frac{d\psi}{ds}$$

Nous en déduisons les expressions de  $e_1$  et  $e_2$  en fonction de  $\psi$  :

$$e_1 = \frac{N_1 - vN_2}{K(1-v^2)} = \frac{1}{K(1-v^2)} \left( C + v \frac{d\psi}{ds} \right)$$

$$e_2 = \frac{N_2 - vN_1}{K(1-v^2)} = \frac{1}{K(1-v^2)} \left( \frac{d\psi}{ds} + vC \right)$$

Enfin, les deux dernières équations (55) se réduisent à :

$$M_1 = -D \frac{d\chi}{ds}, \quad M_2 = -vD \frac{d\chi}{ds}$$

En reportant la valeur de  $M_1$  dans la dernière équation d'équilibre et la valeur de  $e_2$  dans l'équation (53) qui se réduit à  $\chi = -a \frac{d\psi}{ds}$ , nous trouvons les deux équations différentielles :

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} = -\frac{1}{aD} \psi, \quad \frac{d^2\psi}{ds^2} = \frac{K(1-v^2)}{a} \chi$$

Éliminons  $\psi$  entre ces deux équations ; en posant :

$$\gamma^4 = \frac{K(1-v^2)}{4Da^2} = \frac{3(1-v^2)}{a^2h^2}$$

nous trouvons l'équation différentielle :

$$\frac{d^4\chi}{ds^4} + 4\gamma^4\chi = 0 \quad (64)$$

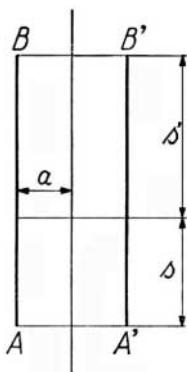


Figure 23 – Cylindre limité par deux plans parallèles

L'intégrale générale de l'équation (64) peut s'écrire :

$$\chi(s) = e^{-\gamma s}(A \cos \gamma s + B \sin \gamma s) + e^{-\gamma s'}(A' \cos \gamma s' + B' \sin \gamma s')$$

Les constantes sont déterminées par les conditions aux limites pour  $s = 0$  et  $s' = 0$ .

La fonction  $\chi(s)$  est la somme de deux fonctions :

$$\chi_1(s) = e^{-\gamma s}(A \cos \gamma s + B \sin \gamma s)$$

$$\chi_2(s) = e^{-\gamma s'}(A' \cos \gamma s' + B' \sin \gamma s')$$

qui représentent des oscillations amorties dont la longueur d'onde  $L$ , définie par  $\gamma L = 2\pi$ , a pour valeur :

$$L = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi\sqrt{ah}}{4\sqrt{3}(1-v^2)}$$

$L$  est d'autant plus petit que le voile est plus mince ; les relations :

$$\frac{\chi_1(s+L)}{\chi_1(s)} = \frac{\chi_2(s'+L)}{\chi_2(s')} = e^{-2\pi} \approx \frac{1}{535,5}$$

montrent que la fonction  $\chi_1(s)$  devient négligeable dès qu'on s'éloigne du bord  $AA'$ , et que la fonction  $\chi_2(s')$  devient négligeable dès qu'on s'éloigne du bord  $BB'$ . On peut donc déterminer  $A$  et  $B$  au moyen des conditions aux limites pour  $s = 0$ , et  $A'$  et  $B'$  au moyen des conditions aux limites pour  $s' = 0$ .

Lorsque le voile est mince,  $L$  est petit, et la fonction  $\chi = \chi_1 + \chi_2$  varie très rapidement. La dérivée  $d\chi/ds$  est donc grande devant  $\chi$ . De même, la dérivée seconde  $d^2\chi/ds^2$  est grande devant  $d\chi/ds$ . L'approximation de Geckeler consiste à supposer que les résultats précédents sont valables pour un voile de forme quelconque. Dans ces conditions, nous pouvons, dans l'opérateur de Meissner (60), ne conserver que le premier terme, qui contient la dérivée d'ordre le plus élevé, donc prendre :

$$\mathcal{L}(F) \approx \frac{R_2}{R_1^2} \frac{d^2F}{d\phi^2} = R_2 \frac{d^2F}{ds^2}$$

$s$  désignant l'abscisse curviligne du méridien, comptée positivement à l'intérieur du voile à partir du parallèle de bordure.

Cette approximation est cependant soumise à la restriction suivante : l'angle  $\phi$  doit être assez grand pour que  $\cot \phi$ , qui figure dans l'opérateur de Meissner, ne soit pas trop grand. Les résultats sont satisfaisants dès que  $\phi$  dépasse  $30^\circ$ .

L'approximation de Geckeler permet d'écrire l'équation (63) sous la forme :

$$R_2^2 \frac{d^4\chi}{ds^4} + \lambda^4 \chi = 0$$

et, puisque dans l'expression de  $\lambda^4$  le terme  $1/R_1^2$  est négligeable devant  $12(1-v^2)/h^2$ , en posant :

$$\gamma^4 = \frac{3(1-v^2)}{h^2 R_2^2}$$

l'équation différentielle vérifiée par la rotation  $\chi$  est identique à l'équation (64) relative aux voiles cylindriques. Donc :

Pourvu que  $\phi$  ne soit pas trop petit, les déformations d'un voile de révolution au voisinage d'un parallèle de bordure, sous l'effet des réactions appliquées le long de ce parallèle, peuvent être assimilées aux déformations d'un cylindre de révolution ayant pour rayon le rayon de courbure principal  $R_2$  du voile le long du parallèle de bordure.

Au voisinage du parallèle d'appui, la rotation est de la forme :

$$\chi(s) = e^{-\gamma s} (A \cos \gamma s + B \sin \gamma s)$$

Nous en déduisons les expressions de  $M_1$  et de  $e_2$  :

$$M_1(s) = \gamma D e^{-\gamma s} [(A - B) \cos \gamma s + (A + B) \sin \gamma s]$$

$$e_2(s) = \frac{1}{2\gamma R_2} e^{-\gamma s} [(A + B) \cos \gamma s - (A - B) \sin \gamma s]$$

Nous pouvons donc écrire facilement les conditions aux limites données au paragraphe 3.5.3.1, pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ .

Lorsque le voile est encastré le long du parallèle d'appui, nous obtenons :

$$A + \bar{\chi}(0) = 0, \quad A + B + 2\gamma R_2 \bar{e}_2(0) = 0$$

et lorsque le voile est articulé le long du parallèle d'appui, nous obtenons :

$$A - B = 0, \quad A + B + 2\gamma R_2 \bar{e}_2(0) = 0$$

**Remarque :** lorsque l'angle  $\varphi$  est plus petit que  $30^\circ$ , on peut obtenir une solution approchée en assimilant, au voisinage du parallèle d'appui, le voile au cône circonscrit le long du parallèle d'appui.

## 4. Voiles cylindriques

### 4.1 Notations et formules préliminaires

Un point  $A$  d'un voile cylindrique situé à l'intersection d'une génératrice ( $G$ ) et d'une section droite ( $\Gamma$ ) est défini par l'abscisse  $x = \overline{A_0 A}$  sur ( $G$ ), comptée à partir d'une section droite ( $\Gamma_0$ ) et par l'abscisse curviligne  $s = \widehat{A'_0 A}$  sur ( $\Gamma$ ) comptée à partir d'une génératrice ( $G_0$ ) (figure 24).

Il est parfois intéressant de substituer à la variable  $s$  l'angle  $\theta$  des normales au voile en  $A'_0$  et  $A$ . Si  $a$  est le rayon de courbure de ( $\Gamma$ ) en  $A$ , nous avons  $ds = a d\theta$ ;  $a$  est un nombre algébrique, positif dans le cas de la figure.

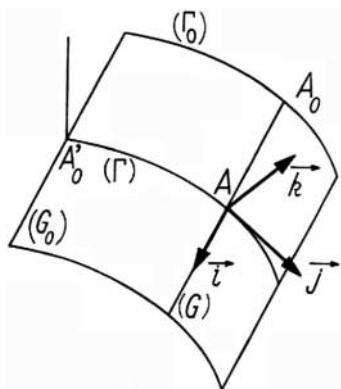


Figure 24 – Trièdre lié à un voile cylindrique

Au point  $A$  est lié un trièdre trirectangle direct, dont les vecteurs unités  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont dirigés suivant ( $G$ ), suivant la tangente à ( $\Gamma$ ) et suivant la normale à la surface. Nous retiendrons les formules :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \vec{k}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{i}}{\partial s} &= 0, & \frac{\partial \vec{j}}{\partial s} &= -\frac{\vec{k}}{a}, & \frac{\partial \vec{k}}{\partial s} &= \frac{\vec{j}}{a} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Nous désignerons par  $p$ ,  $q$  et  $r$  les composantes suivant  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  de la densité de force  $\vec{\omega}$  appliquée au voile :

$$\vec{\omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k}$$

La déformation du voile donne au point  $A$  un déplacement  $\overrightarrow{AA'} = \delta \vec{A}$  dont les composantes suivant  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  seront désignées par  $u$ ,  $v$  et  $w$  :

$$\vec{\delta A} = \overrightarrow{AA'} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

### 4.2 Voiles cylindriques non fléchis (théorie de la membrane)

#### 4.2.1 Équations d'équilibre

L'état de contrainte du voile est défini par les composantes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$  du tenseur tension.

Écrivons l'équilibre des forces appliquées à un élément  $ABCD$  du voile compris entre deux sections droites et deux génératrices infiniment voisines (figure 25); nous obtenons l'équation vectorielle :

$$\frac{\partial}{\partial x} (N_1 \vec{i} + N_{12} \vec{j}) + \frac{\partial}{\partial s} (N_{12} \vec{i} + N_2 \vec{j}) + p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k} = 0$$

qui, compte tenu des relations (65), est équivalente aux trois équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s} + p &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} + q &= 0 \\ N_2 &= ar \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

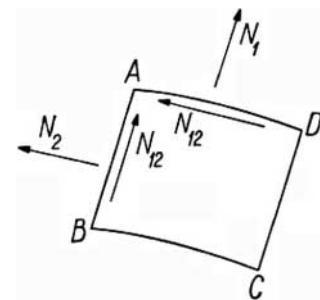


Figure 25 – Forces appliquées à un élément de voile cylindrique

Si l'on choisit  $x$  et  $\theta$  pour variables, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + p &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + q &= 0 \\ N_2 &= ar \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Les équations d'équilibre s'intègrent aisément ; en considérant par exemple les équations (67), nous obtenons successivement :

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= ar \\ N_{12} &= - \int_0^x \left( \frac{1}{a} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + q \right) dx + F(\theta) \\ N_1 &= - \int_0^x \left( \frac{1}{a} \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + p \right) dx + G(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Les fonctions  $F(\theta)$  et  $G(\theta)$  sont déterminées au moyen des conditions aux limites sur les bords du voile.

## 4.2.2 Exemples

### 4.2.2.1 Tube horizontal circulaire rempli d'un liquide de poids volumique $\Delta$

Si  $p_0$  désigne la pression du liquide sur l'axe du tube (figure 26), on a :

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = p_0 - \Delta a \cos \theta$$

Les relations (68) donnent :

$$\begin{aligned} N_2 &= p_0 a - \Delta a^2 \cos \theta \\ N_{12} &= - \Delta a x \sin \theta + F(\theta) \\ N_1 &= \frac{1}{2} \Delta a x^2 \cos \theta - \frac{x}{a} F'(\theta) + G(\theta) \end{aligned}$$

Supposons le tube supporté à ses extrémités par deux raidisseurs (tympons) infiniment rigides dans leur plan et infiniment souples perpendiculairement à leur plan ;  $N_1$  doit être nul pour  $x = 0$  et  $x = \ell$ , donc  $G(\theta)$  est identiquement nul et :

$$F'(\theta) = \frac{1}{2} \Delta a \ell \cos \theta$$

soit, en intégrant :

$$F(\theta) = \frac{1}{2} \Delta a \ell \sin \theta$$

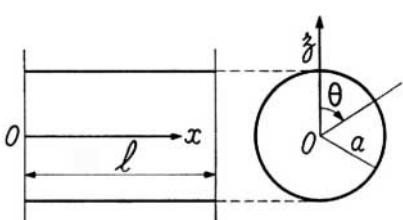


Figure 26 – Tube horizontal circulaire rempli d'un liquide

En effet, la constante d'intégration  $C$  est nulle, sinon le tube serait soumis à un couple de torsion  $2 \pi a^2 C$  ; on peut aussi le voir en écrivant que  $N_{12}$  est, par raison de symétrie, nul dans la section médiane  $x = 1/2 \ell$ .

Finalement, nous obtenons la solution :

$$\begin{aligned} N_1 &= - \frac{1}{2} \Delta a x (\ell - x) \cos \theta \\ N_2 &= p_0 a - \Delta a^2 \cos \theta \\ N_{12} &= \Delta a \left( \frac{\ell}{2} - x \right) \sin \theta \end{aligned}$$

Les tensions de cisaillement, qui ne sont pas nulles pour  $x = 0$  et  $x = \ell$ , sont reprises par les raidisseurs d'appui.

### 4.2.2.2 Voile cylindrique horizontal demi-circulaire

Le voile est supporté à ses extrémités par deux tympons (figure 27). En prenant l'origine des axes dans la section médiane,  $N_1$  doit être nul pour  $x = \ell$  et  $x = -\ell$ .

Le poids propre, de densité constante  $\varpi$ , conduit à la solution :

$$\begin{aligned} N_1 &= - \varpi \frac{\ell^2 - x^2}{a} \cos \theta \\ N_2 &= - \varpi a \cos \theta \\ N_{12} &= - 2 \varpi x \sin \theta \end{aligned}$$

Sur les sections extrêmes du voile,  $N_1 = 0$  et  $N_{12}$  est repris par les tympons.

Sur les bords longitudinaux ( $\theta = \pm \pi/2$ ),  $N_2 = 0$ , mais  $N_{12} \neq 0$  ; si le voile n'est pas trop long ( $\ell < a$ ), on peut admettre que les tensions de cisaillement sont équilibrées par des membrures longitudinales renforçant les bords du voile et travaillant à la traction.

Une surcharge de neige de densité constante  $\varpi'$  rapportée à l'aire de la projection horizontale du voile conduit à la solution :

$$\begin{aligned} N_1 &= - \frac{3}{2} \varpi' \frac{(\ell^2 - x^2)}{a} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ N_2 &= - \varpi' a \cos^2 \theta \\ N_{12} &= - 3 \varpi' x \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

La tension  $N_2$  est encore nulle sur les bords longitudinaux du voile ; la raison en est que la pression normale  $r = -\varpi' \cos^2 \theta$  est nulle sur les bords longitudinaux ; il n'en serait plus de même pour d'autres sollicitations, le vent par exemple, donnant lieu à une pression normale non nulle le long des bords longitudinaux.

Si l'on veut que  $N_2$  soit nul le long des bords longitudinaux quelle que soit la densité de force appliquée, il faut et il suffit, en vertu de la troisième équation d'équilibre (66), que le rayon de courbure  $a$  de la section droite soit nul le long des bords longitudinaux. C'est la raison pour laquelle on a réalisé des voiles dont la section droite est une cycloïde d'équations paramétriques :

$$x = R(2\theta + \sin 2\theta), \quad z = R(1 + \cos 2\theta) \quad \text{avec } -\pi/2 \leq \theta < \pi/2$$

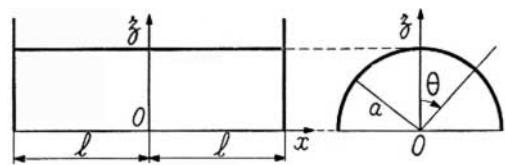


Figure 27 – Voile cylindrique horizontal demi-circulaire

Si la théorie de la membrane fournit des résultats corrects pour les voiles fermés (tubes), il n'en est pas de même pour les voiles ayant des bords longitudinaux libres. Un tel voile ne peut être autoportant que si  $N_2$  est nul le long des bords libres ; mais, même dans ce cas, il y a en général incompatibilité des déformations du bord du voile et de la membrure destinée à reprendre les tensions  $N_{12}$ , l'un étant comprimé et l'autre tendue. Il est donc indispensable de faire intervenir la flexion du voile pour obtenir une méthode de calcul correcte des voiles autoportants.

#### 4.2.3 Calcul des déformations et des déplacements

Les composantes  $e_1$ ,  $e_2$  et  $g_{12}$  du tenseur déformation résultent des lois de l'élasticité :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{Eh} (N_1 - v N_2) \\ e_2 &= \frac{1}{Eh} (N_2 - v N_1) \\ 2g_{12} &= \frac{2(1+v)}{Eh} N_{12} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Par ailleurs, il est facile d'exprimer les composantes du tenseur déformation en fonction des composantes du déplacement. Si l'on considère en un point  $A$  du voile deux éléments  $\overrightarrow{AB} = \vec{i} dx$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{j} ds$ , ces éléments deviennent, après déformation :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B'} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \vec{i} dx + \frac{\partial v}{\partial x} \vec{j} dx + \frac{\partial w}{\partial x} \vec{k} dx \\ \overrightarrow{A'C'} &= \frac{\partial u}{\partial s} \vec{i} ds + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a}\right) \vec{j} ds + \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{a}\right) \vec{k} ds \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, en utilisant la même méthode qu'au paragraphe 3.2.2.1, les formules :

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_2 &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} \\ 2g_{12} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

#### 4.2.4 Équations d'équilibre écrites en fonction des déplacements

Nous déduisons facilement des équations (69) et (70) les relations :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= K \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + v \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} \right) \right] \\ N_2 &= K \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ N_{12} &= \frac{1}{2} K (1-v) \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

dans lesquelles  $K$  est la rigidité de membrane du voile [formule (54)] :

$$K = \frac{Eh}{1-v^2}$$

En reportant les valeurs (71) dans les équations d'équilibre (66), nous obtenons le système d'équations suivant, dans lequel les fonctions inconnues sont les composantes du déplacement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{v}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{p}{K} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{a} \right) + \frac{q}{K} &= 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} - \frac{a r}{K} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Dans le cas d'un voile tubulaire fermé, il est possible, en prenant pour variables  $x$  et  $\theta$ , de chercher la solution du système (72) sous forme de séries trigonométriques de  $\theta$ .

### 4.3 Flexion des voiles cylindriques (théorie simplifiée)

#### 4.3.1 Équations d'équilibre

La théorie simplifiée de la flexion des voiles cylindriques consiste à supposer  $N_{12} = N_{21}$  et  $M_{12} = M_{21}$  (§ 1.2.1). En un point du voile, l'état de contrainte est donc défini par les trois composantes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_{12}$  du tenseur tension, les trois composantes  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_{12}$  du tenseur flexion et les deux composantes  $Q_1$  et  $Q_2$  du vecteur effort tranchant.

L'équilibre des forces et des couples appliqués à un élément  $ABCD$  du voile (figure 28), compris entre deux sections droites et deux génératrices infiniment voisines, se traduit par les deux équations vectorielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (N_1 \vec{i} + N_{12} \vec{j} - Q_1 \vec{k}) + \frac{\partial}{\partial s} (N_{12} \vec{i} + N_2 \vec{j} - Q_2 \vec{k}) + p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (M_{12} \vec{i} - M_1 \vec{j}) + \frac{\partial}{\partial s} (M_2 \vec{i} - M_{12} \vec{j}) - Q_2 \vec{i} + Q_1 \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

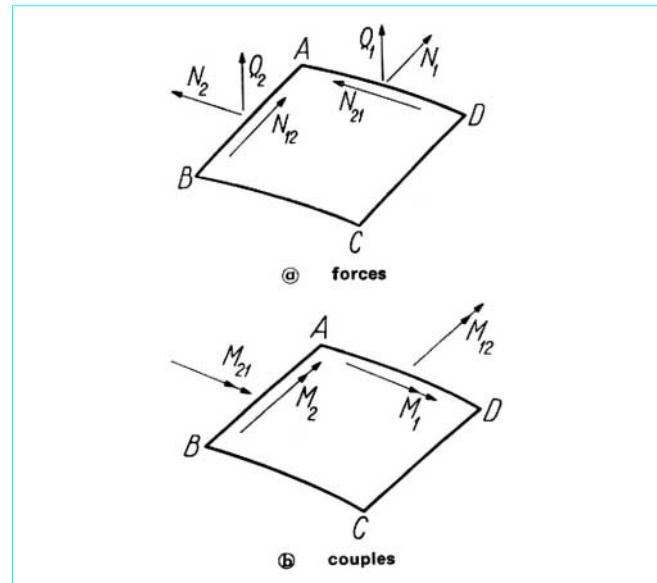


Figure 28 – Efforts appliqués à un élément de voile cylindrique

Compte tenu des relations (65), les équations précédentes sont équivalentes aux six équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s} + p &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} - \frac{1}{a} Q_2 + q &= 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} + \frac{1}{a} N_2 - r &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s} - Q_1 &= 0 \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial s} - Q_2 &= 0 \\ \frac{1}{a} M_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons, avec une bonne approximation, négliger dans les équations précédentes les termes  $(1/a)Q_2$  et  $(1/a)M_{12}$ ; en effet, d'une part, le rayon de courbure  $a$  est grand et, d'autre part,  $Q_1$  et  $M_{12}$  sont petits parce que le voile n'offre que peu de résistance à la flexion dans le sens où il est développable. Nous obtenons ainsi cinq équations d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s} + p &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} + q &= 0 \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} + \frac{1}{a} N_2 - r &= 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial s} - Q_1 &= 0 \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial s} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

En éliminant les efforts tranchants  $Q_1$  et  $Q_2$ , nous obtenons les trois équations aux dérivées partielles nécessairement vérifiées par les composantes du tenseur tension et du tenseur flexion :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s} + p &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} + q &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial s^2} + \frac{1}{a} N_2 - r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Ces équations sont évidemment insuffisantes pour déterminer les composantes du tenseur tension et du tenseur flexion.

#### 4.3.2 Expressions des composantes du tenseur tension et du tenseur flexion en fonction des composantes du déplacement

En supposant le rayon de courbure grand vis-à-vis de l'épaisseur du voile, les composantes du tenseur tension s'expriment encore en fonction de  $u$ ,  $v$  et  $w$  par les relations (71).

Dans les mêmes conditions, nous savons, d'après la théorie des plaques (article *Plaques minces élastiques* [A 310]), que les composantes du tenseur flexion s'expriment en fonction de la composante normale  $w$  du déplacement par les relations :

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \\ M_2 &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{12} &= D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

dans lesquelles  $D$  désigne la rigidité de flexion du voile [formule (54)] :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$$

**Remarque :** pour obtenir une théorie plus rigoureuse de la flexion des voiles cylindriques, il faut supposer  $N_{12} \neq N_{21}$  et  $M_{12} \neq M_{21}$ ; l'état de contrainte est alors défini par dix composantes qui vérifient six équations d'équilibre. Les huit composantes du tenseur tension et du tenseur flexion s'expriment en fonction de  $u$ ,  $v$  et  $w$  par huit relations qui ne diffèrent des formules (71) et (75) que par des termes correctifs. Nous avons ainsi quatorze équations pour déterminer treize inconnues, qui sont les dix composantes de l'état de contrainte et les trois composantes du déplacement; il se trouve heureusement que l'équation d'équilibre des moments autour de la normale du voile est une conséquence des autres équations. La théorie simplifiée de la flexion exposée précédemment est toujours suffisante en pratique, sauf pour l'étude de la stabilité élastique que nous n'abordons pas.

#### 4.3.3 Équations donnant les composantes du déplacement

Si l'on reporte les expressions (71) et (75) des composantes du tenseur tension et du tenseur flexion dans les équations d'équilibre (74), nous obtenons un système de trois équations aux dérivées partielles du huitième ordre, nécessairement vérifiées par les composantes du déplacement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \frac{v}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{p}{K} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{a} \right) + \frac{q}{K} &= 0 \\ \frac{K}{a} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{a} \right) + D\Delta\Delta w - r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Dans les équations (76),  $\Delta$  désigne le laplacien :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

donc :

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}$$

Lorsque  $D = 0$ , les équations (76) se réduisent aux équations (72) de la théorie de la membrane. Soit  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  une solution des équations (72) ; les relations (75) associent au déplacement  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  un tenseur flexion de composantes  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  et  $\bar{M}_{12}$ . Il est aisé de voir que les excentremens  $\bar{M}_1/N_1$ ,  $\bar{M}_2/N_2$  et  $\bar{M}_{12}/N_{12}$  des résultantes des contraintes sur l'épaisseur du voile ont pour ordre de grandeur  $h$  ( $h/a$ ) ; on peut donc négliger les moments  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  et  $\bar{M}_{12}$ . La solution  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  convient toutes les fois qu'elle permet de satisfaire aux conditions d'appui sur les bords du voile. S'il n'en est pas ainsi, des moments  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_{12}$  apparaissent dans le voisinage des bords du voile ; la théorie de la flexion a pour but de calculer ces moments. Si nous observons que  $D\Delta\bar{w}$  a pour ordre de grandeur  $r(h/a)^2$ , donc est négligeable devant  $r$ , la solution générale des équations (76) peut s'écrire :

$$U = \bar{u} + u, \quad V = \bar{v} + v, \quad W = \bar{w} + w$$

$(u, v, w)$  désignant la solution générale des équations (76) rendues homogènes ( $p = q = r = 0$ ). Il suffira ensuite de déterminer la solution particulière  $(u, v, w)$  des équations (76) rendues homogènes, de façon que la solution  $(U, V, W)$  satisfasse aux conditions aux limites.

Voici les conditions aux limites le long d'un bord constitué par une **section droite** :

— *bord encastré* :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0$$

— *bord appuyé sur un tympan* :

$$v = 0, \quad w = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

— *bord libre* :

$$M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_{12} = 0, \quad Q_1 + (\partial M_{12} / \partial s) = 0$$

Les principales conditions aux limites le long d'un bord constitué par une **génératrice** sont :

— *bord encastré* :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial w / \partial s = 0$$

— *bord appuyé sur un tympan* :

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_2 = 0, \quad N_2 = 0$$

— *bord libre* :

$$M_2 = 0, \quad N_2 = 0, \quad N_{12} = 0, \quad Q_2 + (\partial M_{12} / \partial x) = 0$$

La dernière condition relative au bord libre est la **condition de Kirchhoff** de la théorie des plaques, exprimant que la densité de réaction normale au voile est nulle (article *Plaques minces élastiques* [A 310]).

Dans le cas d'un voile ayant la forme d'un cylindre de révolution, il est possible, en prenant pour variables  $x$  et  $\theta$ , de chercher la solution du système (74) sous la forme de séries trigonométriques de  $\theta$ .

## 4.4 Tube cylindrique soumis à une sollicitation indépendante de $\theta$

### 4.4.1 Équations générales

Nous prenons pour variables  $x$  et  $\theta$ , et nous supposons que la densité de force appliquée au voile a pour composantes :

$$p = p(x), \quad q = 0, \quad r = r(x)$$

Dans ce cas,  $v$ ,  $N_{12}$  et  $M_{12}$  sont nuls, et  $u$ ,  $w$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $M_1$ , et  $M_2$  ne sont fonction que de  $x$ . Nous désignons par  $a$  le rayon du tube.

La première équation d'équilibre (74) se réduit à :

$$\frac{dN_1}{dx} = -p(x)$$

Les équations (76) se réduisent aux deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{v}{a} \frac{dw}{dx} &= -\frac{p}{K} = \frac{1}{K} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{K}{a} \left( v \frac{du}{dx} + \frac{w}{a} \right) + D \frac{d^4w}{dx^4} &= r \end{aligned}$$

En intégrant la première, nous retrouvons la première relation (71) :

$$\frac{du}{dx} = -v \frac{w}{a} + \frac{1}{K} N_1$$

puis, en reportant la valeur de  $du/dx$  ainsi obtenue dans la seconde, nous trouvons l'équation différentielle qui permet de calculer le déplacement normal  $w$  :

$$D \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = r - v \frac{N_1}{a} \quad (77)$$

Soit  $w_0(x)$  une intégrale particulière de l'équation (77) ; en définissant  $\gamma$ , qui a les dimensions de l'inverse d'une longueur, par la formule :

$$\gamma^4 = \frac{Eh}{4Da^2} = \frac{3(1-v^2)}{a^2 h^2}$$

l'intégrale générale de (77) peut s'écrire sous l'une des deux formes :

$$w = w_0(x) + e^{-\gamma x} (A_1 \cos \gamma x + B_1 \sin \gamma x) + e^{\gamma x} (A_2 \cos \gamma x + B_2 \sin \gamma x)$$

$$w = w_0(x) + C_1 F(\gamma x) + C_2 G(\gamma x) + C_3 H(\gamma x) + C_4 K(\gamma x)$$

avec  $F(u) = \operatorname{ch} u \cos u, \quad G(u) = \operatorname{sh} u \sin u$   
 $H(u) = \operatorname{sh} u \cos u, \quad K(u) = \operatorname{ch} u \sin u$

Il est souvent intéressant d'utiliser les fonctions suivantes, définies :

— pour  $u > 0$  par :

$$\varphi(u) = e^{-u} (\cos u + \sin u), \quad \zeta(u) = e^{-u} \sin u$$

$$\psi(u) = e^{-u} (\cos u - \sin u), \quad \theta(u) = e^{-u} \cos u$$

— pour  $u < 0$  par :

$$\varphi(u) = \varphi(-u), \quad \zeta(u) = -\zeta(-u)$$

$$\psi(u) = \psi(-u), \quad \theta(u) = -\theta(-u)$$

Il est immédiat de vérifier les relations, valables quel que soit  $u$  :

$$\varphi'(u) = -2\zeta(u), \quad \zeta'(u) = \psi(u)$$

$$\psi'(u) = -2\theta(u), \quad \theta'(u) = -\varphi(u)$$

Connaissant  $w$ , le moment fléchissant  $M_1$  et l'effort tranchant  $Q_1$  sont donnés par les formules :

$$M_1 = D \frac{d^2w}{dx^2}, \quad Q_1 = \frac{dM_1}{dx} = D \frac{d^3w}{dx^3}$$

Connaissant  $N_1$ , nous calculons  $u$  en intégrant :

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_1}{K} - v \frac{w}{a}$$

puis  $N_2$  au moyen de la relation :

$$N_2 = K \left( \frac{w}{a} + v \frac{du}{dx} \right) = Eh \frac{w}{a} + v N_1$$

Le cas où la dilatation  $du/dx$  suivant les génératrices est empêchée mérite une attention spéciale ; nous avons alors  $N_1 = vK w/a$ , et l'équation (77) devient :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{K}{a^2} w = r \quad (78)$$

Tout ce qui a été dit concernant l'intégration de l'équation (77) est valable pour l'équation (78), à condition de remplacer  $\gamma$  par  $\gamma'$  défini par :

$$\gamma'^4 = \frac{K}{4D a^2} = \frac{3}{a^2 h^2}$$

## 4.4.2 Exemples

### 4.4.2.1 Exemple 1

Un tube très long est limité par la section  $x=0$ , qui est soumise au moment fléchissant  $M_0$  et à l'effort tranchant  $Q_0$  (figure 29). Supposons  $N_1$  nul. Puisque  $w$  et  $dw/dx$  tendent vers zéro lorsque  $x$  augmente indéfiniment, et que  $w_0(x)$  est nul,  $w$  est de la forme :

$$w = e^{-\gamma x} (A \cos \gamma x + B \sin \gamma x)$$

En déterminant les constantes  $A$  et  $B$  au moyen des conditions :

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 \text{ et } D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 \text{ pour } x = 0$$

nous obtenons la solution :

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2D\gamma^3} [M_0 \gamma \psi(\gamma x) + Q_0 \theta(\gamma x)] \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{2D\gamma^2} [2M_0 \gamma \theta(\gamma x) + Q_0 \varphi(\gamma x)] \\ M_1(x) &= M_0 \varphi(\gamma x) + \frac{1}{\gamma} Q_0 \zeta(\gamma x) \\ Q_1(x) &= Q_0 \psi(\gamma x) - 2M_0 \gamma \zeta(\gamma x) \end{aligned}$$

### 4.4.2.2 Exemple 2

Un tube très long, soumis à une pression intérieure constante  $r$ , est encastré dans la section  $x=0$  (figure 30). Supposons  $N_1=0$ . Nous avons  $w_0(x) = r a^2/(Eh)$ , et les conditions pour  $x$  très grand montrent que  $w$  est de la forme :

$$w = \frac{ra^2}{Eh} [1 + e^{-\gamma x} (A \cos \gamma x + B \sin \gamma x)]$$

En déterminant les constantes par les conditions  $w(0)=0$  et  $w'(0)=0$ , nous obtenons la solution :

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{r}{4D\gamma^4} [1 - \varphi(\gamma x)] \\ M_1(x) &= \frac{r}{2\gamma^2} \psi(\gamma x) \\ Q_1(x) &= -\frac{r}{\gamma} \theta(\gamma x) \\ N_2(x) &= ra [1 - \varphi(\gamma x)] \end{aligned}$$

### 4.4.2.3 Exemple 3

Un réservoir cylindrique d'axe vertical est rempli d'un liquide de poids volumique  $\Delta$ . Nous supposons le fond du réservoir encastré sur une fondation rigide (figure 31), et nous repérons une section droite du réservoir par sa distance  $x$  au bord supérieur ou par sa distance  $x'$  au fond du réservoir ( $x+x'=\ell$ ).

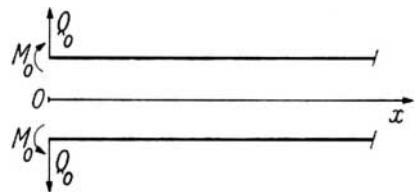


Figure 29 – Tube limité par une section soumise à un moment fléchissant

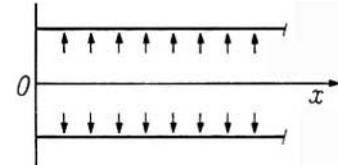


Figure 30 – Tube soumis à une pression intérieure constante

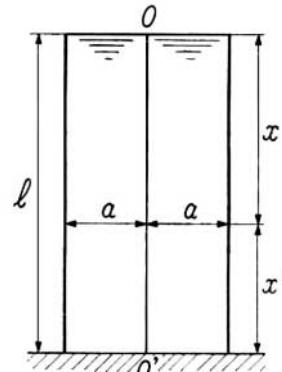


Figure 31 – Réservoir cylindrique vertical rempli d'un liquide

Négligeons le poids propre du réservoir ( $N_1=0$ ) ; une solution particulière de l'équation (77) est, puisque la pression intérieure  $r=\Delta x$  :

$$w_0(x) = \frac{\Delta a^2 x}{Eh}$$

En tenant compte des conditions  $M_1(0)=0$  et  $Q_1(0)=0$  sur le bord supérieur, la solution est de la forme :

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\Delta a^2 x}{Eh} + \frac{\Delta a^2}{Eh\gamma} [AF(\gamma x) + BH(\gamma x) + BK(\gamma x)] \\ M_1(x) &= \frac{\Delta a^2 h^2 \gamma}{6(1-\nu^2)} [-AG(\gamma x) + BH(\gamma x) - BK(\gamma x)] \\ Q_1(x) &= -\frac{\Delta a^2 h^2 \gamma^2}{6(1-\nu^2)} [2BG(\gamma x) + AH(\gamma x) + AK(\gamma x)] \end{aligned}$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions  $w(\ell)=0$  et  $w'(\ell)=0$  au fond du réservoir ; en posant, pour simplifier l'écriture :

$$F = F(\gamma\ell), \quad G = G(\gamma\ell), \quad H = H(\gamma\ell), \quad K = K(\gamma\ell)$$

on trouve :

$$A = \frac{-2F\gamma\ell + (H+K)}{2F^2 - H^2 + K^2}, B = \frac{-F + (H-K)\gamma\ell}{2F^2 - H^2 + K^2}$$

et le moment d'encastrement  $M_1(\ell)$  au fond du réservoir a pour valeur :

$$M_1(\ell) = \frac{\Delta a^2 h^2 \gamma}{6(1-v^2)} \left[ \frac{\gamma\ell(\cosh 2\gamma\ell - \cos 2\gamma\ell) - (\sinh 2\gamma\ell - \sin 2\gamma\ell)}{\cosh 2\gamma\ell + \cos 2\gamma\ell + 2} \right]$$

La solution précédente peut être remplacée par une solution approchée lorsque l'épaisseur  $h$  est suffisamment faible pour que  $\gamma\ell$  soit assez grand. Dans ces conditions, les flexions à la base du réservoir s'atténuent très rapidement dès qu'on s'éloigne du fond, et l'on peut négliger les conditions aux limites sur le bord supérieur. En désignant par  $M_0$  et  $Q_0$  les valeurs de  $M_1$  et de  $Q_1$  au fond du réservoir, nous trouvons, grâce à la solution donnée dans le premier exemple ([§ 4.4.2.1](#)), que  $w(x')$  est de la forme :

$$w(x') = \frac{\Delta(\ell - x')}{4D\gamma^4} + \frac{1}{2D\gamma^3} [M_0\gamma\psi(\gamma x') + Q_0\theta(\gamma x')]$$

Les conditions au fond du réservoir permettent de calculer  $M_0$  et  $Q_0$  :

$$M_0 = \frac{\Delta}{2\gamma^3} (\gamma\ell - 1), Q_0 = -\frac{\Delta}{2\gamma^2} (2\gamma\ell - 1)$$

Nous obtenons ainsi la solution approchée :

$$w(x') = \frac{\Delta\ell}{4D\gamma^4} \left[ 1 - \frac{x'}{\ell} + \frac{\gamma\ell - 1}{\gamma\ell} \psi(\gamma x') - \frac{2\gamma\ell - 1}{\gamma\ell} \theta(\gamma x') \right]$$

$$M_1(x') = \frac{\Delta}{2\gamma^3} [(\gamma\ell - 1)\phi(\gamma x') - (2\gamma\ell - 1)\zeta(\gamma x')]$$

$$Q_1(x') = -\frac{\Delta}{2\gamma^2} [(2\gamma\ell - 1)\psi(\gamma x') - 2(2\gamma\ell - 1)\zeta(\gamma x')]$$

La solution approchée est toujours suffisante en pratique, comme le montre l'**exemple** numérique suivant :

$$a = 20 \text{ m}, \ell = 9 \text{ m}, h = 0,45 \text{ m}, \Delta = 10^4 \text{ N/m}^3, v = 0,2$$

La solution exacte donne pour valeur du moment d'encastrement  $M_0 = 177\,350 \text{ J}$ , et la solution approchée  $M_0 = 177\,590 \text{ J}$ .

## 4.5 Voiles cylindriques autoportants

Un voile cylindrique autoportant est limité par deux génératrices de bordure et deux sections supportées par des tympans. Il n'existe pas de solution simple des équations ([76](#)) qui permette de satisfaire aux conditions aux limites à la fois sur les sections extrêmes et sur les bords libres longitudinaux. L'étude complète d'un voile autoportant ne peut se faire que par des méthodes numériques (par exemple la méthode des éléments finis), ou par des méthodes analogiques, ou encore par des essais sur modèle réduit.

Une solution approchée, qui fournit des résultats corrects suffisamment loin des sections d'extrémité, consiste à considérer le voile comme une poutre ayant pour section la section droite du voile. Nous désignerons par  $Gyz$  les axes centraux d'inertie de cette section (figure [32](#)). Les coordonnées  $(y, z)$  d'un point  $P$  de la section et l'épaisseur  $h$  du voile sont des fonctions de l'abscisse curviligne  $s$  de  $P$ , comptée à partir de  $A_0$ ;  $s$  varie donc de 0 à  $L$ , longueur développée de la section du voile. Nous désignerons par  $\varphi$  l'angle de  $Gy$  et de la tangente orientée en  $P$  à la section du voile ( $\cos \varphi = dy/ds$ ,  $\sin \varphi = dz/ds$ ).

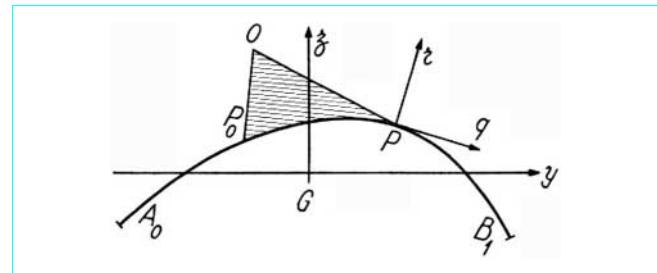


Figure 32 – Voile cylindrique autoportant

La poutre équivalente au voile est soumise à une densité de force de composantes  $\varpi_y$  et  $\varpi_z$  suivant  $Gy$  et  $Gz$  :

$$\varpi_y = \int_0^L (q \cos \varphi - r \sin \varphi) ds, \quad \varpi_z = \int_0^L (q \sin \varphi + r \cos \varphi) ds$$

et à une densité longitudinale de couple  $\gamma$ , comptée par rapport au *centre de torsion* de la section, de coordonnées  $(\eta, \zeta)$  :

$$\gamma = \int_0^L [(\eta - \eta)(q \sin \varphi + r \cos \varphi) - (z - \zeta)(q \cos \varphi - r \sin \varphi)] ds$$

La théorie des poutres (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans le traité Construction) permet de calculer les éléments de réduction du système des forces extérieures pour une section quelconque. Ce sont :

- l'effort tranchant de composantes  $T_y$  et  $T_z$ ;
- le moment fléchissant de composantes  $M_y$  et  $M_z$ ;
- le couple de torsion  $C$  et le bimoment  $B$ .

Le *bimoment*, nul dans une section libre de se gauchir, est défini par  $dB/dx = C$ .

Nous supposons que la section dont l'épaisseur est faible n'offre aucune résistance à la torsion pure de Saint-Venant. La contrainte normale  $\sigma$  et la contrainte tangentielle  $\tau$  sont alors données par les formules classiques de la flexion et de la torsion générée :

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{B A^*}{K_1}$$

$$\tau = \frac{1}{h} \left( \frac{T_y m_z}{I_z} + \frac{T_z m_y}{I_y} + \frac{C a}{K_1} \right)$$

Donnons la signification des quantités qui interviennent dans les formules précédentes.

■  $I_y$  et  $I_z$  sont les moments d'inertie centraux de la section :

$$I_y = \int_0^L z^2 h ds, \quad I_z = \int_0^L y^2 h ds$$

■  $m_y(s)$  et  $m_z(s)$  sont les moments statiques de l'aire  $PB_1$  :

$$m_y(s) = \int_s^L z(t) h(t) dt, \quad m_z(s) = \int_s^L y(t) h(t) dt$$

■  $A^*(s)$  est le double de l'aire du secteur  $OP_0P$  hachuré sur la figure [32](#); le centre de torsion  $O$  et le point  $P_0$  [il peut exister plusieurs points  $P_0$ , mais la fonction  $A^*(s)$  est unique] sont déterminés par les relations :

$$\int_0^L A^* h ds = 0, \quad \int_0^L A^* y h ds = 0, \quad \int_0^L A^* z h ds = 0$$

Notons que :

$$dA^* = [(y - \eta) \sin \varphi - (z - \zeta) \cos \varphi] ds$$

■  $K_1$ , qui permet de définir la rigidité au gauchissement  $EK_1$ , est donné par :

$$K_1 = \int_0^L (A^*)^2 h ds$$

■ Enfin  $a(s)$  a pour valeur :

$$a(s) = \int_s^L A^*(t) h(t) dt$$

Nous connaissons donc, compte tenu des conventions de signes adoptées pour  $\sigma$  et  $\tau$ , les tensions de membranes :

$$N_1 = -\sigma h, \quad N_{12} = -\tau h = -\Phi$$

supportées par le voile. Nous avons désigné par  $\Phi$  le flux de la contrainte de cisaillement  $\tau$  ; nous avons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{m_z}{I_z} \bar{\sigma}_y + \frac{m_y}{I_y} \bar{\sigma}_z + \frac{a}{K_1} \gamma$$

Pour calculer la tension  $N_2$  et le moment fléchissant  $M_2$ , nous considérons la tranche du voile comprise entre les sections d'abscisses  $x$  et  $x + dx$  éloignées des sections d'appui. Cette tranche est une poutre courbe de largeur  $dx$  et de hauteur  $h$  soumise :

— à la densité de force tangentielle  $q dx$  et à la densité de force normale  $r dx$ ;

— à la densité de force tangentielle  $-(\partial \Phi / \partial x) dx$ , résultant des efforts de cisaillement sur les sections du voile d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Nous connaissons ainsi toutes les forces, qui sont en équilibre, appliquées à la poutre courbe constituée par la tranche. Nous savons donc calculer l'effort normal  $N_2$  et le moment fléchissant  $M_2$  supportés par unité de largeur de cette poutre courbe.

# Calcul des structures

## Voiles minces

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

### Bibliographie

COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tome I, Chapitre XXVIII, 3<sup>e</sup> éd., Dunod (1971).

TIMOSHENKO (S.). – *Théorie des plaques et des coques*. 459 p., Béranger (1951).

TIMOSHENKO (S.). – *Théorie de la stabilité élastique*. 496 p., Béranger (1943).

FLÜGGE (W.). – *Statique et dynamique des coques*. 330 p., Eyrolles (1960).

PFLÜGER (A.). – *Éléments de statique des coques*. Dunod (1966).

GECKELER (J.W.). – *Handbuch der Physik*. 6, Springer Berlin (1928).

DISCHINGER (F.). – *Schalen und Rippenkuppeln* (Coques et coupole nervurées). Handbuch für Eisenbetonbau, Springer Berlin (1928).

AIMOND (F.). – *Étude statique des voiles minces en paraboloidé hyperbolique travaillant sans flexion*. 4<sup>e</sup> vol., Mémoires Assoc. Intern. Ponts Charpentes (1935).

COURBON (J.). – *Voiles minces*. 198 p., Eyrolles (1979).