

TRANSFERTS THERMIQUES

Yves JANNOT

2003

NOMENCLATURE.....	4
1. GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR.....	5
1.1 INTRODUCTION	5
1.2 DEFINITIONS	5
1.2.1 <i>Champ de température</i>	5
1.2.2 <i>Gradient de température</i>	5
1.2.3 <i>Flux de chaleur</i>	5
1.3 FORMULATION D'UN PROBLEME DE TRANSFERT DE CHALEUR	6
1.3.1 <i>Bilan d'énergie</i>	6
1.3.2 <i>Expression des flux d'énergie</i>	6
2 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION	9
2.1 L'EQUATION DE LA CHALEUR	9
2.2 CONDUCTION EN REGIME PERMANENT.....	10
2.2.1 <i>Transfert unidirectionnel</i>	10
2.2.2 <i>Transfert multidirectionnel</i>	15
2.3 CONDUCTION UNIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE SANS CHANGEMENT D'ETAT	18
2.3.1 <i>Milieu à température uniforme</i>	18
2.3.2 <i>Milieu semi-infini</i>	19
2.3.3 <i>Transfert unidirectionnel dans des milieux limités : plaque, cylindre, sphère</i>	27
2.3.4 <i>Systèmes complexes : méthode des quadripôles</i>	38
2.4 CONDUCTION UNIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE AVEC CHANGEMENT D'ETAT.....	43
2.4.1 <i>Température constante imposée en surface</i>	43
2.4.2 <i>Fusion par contact avec un milieu semi-infini chaud</i>	45
2.5 CONDUCTION MULTIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE	45
2.5.1 <i>Produit de solutions unidirectionnelles</i>	45
2.6 LES AILETTES.....	46
2.6.1 <i>L'équation de la barre</i>	46
2.6.2 <i>Flux extrait par une ailette</i>	47
2.6.3 <i>Efficacité d'une ailette</i>	50
2.6.4 <i>Choix des ailetttes</i>	51
3 TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT.....	53
3.1 GENERALITES. DEFINITIONS	53
3.1.1 <i>Nature du rayonnement</i>	53
3.1.2 <i>Définitions</i>	54
3.2 LOIS DU RAYONNEMENT	57
3.2.1 <i>Loi de Lambert</i>	57
3.2.2 <i>Lois physiques</i>	57
3.3 RAYONNEMENT RECIPROQUE DE PLUSIEURS SURFACES	60
3.3.1 <i>Radiosité et flux net perdu</i>	60
3.3.2 <i>Facteur de forme géométrique</i>	60
3.3.3 <i>Calcul des flux</i>	61
3.3.4 <i>Analogie électrique</i>	63
3.4 EMISSION ET ABSORPTION DES GAZ.....	65
3.4.1 <i>Spectre d'émission des gaz</i>	65
3.4.2 <i>Echange thermique entre un gaz et une paroi</i>	65
4 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION.....	67
4.1 RAPPELS SUR L'ANALYSE DIMENSIONNELLE	67
4.1.1 <i>Dimensions fondamentales</i>	67

4.1.2	<i>Principe de la méthode</i>	67
4.1.3	<i>Exemple d'application</i>	68
4.1.4	<i>Avantages de l'utilisation des grandeurs réduites</i>	70
4.2	CONVECTION SANS CHANGEMENT D'ETAT	70
4.2.1	<i>Généralités. Définitions</i>	70
4.2.2	<i>Expression du flux de chaleur</i>	71
4.2.3	<i>Calcul du flux de chaleur en convection forcée</i>	73
4.2.4	<i>Calcul du flux de chaleur en convection naturelle</i>	74
4.3	CONVECTION AVEC CHANGEMENT D'ETAT	75
4.3.1	<i>Condensation</i>	75
4.3.2	<i>Ebullition</i>	79
5	LES ECHANGEURS DE CHALEUR	83
5.1	LES ECHANGEURS TUBULAIRES SIMPLES.....	83
5.1.1	<i>Généralités. Définitions</i>	83
5.1.2	<i>Expression du flux échangé</i>	83
5.1.3	<i>Efficacité d'un échangeur</i>	88
5.1.4	<i>Nombre d'unités de transfert</i>	90
5.1.5	<i>Calcul d'un échangeur</i>	91
5.2	LES ECHANGEURS A FAISCEAUX COMPLEXES.....	92
5.2.1	<i>Généralités</i>	92
5.2.2	<i>Echangeur 1-2</i>	92
5.2.3	<i>Echangeur 2-4</i>	92
5.2.4	<i>Echangeur à courants croisés</i>	93
5.2.5	<i>Echangeur à plaques</i>	94
5.2.6	<i>Echangeurs frigorifiques</i>	95
6	METROLOGIE THERMIQUE	99
6.1	METHODES DU PLAN CHAUD.....	99
6.1.1	<i>Principe de la mesure</i>	99
6.1.2	<i>Modélisation du plan chaud</i>	99
6.1.3	<i>Estimation des paramètres</i>	103
6.1.4	<i>Réalisation pratique de la mesure</i>	106
6.2	METHODE DU FIL CHAUD POUR LA MESURE DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE	106
6.2.1	<i>Principe de la mesure</i>	106
6.2.2	<i>Modélisation du fil chaud</i>	106
6.2.3	<i>Estimation des paramètres</i>	107
6.2.4	<i>Réalisation pratique de la mesure</i>	110
6.3	METHODE DU RUBAN CHAUD	110
6.3.1	<i>Principe de la mesure</i>	110
6.3.2	<i>Modélisation du ruban chaud</i>	111
6.3.3	<i>Estimation des paramètres</i>	113
6.3.4	<i>Réalisation pratique de la mesure</i>	115
BIBLIOGRAPHIE	116	
ANNEXES	117	
A.1.1 : PROPRIETES PHYSIQUES DE CERTAINS CORPS	118	
A.1.1 : PROPRIETES PHYSIQUES DE L'AIR ET DE L'EAU	119	
A.2.1 : VALEUR DU COEFFICIENT DE FORME DE CONDUCTION	120	
A.2.2 : PRINCIPALES TRANSFORMATIONS INTEGRALES : LAPLACE, FOURIER, HANKEL	121	
A.2.3 : TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE	123	
A.2.4 : CHOIX DES TRANSFORMATIONS INTEGRALES POUR DIFFERENTES CONFIGURATIONS.....	125	
A.2.5 : EQUATIONS ET FONCTIONS DE BESSSEL	127	

A.2.6. : VALEUR DE LA FONCTION ERF.....	129
A.2.7 : MILIEU SEMI-INFINI AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE.....	129
A.2.8 : PLAQUE AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE.....	130
A.2.9 : CYLINDRE INFINI AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE.....	131
A.2.10 : SPHERE AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE.....	132
A.2.11 : MATRICES QUADRIPOLAIRES POUR DIFFERENTES CONFIGURATIONS	133
A.2.12 : EFFICACITE DES AILETTES.....	135
A.3.1 : EMISSIVITE DE CERTAINS CORPS	136
A.3.2 : FRACTION D'ENERGIE $F_{0-\lambda T}$ RAYONNÉE PAR UN CORPS NOIR ENTRE 0 ET λ	137
A.3.3 : FACTEURS DE FORME GEOMETRIQUE DE RAYONNEMENT	138
A.3.4 : EPATTEURS DE GAZ EQUIVALENTES VIS-A-VIS DU RAYONNEMENT.....	140
A.4.1 : CORRELATIONS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT EN CONVECTION FORCEE.....	141
A.4.2 : CORRELATIONS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT EN CONVECTION NATURELLE	143
A.5.1 : ABAQUES $NUT = f(\eta)$ POUR LES ECHANGEURS.....	144
7 EXERCICES	145
TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION	145
TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT.....	147
TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION.....	148
LES ECHANGEURS DE CHALEUR	150

NOMENCLATURE

a	Diffusivité thermique
c	Capacité calorifique
D	Diamètre
e	Epaisseur
E	Effusivité thermique
f	Facteur de forme de rayonnement
g	Accélération de la pesanteur
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection
ΔH	Chaleur latente de changement de phase
J	Radiosité
L	Longueur, Luminance
\dot{m}	Débit massique
M	Emittance
NUT	Nombre d'unités de transfert
Q	Quantité de chaleur
q_c	Débit calorifique
r, R	Rayon
R_c	Résistance de contact
R_t	Résistance thermique
S	Surface
t	Temps
T	Température
u	Vitesse
V	Volume
x, y, z	Variables d'espace

Lettres grecques

α	Coefficient d'absorption du rayonnement
β	Coefficient de dilatation cubique
ε	Emissivité
ϕ	Densité de flux de chaleur
Φ	Transformée de Laplace du flux de chaleur
φ	Flux de chaleur
λ	Conductivité thermique, longueur d'onde
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
η	Rendement ou efficacité
Ω	Angle solide
ρ	Coefficient de réflexion du rayonnement
σ	Constante de Stephan-Boltzmann
τ	Coefficient de transmission du rayonnement
θ	Transformée de Laplace de la température

1. GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

1.1 *Introduction*

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

1.2 *Définitions*

1.2.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire.

1.2.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

$$\vec{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

Avec : \vec{n} vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$ dérivée de la température le long de la normale.

1.2.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (1.2)$$

où S est l'aire de la surface (m^2).

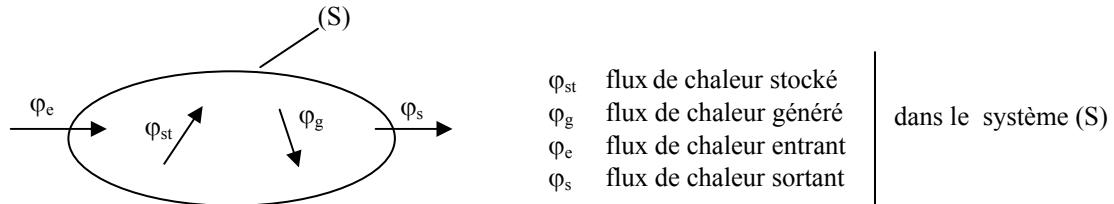
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{W}) \quad (1.3)$$

1.3 Formulation d'un problème de transfert de chaleur

1.3.1 Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (*S*) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :



On applique alors le 1^{er} principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \quad (W) \quad (1.4)$$

1.3.2 Expression des flux d'énergie

Il faut maintenant établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, nous obtiendrons l'équation différentielle dont la résolution permettra de connaître l'évolution de la température en chaque point du système.

1.3.2.1 Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

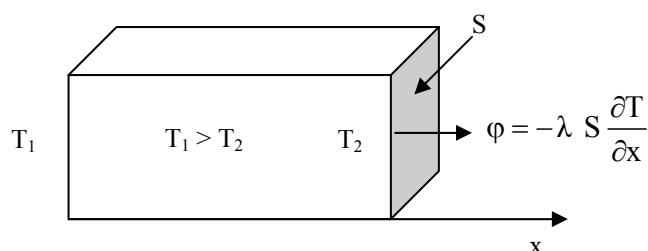
La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\text{grad}}(T) \quad (1.5)$$

ou sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (W) \quad (1.6)$$

avec :	ϕ	Flux de chaleur transmis par conduction	(W)
	λ	Conductivité thermique du milieu	(W m ⁻¹ °C ⁻¹)
	x	Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
	S	Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m ²)

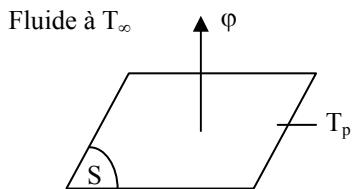


On trouvera dans le tableau ci-après les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants. Un tableau plus complet est donné en annexe A.1.1.

Matériau	λ (W m ⁻¹ °C ⁻¹)	Matériau	λ (W m ⁻¹ °C ⁻¹)
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Coton	0,059
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	14,9	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,027
Verre	0,78	Air	0,026

1.3.2.2 Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :



$$\boxed{\varphi = h S (T_p - T_\infty)} \quad (W) \quad (1.7)$$

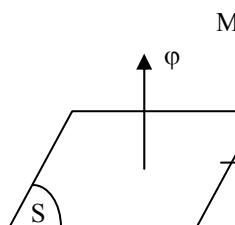
Avec :

φ	Flux de chaleur transmis par convection	(W)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	(W m ⁻² °C ⁻¹)
T_p	Température de surface du solide	(°C)
T_∞	Température du fluide loin de la surface du solide	(°C)
S	Aire de la surface de contact solide/fluide	(m ²)

Remarque : La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

1.3.2.3 Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :



$$\boxed{\varphi = \sigma \varepsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4)} \quad (W) \quad (1.8)$$

Avec :	φ	Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
	σ	Constante de Stephan	(5,67.10 ⁻⁸ W m ⁻² K ⁻⁴)
	ε_p	Facteur d'émission de la surface	(K)
	T_p	Température de la surface	(K)
	T_∞	Température du milieu environnant la surface	(K)
	S	Aire de la surface	(m ²)

1.3.2.4 Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante) :

$$\boxed{\varphi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (W) \quad (1.9)$$

Avec :	φ_{st}	Flux de chaleur stocké	(W)
	ρ	Masse volumique	(kg m ⁻³)
	V	Volume	(m ³)
	c	Chaleur massique	(J kg ⁻¹ °C ⁻¹)
	T	Température	(°C)
	t	Temps	(s)

ρ , V et c sont supposés constants, le produit $\rho V c$ est appelé la capacitance thermique du corps.

1.3.2.5 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

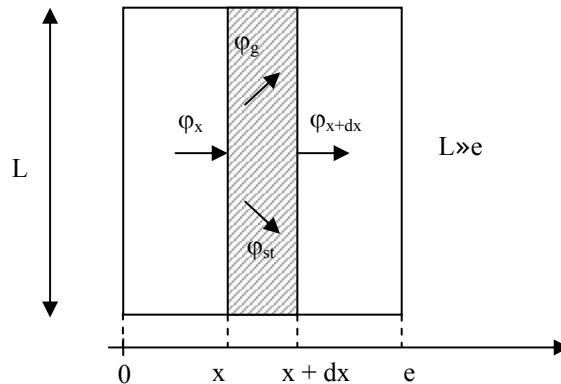
$$\boxed{\dot{\varphi}_g = \dot{q} V} \quad (W) \quad (1.10)$$

Avec :	$\dot{\varphi}_g$	Flux d'énergie thermique générée	(W)
	\dot{q}	Densité volumique d'énergie générée	(W m ⁻³)
	V	Volume	(m ³)

2 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

2.1 L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :



Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st}$$

Avec : $\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx$$

$$\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

soit : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$

et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T .

Les hypothèses a) + b) +c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.3)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t , l'équation (2.4) peut s'écrire sous forme simplifiée : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.5)$$

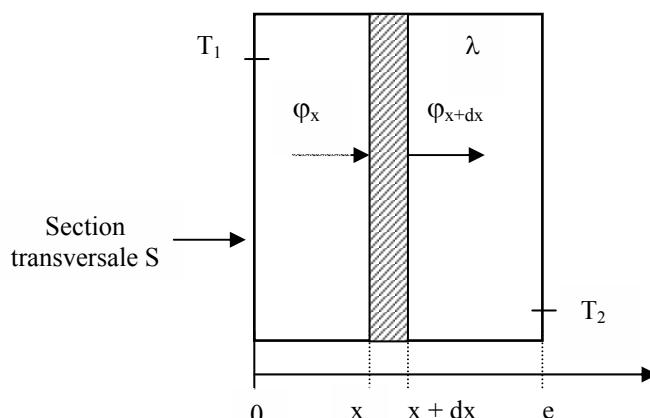
2.2 Conduction en régime permanent

2.2.1 Transfert unidirectionnel

2.2.1.1 Mur simple

On se placera dans le cas où l'écoulement est unidirectionnel et qu'il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e , de conductivité thermique λ , et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$ il vient :

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx}$$

$$\text{d'où } \frac{dT}{dx} = A \text{ et } T(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux limites : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=e) = T_2$

d'où :

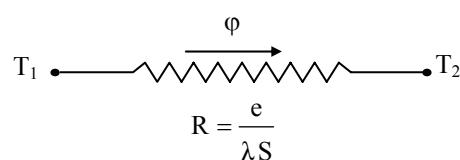
$$T = T_1 - \frac{x}{e} (T_1 - T_2) \quad (\text{°C}) \quad (2.6)$$

Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation : $\phi = -\lambda \frac{dT}{dx}$, d'où :

$$\phi = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{e} \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (2.7)$$

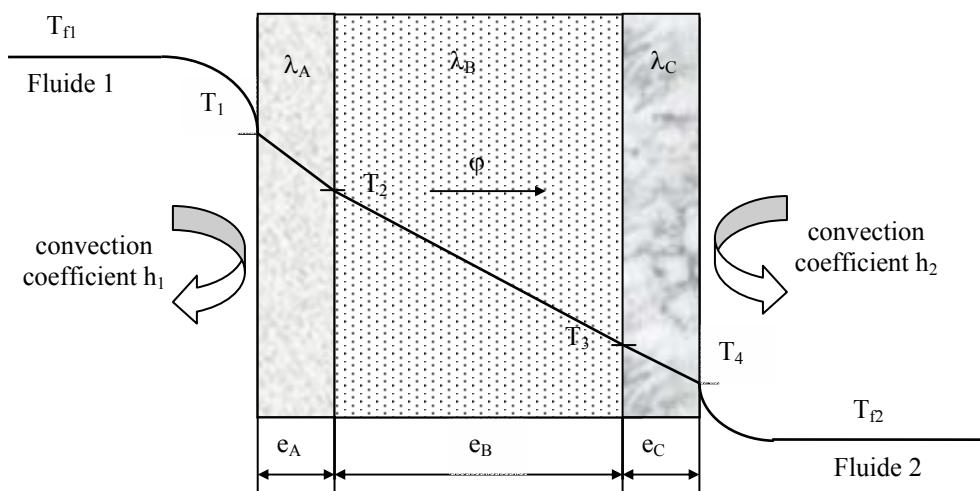
La relation (2.7) peut également se mettre sous la forme : $\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}}$, cette relation est analogue à la loi

d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S , on a donc le schéma équivalent suivant :



2.2.1.2 Mur multicouches

C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{fl} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S :



En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\varphi = h_1 S (T_{fl} - T_1) = \frac{\lambda_A S (T_1 - T_2)}{e_A} = \frac{\lambda_B S (T_2 - T_3)}{e_B} = \frac{\lambda_C S (T_3 - T_4)}{e_C} = h_2 S (T_4 - T_{f2})$$

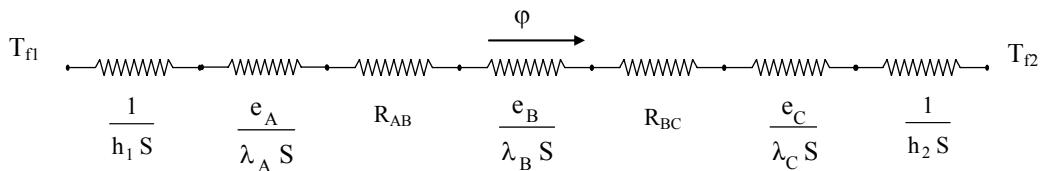
d'où :

$$\varphi = \frac{T_{fl} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (2.8)$$

Nous avons considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existe pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une micro-couche d'air existe entre les creux des surfaces en regard et crée une résistance thermique R (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact. La formule précédente s'écrit alors :

$$\varphi = \frac{T_{fl} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + R_{AB} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + R_{BC} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (2.9)$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant :

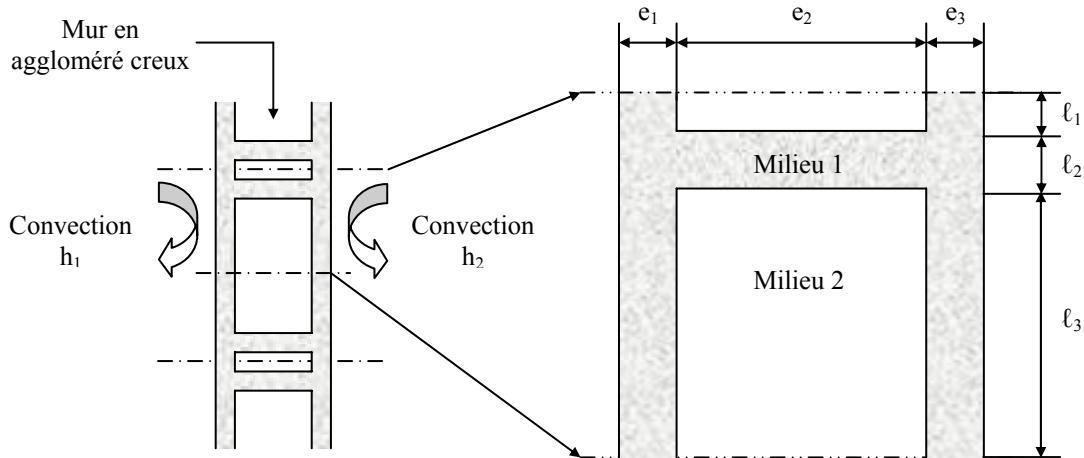


Remarques :

- Une résistance thermique ne peut être définie qu'entre deux surfaces isothermes.
- Cette résistance thermique de contact est négligée si le mur comporte une paroi isolante ou si les parois sont jointes par soudure.

2.2.1.3 Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas isotropes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux :



En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente

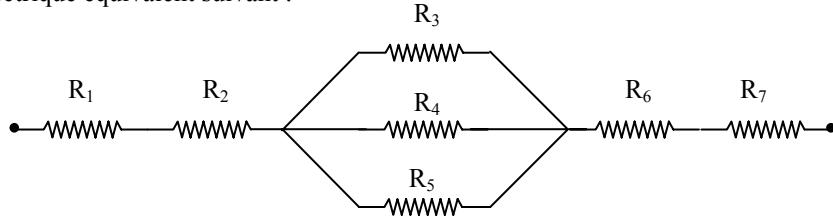
d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \ell L}; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \ell L}; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_1 L}; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \ell_2 L}; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_3 L}; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \ell L}; R_7 = \frac{1}{h_2 \ell L}$$

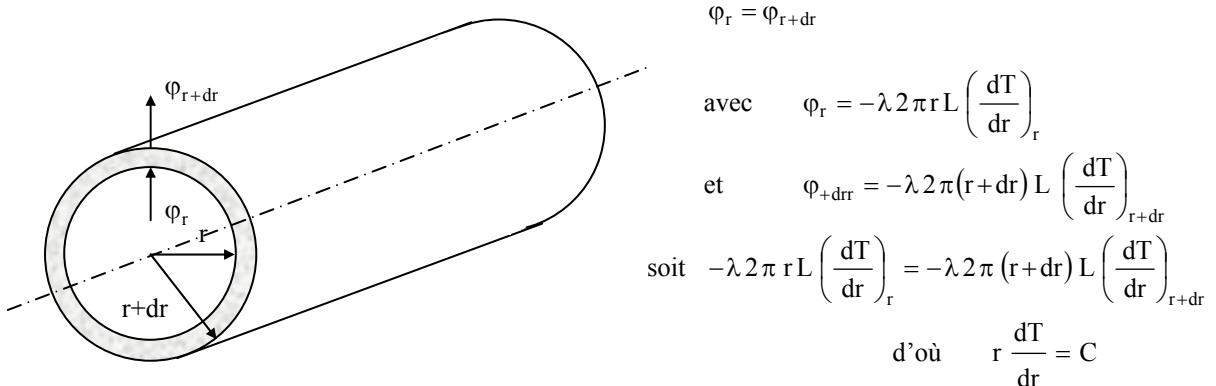
selon le schéma électrique équivalent suivant :



2.2.1.4 Cylindre creux long (tube)

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ , de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , de longueur L , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 . On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et $r + dr$:



Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

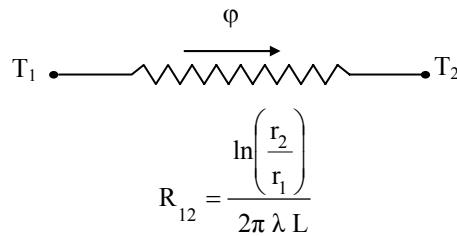
D'où :

$$T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{°C}) \quad (2.10)$$

Et par application de la relation $\varphi = -\lambda 2\pi r \frac{dT}{dr}$, on obtient :

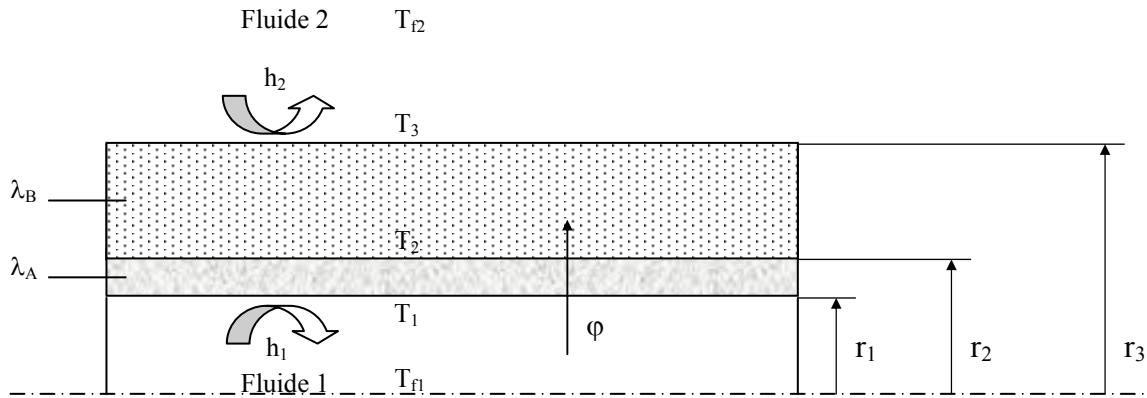
$$\varphi = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{W}) \quad (2.11)$$

Cette relation peut aussi être mise sous la forme : $\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{12}}$ avec $R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda L}$ et être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



2.2.1.5 Cylindre creux multicouches

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où le ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes :



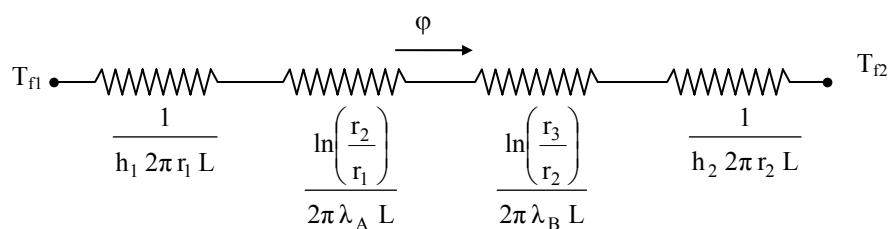
En régime permanent, le flux de chaleur φ se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\varphi = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi \lambda_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \lambda_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L (T_3 - T_{f2})$$

d'où :

$$\boxed{\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}}} \quad (2.12)$$

ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :



2.2.2 Transfert multidirectionnel

Dans le cas où la propagation de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, deux méthodes de résolution peuvent être appliquées :

2.2.2.1 Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bi- ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

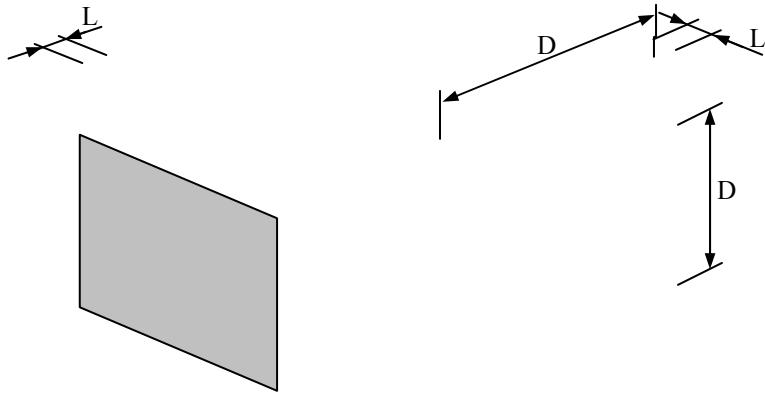
$$\boxed{\varphi = \lambda F (T_1 - T_2)} \quad (W) \quad (2.13)$$

Avec :	λ	Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2	$(W m^{-1} ^\circ C^{-1})$
	T_1	Température de la surface S_1	$(^\circ C)$
	T_2	Température de la surface S_2	$(^\circ C)$
	F	Coefficient de forme	(m)

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 . Les valeurs de F pour les configurations les plus courantes sont présentées en annexe A.2.1.

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée...)

Méthode : on découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux :



Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante) nous avons les relations :

$$\begin{aligned} F_{\text{paroi } i} &= S_i/D_i \\ F_{\text{bord } i} &= 0,54 D_i \\ F_{\text{coin } i} &= 0,15 L_i \end{aligned}$$

Avec : S_i : Aire de la paroi i
 D_i : Longueur de la paroi ou du bord i
 L_i : Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{\text{paroi}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{\text{bord}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{\text{coin}_i} \Delta T_i$$

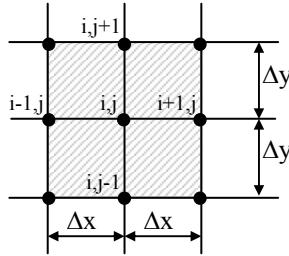
Avec : λ_i : Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche) de la paroi i $(W m^{-1} ^\circ C^{-1})$
 ΔT_i : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i $(^\circ C)$

2.2.2.2 Méthodes numériques

Expression de l'équation de Laplace en différences finies

Dans le cas où la méthode du coefficient de forme ne peut pas s'appliquer (surfaces non isothermes par exemple), il faut résoudre l'équation de Laplace numériquement. On utilise une méthode aux différences finies en discrétilisant le domaine considéré (espace ou plan). Nous traiterons dans ce qui suit le cas bidimensionnel, le cas tridimensionnel s'en déduit en rajoutant simplement une dimension d'espace.

Considérons un milieu plan sur lequel on a appliqué un maillage de pas Δx et Δy tel que représenté sur la figure ci-après :



Les dérivées partielles de la température T peuvent s'exprimer selon les formules suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \approx \frac{T(i+1, j)-T(i, j)}{\Delta x} ; \quad \frac{\partial T}{\partial x}\left(i-\frac{1}{2}, j\right) \approx \frac{T(i, j)-T(i-1, j)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \approx \frac{T(i, j+1)-T(i, j)}{\Delta y} ; \quad \frac{\partial T}{\partial x}\left(i, j-\frac{1}{2}\right) \approx \frac{T(i, j)-T(i, j-1)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)-\frac{\partial T}{\partial x}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} = \frac{T(i+1, j)+T(i-1, j)-2T(i, j)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(i, j) \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial y}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} = \frac{T(i, j+1)+T(i, j-1)-2T(i, j)}{(\Delta y)^2}$$

L'équation de Laplace en bidimensionnel : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ s'écrit alors :

$$\frac{T(i+1, j)+T(i-1, j)-2T(i, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{T(i, j+1)+T(i, j-1)-2T(i, j)}{(\Delta y)^2} = 0$$

Et si l'on choisit $\Delta x = \Delta y$, on obtient :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j)+T(i+1, j)+T(i, j-1)+T(i, j+1)}{4}$$

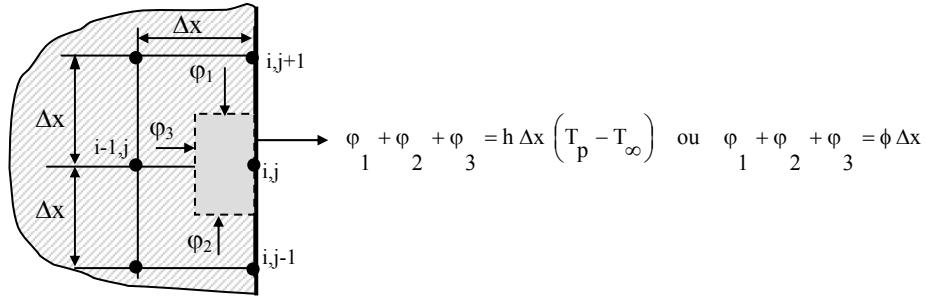
(2.14)

Expression des conditions aux limites en différences finies

Les conditions aux limites imposant sur un bord une température de surface s'expriment simplement en fixant la valeur de la température $T(i,j)$ à la valeur imposée pour tout couple (i,j) représentant un point de ce bord.

Les conditions aux limites avec transfert convectif ou flux imposé s'expriment de la manière suivante :

Bord rectiligne



Un bilan thermique appliqué à la surface grise (rectangle de côtés $\Delta x/2$ et Δx) conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

Flux linéique imposé ϕ (en W.m^{-1}) :

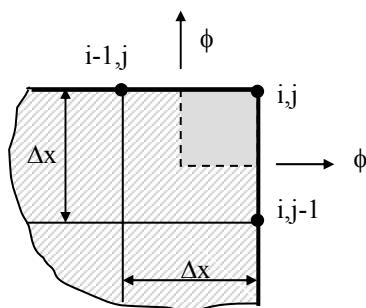
$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1)}{2} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

Coefficient de convection imposé :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1)}{2} + Bi T_\infty$$

où $Bi = \frac{h \Delta x}{\lambda}$ est le nombre de Biot

Coin extérieur



Un bilan thermique appliqué à la surface grise conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

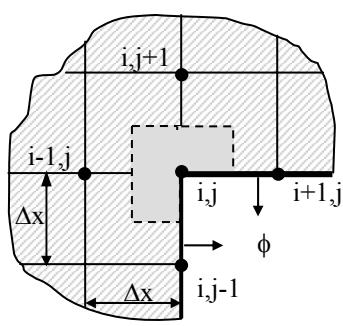
Flux linéique imposé ϕ (en W.m^{-1}) :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j-1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

Coefficient de convection imposé :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j-1)}{2} + Bi T_\infty$$

Coin intérieur



Un bilan thermique appliqué à la surface grise conduit au résultat suivant compte-tenu des formules établies précédemment :

Flux linéique imposé ϕ (en W.m^{-1}) :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1)}{4} - \frac{\phi}{2\lambda}$$

Coefficient de convection imposé :

$$T(i, j) = \frac{T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i+1, j) + T(i, j-1)}{2} + Bi T_\infty$$

Méthode de résolution numérique

Soit à résoudre l'équation de Laplace sur un domaine plan (D) limité par un contour (C).

On réalise un maillage du système avec un pas Δx en général identique dans les deux directions du plan.

On affecte à chaque point du domaine (D) une valeur initiale de la température :

- Égale à la température imposée sur les points du contour où la condition limite impose une température.

- Arbitraire ailleurs mais la plus « réaliste » possible.

La résolution s'effectue par la méthode itérative de Gauss-Siedel. On effectue des itérations successives consistant à remplacer la valeur de la température en chaque nœud du maillage par la valeur calculée par l'équation aux différences finies qui lui est associée. Une itération consiste à effectuer un balayage complet de tous les noeuds, ligne après ligne et de gauche à droite pour chaque ligne par exemple. Les valeurs recalculées sont immédiatement prises en compte pour le calcul de la valeur de la température T aux points d'ordre supérieurs (points situés à droite et en-dessous dans le mode de balayage proposé).

Critère de convergence :

On peut par exemple arrêter le calcul dès que la variation la plus grande de $T(i,j)$ au cours d'une itération reste inférieure à une valeur ϵ donnée.

Remarques :

- On n'applique aucun calcul sur les points du contour où la température est imposée.
- La valeur de la température sera rangée dans un tableau $T(i,j)$, on pourra utiliser un autre tableau $L(i,j)$ dont les valeurs indiqueront si le point de coordonnées $(i\Delta x, j\Delta y)$ appartient au domaine (D) et le type d'équation aux différences finies qui s'y applique.
- On peut accélérer la convergence en appliquant un coefficient de surrelaxation R ($1 < R < 2$, optimum proche de 1,7) au calcul de $T(i,j)$ de la manière suivante (si on applique l'ordre de balayage proposé):

$$T_{n+1}(i,j) = (1-R)T_n(i,j) + R \frac{T_{n+1}(i-1,j) + T_n(i+1,j) + T_{n+1}(i,j-1) + T_n(i,j+1)}{4}$$

- On peut noter que la discrétisation décrite ici revient très exactement à simuler un milieu bidimensionnel conducteur de l'électricité par un réseau de résistances reliant chaque nœud à ses voisins.

2.3 Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état

2.3.1 Milieu à température uniforme

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est a priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser. Considérons par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et $t + dt$:

$$-hS(T - T_0) = \rho c V \frac{dT}{dt} \quad \text{soit : } \frac{dT}{T - T_0} = -\frac{hS}{\rho c V} dt$$

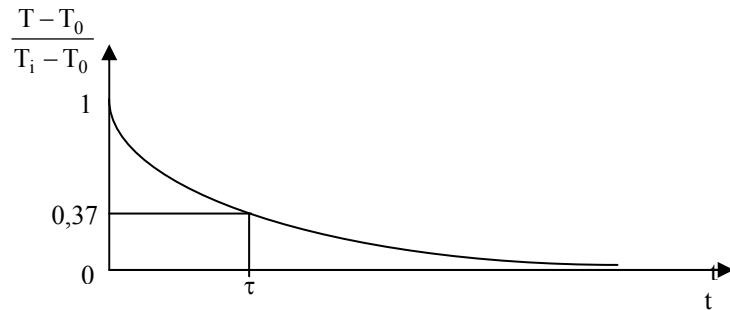
d'où :

$$\boxed{\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho c V} t\right)} \quad (2.15)$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho c V}{h S}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\boxed{\tau = \frac{\rho c V}{h S}} \quad (2.16)$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet : $\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec :



Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, on verra que deux nombres adimensionnels sont particulièrement importants en régime variable :

- Le nombre de Biot : $Bi = \text{nombre de Biot} = \frac{\text{Résistance thermique interne}}{\text{Résistance thermique externe}} = \frac{\frac{\ell}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}}$, ℓ est la dimension caractéristique du milieu, $\ell = r$ pour une sphère.

Soit :

$$Bi = \frac{h \ell}{\lambda} \quad (2.17)$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque $Bi < 0,1$.

- Le nombre de Fourier :

$$Fo = \frac{a t}{\ell^2} \quad (2.18)$$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-Bi Fo) \quad (2.19)$$

La connaissance des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère. On considère généralement qu'un système tel que $Bi < 0,1$ peut être considéré comme étant à température uniforme, le critère $Bi < 0,1$ est appelé le critère d'accommodation thermique.

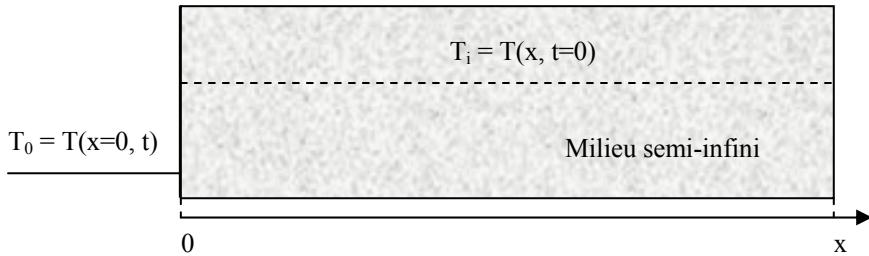
2.3.2 Milieu semi-infini

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face (vrai tout le temps que la température de l'autre face n'a pas varié).

2.3.2.1 Température constante imposée en surface

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i . On impose brutalement la température T_0 sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet :



L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ (a)

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(x=0, t) = T_0 & (c) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_i & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$

d'où : $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial T}{\partial t}$

L'équation (a) peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :
$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(x = 0, t) = 1 & (b) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

La transformée de Laplace (cf. annexe A.2.2 sur les transformations intégrales) de $\bar{T}(x, t)$ par rapport au

temps s'écrit : $\theta(x, p) = L\{\bar{T}(t)\} = \int_0^\infty \exp(-pt) \bar{T}(x, t) dt$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0$ avec $\bar{T}(x, 0) = 0$

Cette équation est donc de la forme : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0$ avec $q^2 = \frac{p}{a}$

D'où : $\theta(x, p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B = 0, nous en déduisons que $\theta(x, p) = A e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation (c) conduit à : $\theta(0, p) = \frac{1}{p}$ d'où $A = \frac{1}{p}$ et $\theta = \frac{e^{-qx}}{p}$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.2.3 conduit au résultat suivant :

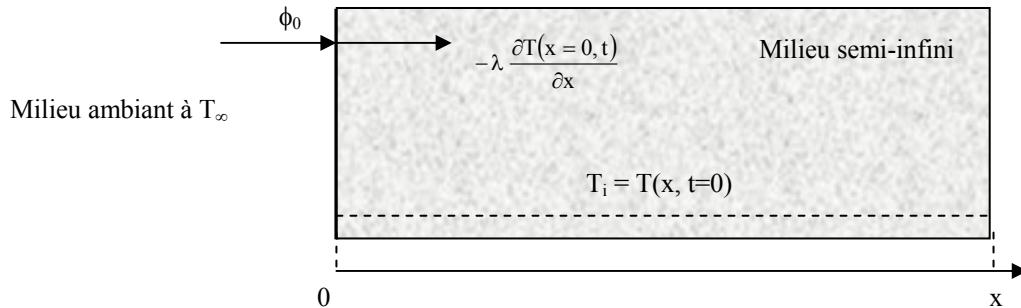
$$\boxed{\frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)} \quad (2.20)$$

Avec : $\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \exp(-u^2) du$, la fonction erf est aussi appelée la fonction erreur (valeurs tabulées en annexe A.2.6)

2.3.2.2 Flux imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini, cette condition limite est appelée condition de Neumann.



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(\infty, t) = T_i & (c) \\ -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \phi_0 & (d) \end{cases}$$

Cette dernière condition traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la surface du milieu semi-infini.

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{L'équation (a) peut alors s'écrire : } \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

$$\text{Et les conditions aux limites deviennent} \quad \begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 & (c) \\ -\lambda \frac{\partial \bar{T}(0, t)}{\partial x} = \phi_0 & (d) \end{cases}$$

$$\text{La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : } \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x, 0) = 0$$

D'où : $\theta(x, p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$, la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc $B = 0$, et nous en déduisons que $\theta(x, p) = A e^{-qx}$

$$\text{La transformée de Laplace de l'équation (d) s'écrit : } \frac{\phi_0}{p} = -\lambda \frac{d\theta}{dx}(x=0)$$

$$\text{d'où : } A = \frac{\phi_0}{\lambda p q} \quad \text{et} \quad \theta(x, p) = \frac{\phi_0}{\lambda} \frac{e^{-qx}}{p q}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.2.3 conduit au résultat suivant :

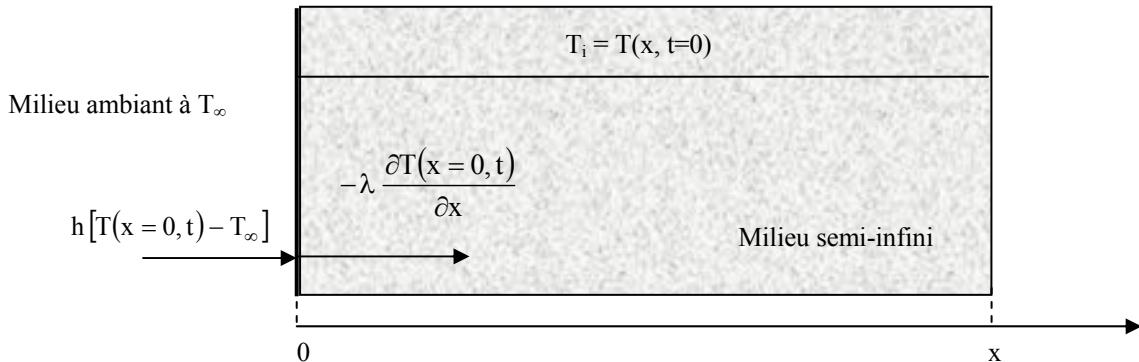
$$\bar{T}(x, t) = T(x, t) - T_i = \frac{2 \phi_0}{\lambda} \sqrt{a t} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2 \sqrt{a t}}\right) \quad (\text{°C}) \quad (2.21)$$

Avec : $\text{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u [1 - \text{erf}(u)]$, cette fonction est tabulée en annexe A.2.6.

2.3.2.3 Coefficient de transfert imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton :



L'équation de la chaleur s'écrit :
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(\infty, t) = T_i & (c) \\ -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h[T(x = 0, t) - T_\infty] & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

d'où : $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$

L'équation (a) peut alors s'écrire :
$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Les conditions aux limites deviennent :
$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 & (c) \\ -\lambda \frac{\partial \bar{T}(0, t)}{\partial x} = h[\bar{T}(x = 0, t) - (T_\infty - T_i)] & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à :
$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x, 0) = 0$$

D'où : $\theta(x, p) = A e^{-qx} + B e^{+qx}$

La température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc $B = 0$ et $\theta(x, p) = A e^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation (d) s'écrit :
$$-\lambda \frac{d\theta}{dx}(0, p) = h\theta(0, p) + \frac{h(T_i - T_\infty)}{p}$$

$$\text{Soit : } \lambda A q = h A + \frac{h(T_i - T_\infty)}{p} \text{ d'où : } A = \frac{\frac{h}{\lambda}(T_i - T_\infty)}{p\left(-\frac{h}{\lambda} + q\right)} \text{ et } \theta(x, p) = \ell(T_i - T_\infty) \frac{e^{-qx}}{p(q - \ell)} \text{ où } \ell = \frac{h}{\lambda}$$

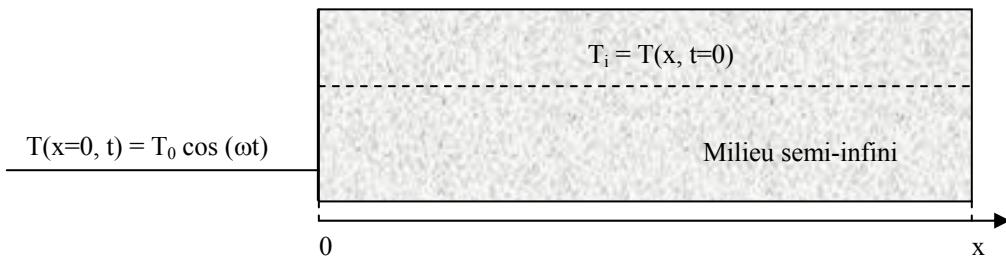
L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.2.3 conduit au résultat suivant :

$$\boxed{\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp\left(-\frac{hx}{\lambda} + \frac{ah^2 t}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - \frac{h\sqrt{at}}{\lambda}\right)} \quad (2.22)$$

Pour un calcul approché, on trouvera en annexe A.2.7 une abaque représentant graphiquement cette formule.

2.3.2.4 Température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique établi

Méthode : Décomposition en produit de fonctions et recherche d'une solution de même fréquence que l'excitation



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0, t) = T_0 \cos(\omega t) \\ T(\infty, t) = T_i \end{cases} \quad (b) \quad (c)$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{L'équation (a) peut alors s'écrire : } \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $\bar{T}(x, t) = X(x)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y = \frac{1}{a} XY' \quad \text{ou : } a \frac{X''}{X} = \frac{Y'}{Y} = C$$

L'excitation (température imposée) étant de nature périodique, on recherche une solution périodique de même fréquence que l'excitation en posant : $C = i\omega$.

On obtient :

$$\begin{aligned} Y(t) &= A e^{i\omega t} \\ X(x) &= B e^{-\sqrt{\frac{C}{a}}x} \end{aligned}$$

car $X(x)$ doit tendre vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

$$\text{Or : } \sqrt{C} = \sqrt{i\omega} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}(1+i) \quad \text{d'où :} \quad T(x, t) = \operatorname{Re}[X(x)Y(t)] = \operatorname{Re}\left[A B e^{i\omega t} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)x}\right]$$

$$(b) \Rightarrow T(0, t) = T_0 \cos(\omega t) = A B \cos(\omega t) \quad \text{d'où : } A B = T_0$$

$$\text{On en déduit : } T(x, t) = T_0 e^{i\omega t} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)x} = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \left[\cos(\omega t) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) + \sin(\omega t) \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right) \right]$$

Soit finalement :

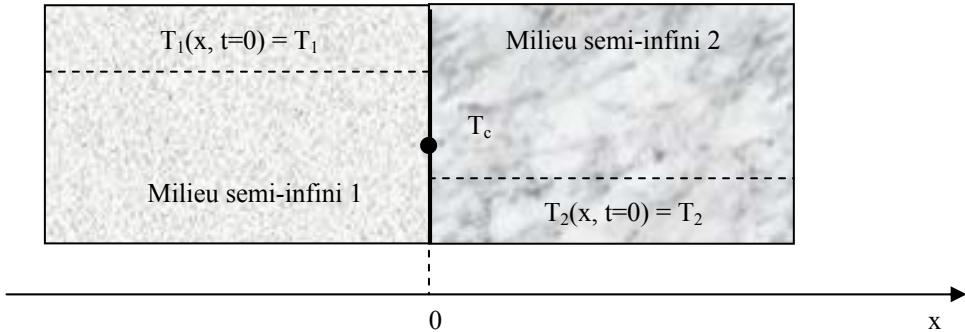
$$T(x, t) = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{2a}x\right) \quad (2.23)$$

Remarques :

- L'amplitude des oscillations décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'interface.
- L'amplitude des oscillations décroît également rapidement quand la fréquence de l'excitation augmente : une excitation de fréquence élevée appliquée à la surface d'un solide ne modifiera sa température que sur une faible profondeur.
- Entre les températures T_1 et T_2 de 2 points distants respectivement de x_1 et x_2 de la surface, il existe un déphasage égal à $\frac{\omega}{2a}(x_1 - x_2)$. La connaissance de ω et la mesure de la température au sein du milieu en deux points situés à des distances connues x_1 et x_2 de la surface peut permettre d'évaluer la diffusivité thermique a .

2.3.2.5 Contact brusque entre deux milieux semi-infinis

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.



Considérons deux milieux semi-infinis initialement à deux températures uniformes différentes T_{i1} et T_{i2} . A l'instant initial, on place les deux milieux en contact et l'on recherche l'évolution de la température au sein des deux milieux.

L'équation de la chaleur s'écrit pour chacun des deux milieux :

$$\frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, t)}{\partial x^2} \quad (a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, t)}{\partial x^2} \quad (b)$$

L'origine des abscisses est prise au point de contact entre les deux milieux. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T_1(x, 0) = T_{i1} & (c) \\ T_2(x, 0) = T_{i2} & (d) \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial x} & (e) \\ T_1(0, t) = T_2(0, t) & (f) \end{cases}$$

On effectue les changements de variable suivants : $\bar{T}_1 = T_1 - T_{i1}$ et $\bar{T}_2 = T_2 - T_{i2}$

Les équations (a) et (b) peuvent alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}_i(x, 0) = 0 & i = 1, 2 \\ \bar{T}_i(\infty, t) = 0 & i = 1, 2 \\ \lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1(0, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \bar{T}_2(0, t)}{\partial x} \\ \bar{T}_1(0, t) = \bar{T}_2(0, t) + T_{i2} - T_{il} \end{cases}$$

(c) (d) (e) (f)

Les transformées de Laplace des équations (a) et (b) conduisent comme dans les cas précédents à des solutions du type : $\theta_1(x, p) = A_1 e^{-q_1 x} + B_1 e^{+q_1 x}$ et $\theta_2(x, p) = A_2 e^{-q_2 x} + B_2 e^{+q_2 x}$

La température garde une valeur finie quand x tend vers $\pm \infty$ donc $A_1 = 0$ et $B_2 = 0$, nous en déduisons que :

$$\theta_1(x, p) = B_1 e^{q_1 x} \quad \text{et} \quad \theta_2(x, p) = A_2 e^{-q_2 x}$$

Les transformées de Laplace des équations (e) et (f) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} B_1 \lambda_1 q_1 = -A_2 \lambda_2 q_2 & (e) \\ B_1 = A_2 + \frac{T_{i2} - T_{il}}{p} & (f) \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire permet de calculer les valeurs de B_1 et de A_2 :

$$B_1 = \frac{E_2}{E_1 + E_2} (T_{i2} - T_{il}) \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{E_1}{E_1 + E_2} (T_{il} - T_{i2}) \frac{1}{p}$$

où $E_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$ est l'effusivité thermique du milieu i .

On en déduit les valeurs de θ_1 et de θ_2 :

$$\theta_1(x, p) = \frac{E_2 (T_{i2} - T_{il})}{(E_1 + E_2)p} e^{q_1 x} \quad \text{et} \quad \theta_2(x, p) = \frac{E_1 (T_{il} - T_{i2})}{(E_1 + E_2)p} e^{-q_2 x}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.2.3 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T_1(x, t) - T_{il}}{T_{i2} - T_{il}} = \frac{E_2}{E_1 + E_2} \operatorname{erf}\left(\frac{|x|}{2 \sqrt{a_1 t}}\right)$$

$$\frac{T_2(x, t) - T_{i2}}{T_{il} - T_{i2}} = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2 \sqrt{a_2 t}}\right)$$

(2.24)

Propriété de la température de contact T_c :

Elle se calcule par : $T_c(t) = T_1(0, t) = T_2(0, t)$

d'où :

$$T_c = \frac{E_1 T_{il} + E_2 T_{i2}}{E_1 + E_2}$$

(°C) (2.25)

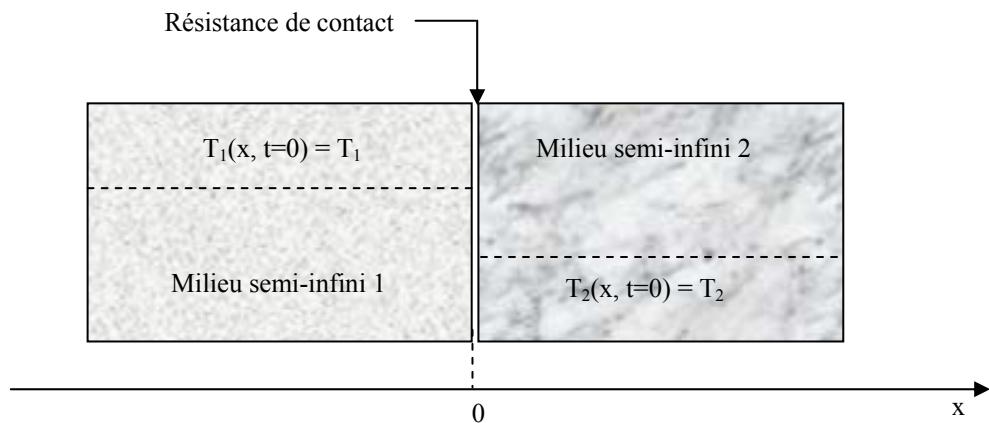
On remarque que la température de contact entre les deux milieux reste constante pendant toute la durée du transfert de chaleur. C'est le milieu qui a la plus grande effusivité thermique qui impose la température de contact.

Application : Sensation thermique lors du contact de la peau avec un métal ou un isolant, choix de matériaux améliorant le confort thermique.

2.3.2.6 Contact brusque entre deux milieux semi-infinis avec résistance de contact

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons deux milieux semi-infinis initialement à deux températures uniformes différentes T_{i1} et T_{i2} . A l'instant initial, on place les deux milieux en contact et l'on recherche l'évolution de la température au sein des deux milieux. Le contact entre les deux milieux est imparfait et l'on doit tenir compte d'une résistance de contact



$$R_c = 1/h \text{ } (\text{°C.W}^{-1}.\text{m}^{-2}) \text{ à l'interface.}$$

L'équation de la chaleur s'écrit pour chacun des deux milieux :

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} \quad (a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2} \quad (b)$$

L'origine des abscisses est prise au point de contact entre les deux milieux. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x} & (c) \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = h [T_1(0,t) - T_2(0,t)] & (d) \end{cases}$$

On effectue les changements de variable suivants : $\bar{T}_1 = T_1 - T_{i1}$ et $\bar{T}_2 = T_2 - T_{i2}$

$$\text{Les équations (a) et (b) peuvent alors s'écrire : } \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t}$$

$$\text{Et les conditions aux limites deviennent : } \begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1(0,t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \bar{T}_2(0,t)}{\partial x} & (c) \\ -\lambda_1 \frac{\partial \bar{T}_1(0,t)}{\partial x} = h [\bar{T}_1(0,t) - \bar{T}_2(0,t)] + T_{i1} - T_{i2} & (d) \end{cases}$$

Les transformées de Laplace des équations (a) et (b) conduisent comme dans le cas précédent à des solutions du type : $\theta_1(x,p) = A_1 e^{+q_1 x}$ et $\theta_2(x,p) = A_2 e^{-q_2 x}$

Les transformées de Laplace des équations (c) et (d) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} A_1 \lambda_1 q_1 = -A_2 \lambda_2 q_2 & (c) \\ -A_1 \lambda_1 q_1 = h(A_1 - A_2) + \frac{h(T_{i2} - T_{il})}{p} & (d) \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire permet d'établir l'expression de A_1 et de A_2 :

$$A_1 = \frac{\frac{h}{\lambda_1}(T_{i2} - T_{il})}{\frac{h}{\lambda_1}\left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right) + q_1} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{\frac{h}{\lambda_2}(T_{i2} - T_{il})}{\frac{h}{\lambda_2}\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) + q_1} \frac{1}{p}$$

Nous en déduisons :

$$\theta_1(x, p) = c_1 \frac{e^{q_1 x}}{p(q_1 + b_1)} \quad \text{avec} \quad c_1 = \frac{h}{\lambda_1} (T_{i2} - T_{il}) \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{h}{\lambda_1} \left(1 + \frac{E_1}{E_2}\right)$$

$$\theta_2(x, p) = c_2 \frac{e^{-q_2 x}}{p(q_2 + b_2)} \quad \text{avec} \quad c_2 = \frac{h}{\lambda_2} (T_{il} - T_{i2}) \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{h}{\lambda_2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.2.3 conduit au résultat suivant :

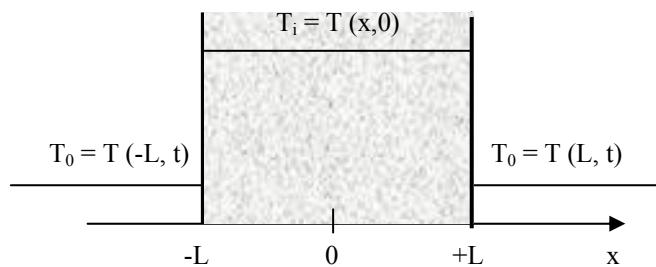
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{T_1(x, t) - T_{il}}{T_{i2} - T_{il}} &= \frac{E_2}{E_2 - E_1} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) - \exp(b_1 x + a_1 b_1^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} + b_1 \sqrt{a_1 t}\right) \right] \\ \frac{T_2(x, t) - T_{i2}}{T_{il} - T_{i2}} &= \frac{E_1}{E_2 - E_1} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \exp(b_2 x + a_2 b_2^2 t) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} + b_2 \sqrt{a_2 t}\right) \right] \end{aligned}} \quad (2.26)$$

2.3.3 Transfert unidirectionnel dans des milieux limités : plaque, cylindre, sphère

2.3.3.1 Plaque infinie

Nous allons traiter dans ce qui suit le cas d'une plaque d'épaisseur $2L$ et de dimensions latérales suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer que le transfert de chaleur est unidirectionnel. L'étude de ce cas permettra d'illustrer les différentes méthodes utilisées pour résoudre l'équation de la chaleur monodimensionnelle en régime variable.

1er cas : Plaque avec température constante imposée en surface



1^{ère} méthode : Transformée de Laplace, développement en série et inversion terme à terme par les tables.

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ T(L, t) = T(-L, t) = T_0 & (c) \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

$$\text{d'où : } \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

L'équation (a) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(x = L, t) = \bar{T}(x = -L, t) = T_0 - T_i & (c) \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(0, t) = 0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $\bar{T}(x, t)$ par rapport au temps s'écrit : $\theta(x, p) = L\{\bar{T}(t)\} = \int_0^\infty \exp(-pt) \bar{T}(x, t) dt$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p \theta - \bar{T}(x, 0)] = 0$ avec $\bar{T}(x, 0) = 0$

Cette équation est donc de la forme : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0$ avec $q^2 = \frac{p}{a}$

D'où : $\theta(x, p) = A \operatorname{ch}(qx) + B \operatorname{sh}(qx)$

La transformée de Laplace de l'équation (d) conduit à : $\lambda \frac{d\theta}{dx}(x = 0) = 0$ d'où $B = 0$ et $\theta = A \operatorname{ch}(qx)$

La transformée de Laplace de l'équation (c) conduit à : $\theta(L, p) = \frac{T_0 - T_i}{p}$ d'où $A = \frac{T_0 - T_i}{p \operatorname{ch}(qL)}$

$$\text{et } \theta(x, p) = \frac{(T_0 - T_i) \operatorname{ch}(qx)}{p \operatorname{ch}(qL)} = \frac{\Delta T \operatorname{ch}(qx)}{p \operatorname{ch}(qL)}$$

Nous pouvons utiliser un développement en série de $\frac{1}{1 + e^{-2qL}}$ pour écrire $\theta(x, p)$ sous la forme :

$$\theta(x, p) = \frac{\Delta T}{p} \frac{e^{qx} + e^{-qx}}{e^{qL} (1 + e^{-2qL})} = \frac{\Delta T}{p} [e^{-q(L-x)} + e^{-q(L+x)}] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nqL}$$

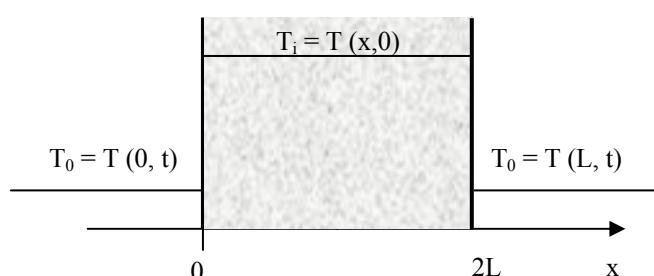
$$\theta(x, p) = \frac{\Delta T}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-q[(2n+1)L-x]} + \frac{\Delta T}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-q[(2n+1)L+x]}$$

La transformation inverse de Laplace terme à terme (propriété de linéarité) conduit à :

$$T = T_i + (T_0 - T_i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)L - x}{2\sqrt{at}} \right] + (T_0 - T_i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)L + x}{2\sqrt{at}} \right] \quad (2.27)$$

Cette solution converge rapidement pour les faibles valeurs de t .

2^{ème} méthode : Décomposition de la température en un produit de fonctions et superposition des solutions.



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ T(0, t) = T(2L, t) = T_0 \end{cases} \quad (b) \quad (c)$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_0$

L'équation (a) peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = T_i - T_0 \\ \bar{T}(x = 0, t) = \bar{T}(x = 2L, t) = 0 \end{cases} \quad (b) \quad (c)$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x, t) = X(x)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y = \frac{1}{a} XY' \quad \text{ou : } \frac{X''}{X} = \frac{1}{a} \frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

où ω est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. Nous en déduisons :

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \\ Y' + a \omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = C e^{-a\omega^2 t} \end{cases}$$

$$\text{et } \bar{T}(x, t) = C e^{-a\omega^2 t} [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)]$$

La condition limite $\bar{T}(0, t) = 0$ s'écrit alors : $C A = 0$ d'où $A = 0$ car $C = 0$ conduirait à une fonction nulle.

La condition limite $\bar{T}(2L, t) = 0$ s'écrit alors :

$$C e^{-a\omega^2 t} B \sin(\omega x) = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega = (2n+1) \frac{\pi}{2L} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale de (a) sous la forme :

$$\bar{T}(x, t) = e^{-a\omega^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2L} x\right]$$

La condition limite $\bar{T}(x, 0) = T_i - T_0$ peut s'écrire :

$$\bar{T}(x, 0) = T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2L} x\right]$$

Une fonction f définie sur $[0, \ell]$ peut s'écrire sous forme d'une série de Fourier en sinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

Nous pouvons effectuer un développement en série de Fourier en sinus de $f(x) = (T_i - T_0)$ sur l'intervalle $[0, 2L]$:

$$T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L} \left[\int_0^{2L} (T_i - T_0) \sin\left(\frac{n\pi u}{2L}\right) du \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L} (T_i - T_0) \frac{-2L}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi u}{2L}\right) \right]_0^{2L} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$T_i - T_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(T_i - T_0)}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(T_i - T_0)}{n\pi} (-2) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

$$T_i - T_0 = -\frac{4(T_i - T_0)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$\text{Par identification , nous en déduisons : } D_n = -\frac{4(T_i - T_0)}{\pi(2n+1)}$$

Et l'expression finale de $T(x,t)$:

$$T(x,t) = T_0 + 4 \frac{T_i - T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp\left(-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{a t}{L^2}\right) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$

Si l'on fixe l'origine de l'axe Ox au milieu de la plaque d'épaisseur $2L$, la transformation de x en $(x-L)$ conduit à :

$$T(x,t) = T_0 + 4 \frac{T_i - T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \exp\left(-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{a t}{L^2}\right) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] \quad (2.28)$$

Cette solution converge pour un petit nombre de termes pour les valeurs de t longues.

3^{ème} méthode : Utilisation d'une transformation intégrale sur la variable d'espace.

Principe de l'utilisation d'une transformée intégrale à la résolution de l'équation de la chaleur :

On applique à l'équation de la chaleur et aux équations résultantes des conditions aux limites une transformation intégrale permettant d'obtenir une nouvelle équation différentielle dont la résolution (plus aisée) conduit à l'expression de la température θ dans l'espace transformé. On applique ensuite à θ la transformation inverse pour obtenir l'expression de la température T dans l'espace réel.

Le choix de la transformation intégrale la mieux adaptée dépend de la configuration et des conditions aux limites. Si la température dépend de la variable d'espace r , on choisit une transformation du type suivant :

$$\theta(\omega) = \int_D w(r) T_\omega(r, \omega) T(r, t) dr$$

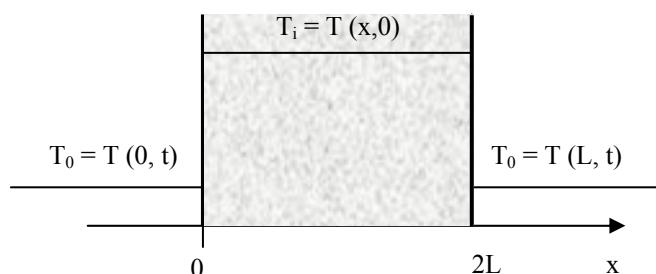
où D est le domaine de définition de la température et $T_\omega(r, t)$ est une fonction propre solution du système formé par l'équation de la chaleur et les conditions aux limites pour un nombre infini de valeurs ω_n ($n = 1, 2, \dots$). L'équation dont les ω_n sont solutions est appelée l'équation transcendante. La fonction $w(r)$ est choisie constante et égale à 1 en géométrie rectangulaire et égale à r en géométrie cylindrique. La formule générale d'inversion est alors la suivante :

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{\omega_n}(\omega_n, r)}{N(\omega_n)} \theta(\omega_n) \quad \text{avec : } N(\omega_n) = \int_D [T_{\omega_n}(\omega_n, r)]^2 w(r) dr$$

$N(\omega_n)$ est appelée la norme de la fonction propre $T_\omega(r, t)$.

On trouvera en annexe A.2.2 la définition et les propriétés des transformations les plus utilisées : Laplace, Fourier et Hankel. On trouvera également en annexe A.2.4 un tableau donnant les fonctions propres et leurs normes, les équations transcendantes et les valeurs propres pour les cas de figure les plus courants.

Appliquons cette méthode au cas de figure présent :



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ T(0, t) = T(2L, t) = T_0 \end{cases} \quad (b) \quad (c)$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

Selon l'annexe A.2.4, la fonction propre est $T_\omega(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, on applique donc une transformation (finie car le milieu est fini) de Fourier en sinus (cf annexe A.2.2) à l'équation (a) :

$$F_s[a] \Rightarrow \frac{n\pi}{L} [\bar{T}(0) - (-1)^n \bar{T}(L)] - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \theta_s(n) = \frac{1}{a} \frac{d\theta_s}{dt}(n) \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x=0) = \bar{T}(x=2L) = T_0 - T_i$$

d'où : $\frac{n\pi(T_0 - T_i)}{L} [1 - (-1)^n] - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \theta_s(n) = \frac{1}{a} \frac{d\theta_s}{dt}(n)$

$$\text{La solution générale de cette équation s'écrit : } \theta_s(n) = \frac{L(T_0 - T_i)}{n\pi} [1 - (-1)^n] + A \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{L^2}\right)$$

$$\text{La condition limite } \bar{T}(x, t=0) = 0 \text{ conduit à : } \theta_s(n) = \frac{L(T_0 - T_i)}{n\pi} [1 - (-1)^n] + \left[1 - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{L^2}\right)\right]$$

La transformée inverse permet de calculer $T(x, t)$:

$$T(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} [1 - (-1)^n] + \left[1 - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a t}{L^2}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$T(x, t) = \frac{4(T_0 - T_i)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a t}{L^2}\right)\right] \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$$

Un développement de la fonction constante et égale à 1 en série de sinus permet de retrouver le résultat de la 2^{ème} méthode.

4^{ème} méthode : Transformation de Laplace, résolution et inversion par la méthode de Stehfest .

Nous avons montré en appliquant la 1^{ère} méthode que la transformée de la température s'écrit :

$$\theta(x, p) = \frac{(T_0 - T_i) \operatorname{ch}(qx)}{p \operatorname{ch}(qL)} = \frac{\Delta T \operatorname{ch}(qx)}{p \operatorname{ch}(qL)} \quad \text{avec } q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

La température $T(x, t)$ peut s'en déduire en appliquant la méthode de Stehfest pour trouver la transformée de Laplace inverse de $\theta(x, p)$:

$$T_i(x, t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{20} V_j \theta_i\left(\frac{j \ln(2)}{t}\right) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{20} \frac{V_j}{\frac{j \ln(2)}{t}} \frac{(T_0 - T_i) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{j \ln(2)}{a t}} x\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{j \ln(2)}{a t}} L\right)}$$

Soit finalement :

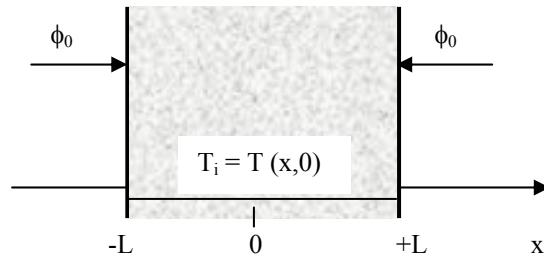
$$T_i(x, t) = (T_0 - T_i) \sum_{j=1}^{20} \frac{V_j}{j} \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{j \ln(2)}{a t}} x\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{j \ln(2)}{a t}} L\right)} \quad (2.29)$$

Comparaison des méthodes :

La méthode permettant d'arriver le plus simplement à une valeur de $T(x,t)$ est la 4^{ème} méthode qui ne fournit toutefois qu'une solution numérique approchée de la solution et qui n'est pas à l'abri d'instabilités numériques dans certains cas particuliers. Viennent ensuite par ordre de difficulté croissante la 1^{ère} méthode puis la 2^{ème} et la 3^{ème} méthode.

Compte-tenu de la puissance des ordinateurs, l'application des formules obtenues ne pose aucune difficulté, un nombre de termes égal à 5 suffit pour obtenir une bonne précision pour les formules (2.28) et (2.29). Le premier terme de la formule (2.28) représente bien la température aux temps courts alors que le premier terme de la formule (2.29) représente bien la température aux temps longs.

2ème cas : Plaque avec flux imposé



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$T(x, 0) = T_i \quad (b)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (c)$$

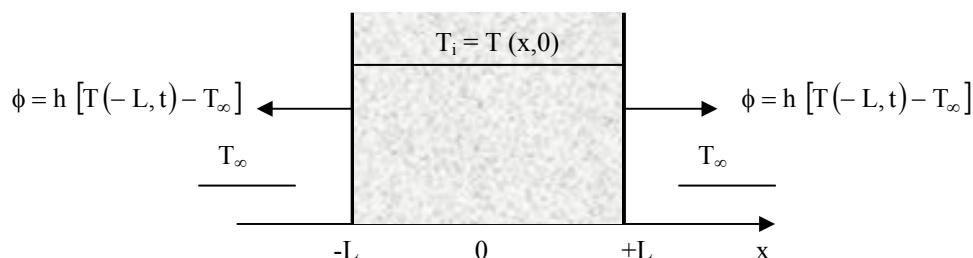
$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = \phi_0 \quad (d)$$

En utilisant les deux premières méthodes du paragraphe précédent, on arrive aux résultats suivants :

$$T = T_i + \frac{\phi_0 t}{\rho c L} + \frac{\phi_0 L}{\lambda} \left[\frac{3x^2 - L^2}{6L^2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \exp\left(-\frac{an^2\pi^2t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.30)$$

$$T = T_i + \frac{2\phi_0 \sqrt{at}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\text{erfc}\left(\frac{(2n+1)L-x}{2\sqrt{at}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{(2n+1)L+x}{2\sqrt{at}}\right) \right] \quad (2.31)$$

3ème cas : Plaque avec coefficient de transfert imposé



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, 0) = T_i \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \end{array} \right. \quad (b)$$

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = h [T(L, t) - T_\infty] \end{array} \right. \quad (c)$$

$$\left. \begin{array}{l} -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = h [T(L, t) - T_\infty] \end{array} \right. \quad (d)$$

L'application de la 2^{ème} méthode présentée au § 2.3.3.1 permet d'obtenir le résultat suivant :

$$T(x, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-a\omega_n^2 t) \frac{\omega_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}}{\left(\omega_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right)L + \frac{h}{\lambda}} \cos(\omega_n x) \int_0^L [T_i(x') - T_0] \cos(\omega_n x') dx \quad (2.32)$$

Où ω_n ($n = 1, 2, \dots$) sont les solutions de l'équation : $\omega \tan(\omega L) = \frac{h}{\lambda}$

Dans le cas où la température initiale T_i est uniforme (indépendante de x) la solution s'écrit :

$$T(x, t) = T_0 + 2(T_i - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-a\omega_n^2 t) \frac{\frac{h}{\lambda}}{\left(\omega_n^2 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right)L + \frac{h}{\lambda}} \frac{\cos(\omega_n x)}{\cos(\omega_n L)} \quad (2.33)$$

Cette solution est représentée sous forme d'abaques en annexe A.2.6.

2.3.3.2 Cylindre infini

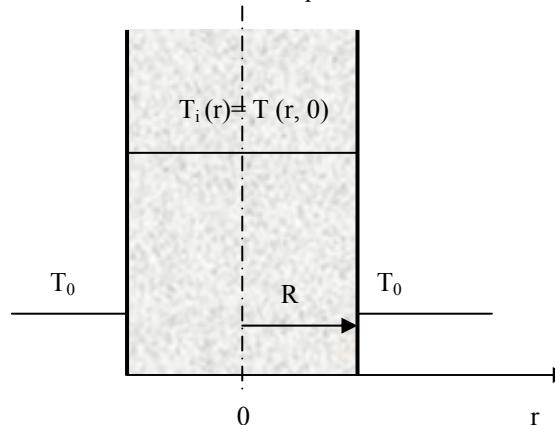
On considère dans ce paragraphe un cylindre infini (longueur très grande par rapport au diamètre) de diamètre R , on peut faire l'hypothèse dans ce cas que le transfert de chaleur est uniquement radial.

1er cas : Cylindre infini avec température de surface imposée

On impose brutalement une température T_0 à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i .

Méthode : Décomposition de la température en un produit de fonction et transformation de Hankel.

Nous considérons ici un cylindre infini (longueur très grande par rapport au diamètre) de diamètre R initialement à la température T_i auquel on impose brutalement une température de surface T_0 . On peut faire l'hypothèse dans ce cas que le transfert de chaleur est uniquement radial.



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(r, 0) = T_i & (b) \\ T(R, t) = T_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_0$

L'équation (a) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 & (b) \\ \bar{T}(R, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x, t) = X(r)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y + \frac{1}{r} X'Y' = \frac{1}{a} XY' \quad \text{ou : } \frac{X'' + \frac{X'}{R}}{X} = \frac{1}{a} \frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

où ω est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. Nous en déduisons :

$$\begin{cases} X'' + \frac{X'}{R} + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X = AJ_0(\omega x) + BY_0(\omega x) \\ Y' + a\omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = Ce^{-a\omega^2 t} \end{cases}$$

où J_0 est la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce non modifiée d'ordre 0 et Y_0 la fonction de Bessel de 2^{nde} espèce non modifiée d'ordre 0. On trouvera en annexe A.2.5 la définitions et les principales propriétés des fonctions de Bessel.

On en déduit que les solutions de (a) sont de la forme : $\bar{T} = Ce^{-a\omega^2 t} [AJ_0(\omega x) + BY_0(\omega x)]$

Par ailleurs on sait que $Y_0(0) = -\infty$ ce qui impose $B = 0$ d'où $\bar{T} = D e^{-a\omega^2 t} J_0(\omega x)$

La condition limite $\bar{T}(R, t) = 0$ s'écrit alors : $D e^{-a\omega^2 t} J_0(\omega R) = 0$ ce qui impose $\omega_n R = \beta_n$ où ω_n est une solution de l'équation $J_0(\omega R) = 0$.

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale de (a) sous la forme :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-a\omega_n^2 t} J_0(\omega_n R)$$

La condition limite $\bar{T}(r, 0) = T_i - T_0$ s'écrit alors : $T_i - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\omega_n r) \quad (d)$

La fonction propre est $J_0(\omega x)$ ce qui nous amène à appliquer la transformée de Hankel à la condition limite (d) soit à multiplier chaque membre de l'équation (d) par $r J_0(\omega_m r)$ et à intégrer entre 0 et R :

$$\int_0^R r J_0(\omega_m r) (T_i - T_0) dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\omega_m r) J_0(\omega_n r) dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} D_n r J_0(\omega_m r) J_0(\omega_n r) dr = \int_0^R D_m r [J_0(\omega_m r)]^2 dr$$

car on montre que $\int_0^R r J_0(\omega_n r) J_0(\omega_m r) dr = 0$ si $m \neq n$.

$$\int_0^R r J_0(\omega_m r) (T_i - T_0) dr = D_m \int_0^R r [J_0(\omega_m r)]^2 dr = D_m \frac{R^2}{2} [J_0'(\omega_m r)]^2 = D_m \frac{R^2}{2} [J_1'(\omega_m r)]$$

car les fonctions J_n vérifient les relations (cf. annexe A.2.5) :

$$\int_0^R r [J_n(\omega r)]^2 dr = \frac{R^2}{2} [J_n'(\omega r)]^2 \quad \text{et} \quad J_n'(\omega r) = -J_{n+1}(\omega r) + \frac{n}{\omega r} J_n(\omega r)$$

On en déduit finalement :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n r)}{[J_1(\omega_n r)]^2} e^{-a\omega_n^2 t} \int_0^R r (T_i - T_0) J_0(\omega_n r) dr$$

(2.34)

Où ω_n ($n = 1, 2, 3\dots$) sont les racines de l'équation $J_0(\omega r) = 0$.

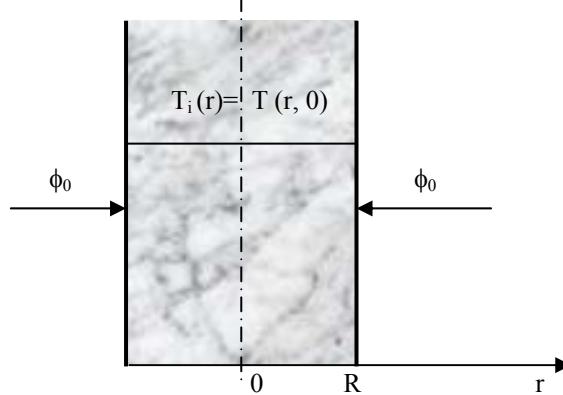
Si la température initiale T_i est uniforme (indépendante de r) ce résultat s'écrit :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{2(T_i - T_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n r)}{\omega_n J_1(\omega_n r)} e^{-a\omega_n^2 t}$$

(2.35)

2ème cas : flux de chaleur imposé

On impose brutalement une densité de flux ϕ_0 à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i .



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (b) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(R, t) = \phi_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_0$

L'équation (a) peut alors s'écrire : $\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = T_i - T_0 & (b) \\ -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}(R, t) = \phi_0 & (c) \end{cases}$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $T(x, t) = X(r)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :

$$X''Y + \frac{1}{r} X'Y = \frac{1}{a} XY' \quad \text{ou} : \quad \frac{X'' + \frac{X'}{R}}{X} = \frac{1}{a} \frac{Y'}{Y} = -\omega^2$$

Dont la résolution mène au résultat suivant :

$$T(r,t) = T_i + \frac{2\phi_0 at}{\lambda R} + \frac{\phi_0 R}{\lambda} \left[\frac{r^2}{2R^2} - \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\omega_n^2 t} \frac{J_0\left(\frac{\omega_n r}{R}\right)}{\omega_n^2 J_0[\omega_n]} \right] \quad (2.36)$$

3ème cas : coefficient de transfert imposé

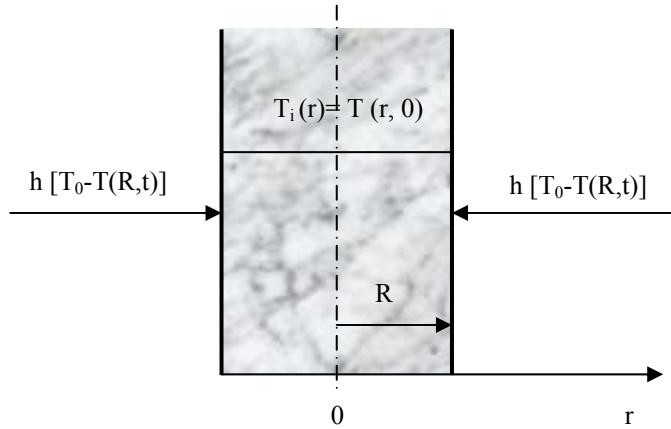
On impose brutalement un échange de chaleur par convection avec un coefficient de transfert h à la surface du cylindre initialement à la température uniforme T_i .

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(r, 0) = T_i & (b) \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h [T(R, t) - T_\infty] & (c) \end{cases}$$



La solution s'écrit :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\omega_n^2 t} \frac{\omega_n^2 J_0(\omega_n r)}{\left(\left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 + \omega_n^2 \right) [J_0(\omega_n R)]^2} \int_0^R r (T_i - T_0) J_0(\omega_n r) dr \quad (2.37)$$

Où ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) sont les racines de l'équation $a J_0'(\omega r) + \frac{h}{\lambda} J_0(\omega r) = 0$.

Si la température initiale T_i est uniforme (indépendante de r) ce résultat s'écrit :

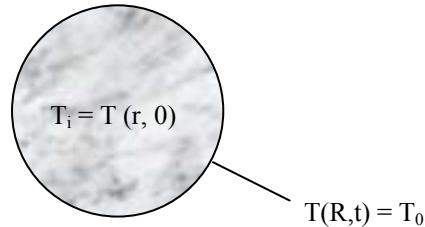
$$T(r, t) = T_0 + \frac{2 \frac{h}{\lambda} (T_i - T_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\omega_n^2 t} \frac{J_0(\omega_n r)}{\left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \omega_n^2 \right) J_0(\omega_n R)} \quad (2.38)$$

Cette solution est représentée sous forme d'abaques en annexe A.2.7.

2.3.3.3 Sphère

1er cas : Température de surface imposée

Nous considérons ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à laquelle on impose brutalement une température de surface T_0 .



$$\text{L'équation de la chaleur s'écrit : } \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (a) \quad \text{où : } \bar{T} = T - T_0$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 & (b) \\ \bar{T}(R, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

Effectuons le changement de variable suivant : $U(r, t) = r \bar{T}(r, t)$, l'équation (a) devient : $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t}$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} U(r, 0) = r(T_i - T_0) & (b) \\ U(R, t) = U(-R, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

On retrouve le système d'équations de la plaque infinie d'épaisseur $2L$ (§2.3.2.1) moyennant les changements suivants :

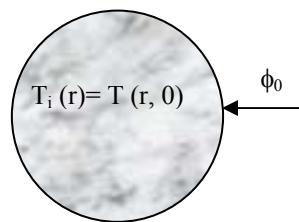
$$\begin{cases} x \rightarrow r - R \\ \bar{T} \rightarrow U \\ T_i - T_0 \rightarrow r(T_i - T_0) \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir le résultat suivant :

$$T(r, t) = T_0 + \frac{2R(T_0 - T_i)}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp\left(-\frac{an^2\pi^2t}{R^2}\right) \quad (2.39)$$

2ème cas : Flux imposé

Nous considérons ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à laquelle on impose brutalement une température de surface T_0 .



$$\text{L'équation de la chaleur s'écrit : } \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (a) \quad \text{où : } \bar{T} = T - T_i$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 & (b) \\ \bar{T}(R, t) = 0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $U(r,t) = r \bar{T}(r,t)$ qui permet de se ramener au cas de la plaque infinie d'épaisseur $2L$.

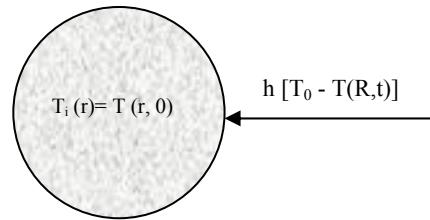
On obtient finalement :

$$T(r,t) = \frac{3\phi_0 t}{\rho c R} + \frac{\phi_0 (5r^2 - 3R^2)}{10\lambda R} - \frac{2\phi_0 R^2}{\lambda r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\omega_n r}{R}\right)}{\omega_n^2 \sin(\omega_n)} \exp\left(-\frac{\lambda \omega_n^2 t}{R^2}\right) \quad (2.40)$$

où ω_n ($n = 1, 2, \dots$) sont les racines positives de l'équation $\tan(\omega) = \omega$.

3ème cas : Coefficient de transfert par convection imposé

Nous considérons ici une sphère de rayon R à la température initiale uniforme T_i à laquelle on impose brutalement une échange convectif (avec un coefficient h) avec le milieu ambiant à la température T_0 .



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (a) \quad \text{où :} \quad \bar{T} = T - T_i$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \bar{T}(r,0) = T_i - T_0 & (b) \\ \bar{T}(R,t) = 0 & (c) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $U(r,t) = r \bar{T}(r,t)$ qui permet de se ramener au cas de la plaque infinie d'épaisseur $2L$.

On obtient finalement :

$$T(r,t) = T_0 + \frac{2h(T_i - T_0)}{\lambda R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2 \omega_n^2 + \left(\frac{hR}{\lambda} - 1\right)^2}{\omega_n^2 \left[R^2 \omega_n^2 + \frac{hR}{\lambda} \left(\frac{hR}{\lambda} - 1\right)\right]} \sin(\omega_n R) \sin(\omega_n r) \quad (2.41)$$

Où ω_n ($n = 1, 2, \dots$) sont les racines de l'équation $\omega R \cot g(\omega R) + \frac{hR}{\lambda} - 1 = 0$

Cette solution est représentée sous forme d'abaques en annexe A.2.8.

2.3.4 Systèmes complexes : méthode des quadripôles

Dans ce paragraphe, on notera :

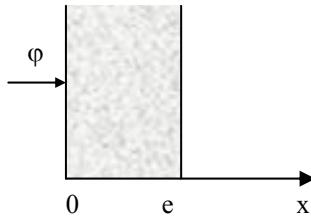
- $\theta(x,p)$ la transformée de Laplace de la température $T(x,t)$.
- $\Phi(x,p)$ la transformée de Laplace du flux de chaleur $\varphi(x,t)$.

On trouvera en annexe 2.11 un récapitulatif des matrices quadripolaires associées aux systèmes les plus couramment rencontrés dans la pratique.

2.3.4.1 Ecoulement unidirectionnel dans des murs plans

Mur simple

Considérons à nouveau le cas d'une transfert de chaleur unidirectionnel dans un mur d'épaisseur e :



La température $T(x,t)$ au sein du mur vérifie l'équation : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ (a)

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation (a) on obtient : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{p}{a} \theta$ (b) si $T(x,0) = 0$.

Où $\theta(x,p)$ est la transformée de Laplace de la température $T(x,t)$ (cf. annexe A.2.2).

L'équation (b) admet une solution de la forme : $\theta(x,p) = k_1(p) \cosh(qx) + k_2(p) \sinh(qx)$ avec $q^2 = \frac{p}{a}$

La transformée de Laplace du flux en un point quelconque du mur s'écrit :

$$\Phi(x,p) = L\left[-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = -\lambda S L\left[\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = -\lambda S \frac{d\theta}{dx}(x,p) \quad (c)$$

Cette relation permet d'exprimer $\Phi(x,p)$ en fonction de $k_1(p)$, $k_2(p)$ et x :

$$\Phi(x,p) = -\lambda S k_1 q \sinh(qx) - \lambda S k_2 q \cosh(qx) \quad (d)$$

Les relations (b) et (d) peuvent être écrites en $x = 0$ et en $x = e$, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(0,p) &= k_1 & \Phi(0,p) &= -\lambda S k_2 \\ \theta(e,p) &= k_1 \cosh(qe) + k_2 \sinh(qe) & \Phi(e,p) &= -\lambda S q k_1 \sinh(qe) - \lambda S q k_2 \cosh(qe) \end{aligned}$$

Il est possible d'éliminer k_1 et k_2 entre ces 4 équations ce qui revient par exemple à exprimer (θ_1, Φ_1) en fonction de (θ_2, Φ_2) , on aboutit à :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \theta(0,p) \\ \Phi(0,p) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cosh(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ \lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix}}_{M = \text{matrice quadripolaire}} \begin{bmatrix} \theta(e,p) \\ \Phi(e,p) \end{bmatrix}} \quad (2.42)$$

On a la propriété : $\det(M) = 1$ ce qui permet d'établir la relation réciproque :

$$\begin{bmatrix} \theta(e,p) \\ \Phi(e,p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(qe) & -\frac{1}{\lambda q S} \sinh(qe) \\ -\lambda q S \sinh(qe) & \cosh(qe) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(0,p) \\ \Phi(0,p) \end{bmatrix}$$

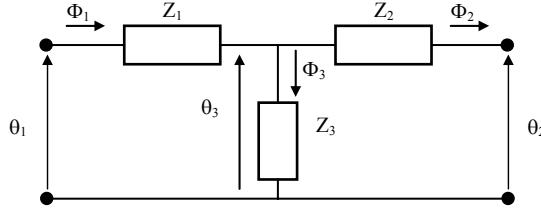
On peut par ailleurs établir une analogie entre la propagation d'un courant en régime sinusoïdal et le transfert thermique unidirectionnel en régime transitoire :

Intensité du courant électrique I	\longrightarrow	Flux de chaleur dans l'espace de Laplace $\Phi(x,p)$
Potentiel électrique U	\longrightarrow	Température dans l'espace de Laplace $\theta(x,p)$
Impédance électrique Z	\longrightarrow	Impédance thermique Z

La loi d'Ohm $U_1 - U_2 = R I$ se traduit par : $T_1 - T_2 = R_t \varphi$

La loi des noeuds : $\sum I = 0$ se traduit par : $\sum \varphi = 0$

Moyennant ces notations, la relation quadripolaire (2.44) peut être représentée par le schéma électrique équivalent :

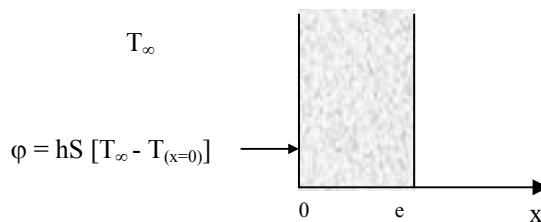


Avec dans le cas du mur plan :

$$Z_1 = Z_2 = \frac{\operatorname{ch}(qe) - 1}{\lambda S q \operatorname{sh}(qe)} \quad \text{et} \quad Z_3 = \frac{1}{\lambda S q \operatorname{sh}(qe)}$$

Mur avec échange convectif

Considérons maintenant le cas d'un mur échangeant de la chaleur par convection avec un fluide :



La relation $\varphi = hS [T_\infty - T_{(x=0)}]$ peut aussi s'écrire : $T_\infty = \frac{\varphi}{hS} + T_{(x=0)}$ que l'on peut traduire dans l'espace de

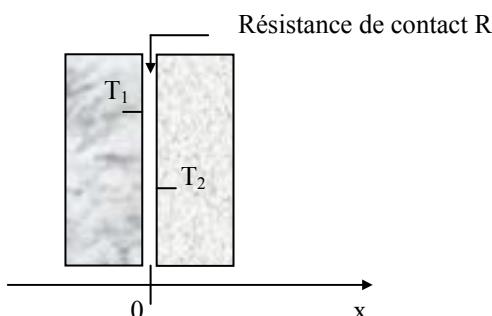
Laplace par : $\theta_\infty = \theta_{(x=0)} + \frac{\Phi}{hS}$ si Φ est la transformée de Laplace du flux φ et θ la transformée de Laplace de la température T .

On peut donc écrire sous forme matricielle quadripolaire:

$$\begin{bmatrix} \theta_\infty \\ \Phi_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/hS \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{(x=0)} \\ \Phi_{(x=0)} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Résistance de contact entre 2 murs

Considérons maintenant le cas du transfert de chaleur à travers une résistance de contact R à l'interface entre deux milieux solides :



Le flux de chaleur s'écrit $\varphi = \frac{T_{1(x=0)} - T_{2(x=0)}}{R}$ peut aussi s'écrire : $T_{1(x=0)} = R \varphi + T_{2(x=0)}$ que l'on peut traduire dans l'espace de Laplace par : $\theta_{1(x=0)} = \theta_{2(x=0)} + R \Phi$ si Φ est la transformée de Laplace du flux φ et θ_i la transformée de Laplace de la température T_i .

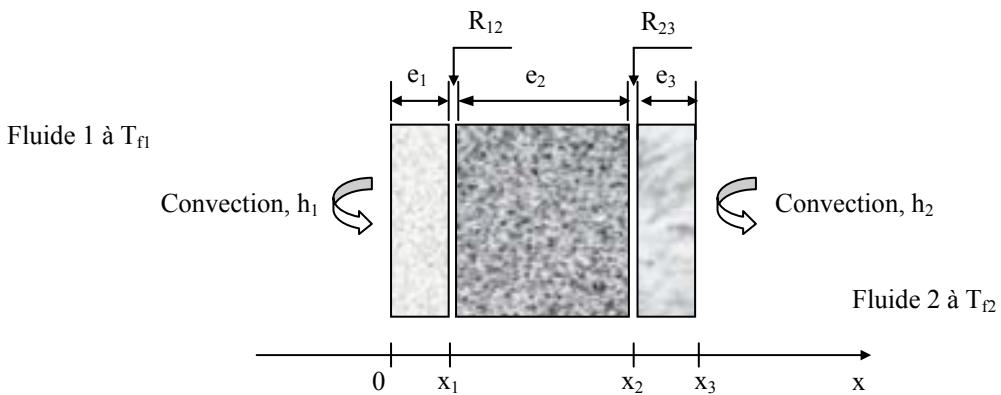
On peut donc écrire sous forme matricielle quadripolaire:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Mur multicouches avec convection et résistances de contact

Les équations matricielles quadripolaires précédemment établies nous permettent d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_{f1} \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{h_1 S} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{23} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{h_2 S} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{f2} \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$



$$\text{vec : } A_i = D_i = ch(q_i e_i) ; \quad C_i = \lambda_i q_i S sh(q_i e_i) ; \quad Bi = \frac{sh(q_i e_i)}{\lambda_i q_i S} \quad \text{et} \quad q_i = \sqrt{\frac{p}{a_i}}$$

La description du problème sous forme matricielle permet d'en obtenir une formulation très simple ce qui montre tout l'intérêt de la méthode des quadripôles.

Milieu semi-infini

Il a été démontré au §2.3.2 que la température dans l'espace de Laplace d'un milieu semi-infini s'écrit :

$$\theta(x, p) = A e^{-qx} \quad \text{où} \quad q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

On en déduit la valeur de la transformée de Laplace du flux en un point du milieu semi-infini :

$$\Phi(x, p) = -\lambda S \frac{d\theta}{dx} = \lambda q S e^{-qx} = \lambda q S \theta$$

$$\text{Avec} \quad q = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{\rho c p}{\lambda}}$$

$$\Phi \text{ peut donc aussi s'écrire : } \Phi = \lambda q S \theta = \lambda \sqrt{\frac{\rho c p}{\lambda}} S \theta = \sqrt{\lambda \rho c} S \sqrt{p} \theta = E S \sqrt{p} \theta$$

où \$E\$ est l'effusivité thermique.

On pourra donc écrire en tout point d'un milieu semi-infini :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ E S \sqrt{p} \theta \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Mur à température uniforme

Dans le cas d'un "système mince" : mur dont l'épaisseur et/ou la conductivité thermique permettent de considérer sa température comme uniforme ($\text{Bi} < 0,1$, cf. §2.3.1), la différence entre le flux de chaleur entrant et le flux de chaleur sortant du système s'écrit simplement :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \rho c V \frac{dT}{dt} \quad \text{soit en appliquant la transformée de Laplace :} \quad \Phi_1 - \Phi_2 = \rho c V p \theta$$

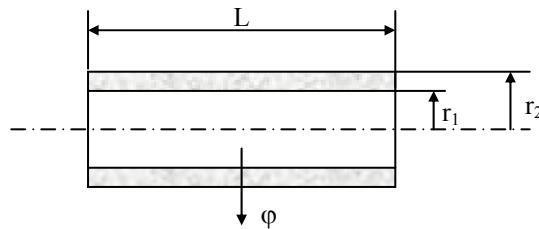
Ce qui peut se traduire sous forme quadripolaire par la relation :

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho c V p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Exemple d'application : cf. modélisation de la méthode du plan chaud, § 6.1.2.

2.3.4.2 Ecoulement radial

Cylindre creux



On montre de la même manière qu'en 2.3.7.1 (cf. Maillet p. 92) que les températures et les flux dans l'espace de Laplace peuvent être reliés par une relation quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} \theta(r_1, p) \\ \Phi(r_1, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(r_2, p) \\ \Phi(r_2, p) \end{bmatrix}$$

$$A = q r_2 [K_1(q r_2) I_0(q r_1) + K_0(q r_1) I_1(q r_2)]$$

$$B = \frac{L}{2 \pi \lambda_1} [K_0(q r_1) I_0(q r_2) - K_0(q r_2) I_0(q r_1)]$$

$$C = 2 \pi L \rho c p r_1 r_2 [K_1(q r_1) I_1(q r_2) - K_1(q r_2) I_1(q r_1)]$$

$$D = q r_1 [K_0(q r_2) I_1(q r_1) + K_1(q r_1) I_0(q r_2)] \quad (2.47)$$

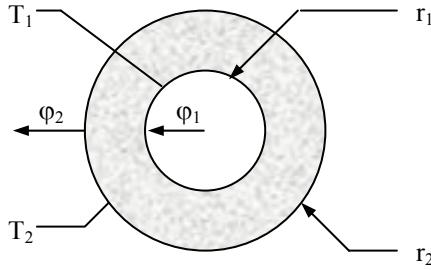
I_0 , I_1 , K_0 et K_1 étant des fonctions de Bessel (cf. Annexe A.2.5). Le déterminant de la matrice quadripolaire est égal à 1.

Cylindre creux semi-infini

Comme dans le cas du mur plan, on montre que l'on peut écrire en tout point d'un cylindre creux semi-infini ($r_2 \rightarrow \infty$) :

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 2 \pi \lambda L \frac{q r_1 K_1(q r_1)}{K_0(q r_1)} \theta \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Sphère creuse



On montre de la même manière qu'en 2.3.7.1 (cf. Maillet p. 93) que les températures et les flux dans l'espace de Laplace peuvent être reliés par une relation quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} \theta(r_1, p) \\ \Phi(r_1, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(r_2, p) \\ \Phi(r_2, p) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$A = \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ch}(p) - \frac{\operatorname{sh}(p)}{qr_1}$$

$$B = \frac{\operatorname{sh}(p)}{4\pi\lambda qr_1 r_2}$$

$$C = 4\pi\lambda r_2 \left[\left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \operatorname{ch}(p) + \left(qr_1 - \frac{1}{qr_2} \operatorname{sh}(p) \right) \right]$$

$$D = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ch}(p) + \frac{\operatorname{sh}(p)}{qr_2}$$

Le déterminant de la matrice quadripolaire est égal à 1.

Sphère creuse semi-infinie

Comme dans le cas du mur plan, on montre que l'on peut écrire en tout point d'une sphère creuse semi-infinie ($r_2 \rightarrow \infty$) :

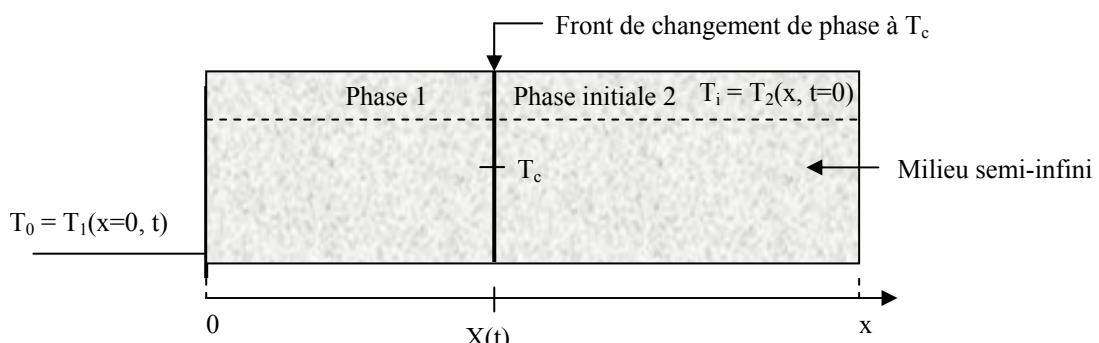
$$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ 4\pi\lambda r_1 (1 + qr_1) \theta \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Exemple d'application : cf. modélisation de la méthode du fil chaud, § 6.2.2.

2.4 Conduction unidirectionnelle en régime variable avec changement d'état

2.4.1 Température constante imposée en surface

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i en phase 2. On impose brutalement une température de surface T_0 inférieure à la température de changement de phase $2 \rightarrow 1$. Un changement de phase va se produire tout d'abord à la surface puis se propager vers l'intérieur du milieu semi-infini.



L'équation de la chaleur s'écrit dans les phases 1 et 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} & \text{(a)} \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} & \text{(b)} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans la phase 1 [pour } x < X(t) \text{]} \\ \text{dans la phase 2 [pour } x > X(t) \text{]} \end{array}$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} T_2(x, 0) = T_i & \text{(c)} \\ T_1(0, t) = T_0 & \text{(d)} \\ T_1(X, t) = T_2(X, t) = T_c & \text{(e)} \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_X - \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_X = L \rho \frac{dX}{dt} & \text{(f)} \end{cases}$$

D'après 4.1.1, la fonction $T_1(x, t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + T_0$ où A est une constante arbitraire vérifie les équations (a) et (d). De même, la fonction $T_2(x, t) = T_i - B \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \right]$ où B est une constante arbitraire qui vérifie les équations (b) et (d).

L'équation (e) conduit alors à :

$$A \operatorname{erf}\left(\frac{X(t)}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + T_0 = T_i - B \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{X(t)}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \right] = T_c$$

Cette relation doit être vérifiée pour toutes les valeurs de t , on en déduit que : $X = k \sqrt{t}$, où k est une constante.

En tenant compte de cette forme de $X(t)$, l'équation (f) permet d'écrire :

$$\frac{\lambda_1 A e^{\frac{-k^2}{4a_1}}}{\sqrt{\pi a_1}} - \frac{\lambda_2 B e^{\frac{-k^2}{4a_2}}}{\sqrt{\pi a_2}} = L \frac{\rho k}{2}$$

Avec :

$$A = \frac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)} \quad \text{et} \quad B = \frac{T_i - T_c}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)}$$

La position $X(t)$ du front de changement de phase se calcule finalement par :

$$X(t) = k \sqrt{t} \quad (2.51)$$

Avec k solution de l'équation :

$$\frac{\lambda_1 (T_c - T_0)}{\operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)} \exp\left(\frac{-k^2}{4a_1}\right) - \frac{\lambda_2 (T_i - T_c)}{\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)\right]} \exp\left(\frac{-k^2}{4a_2}\right) = \frac{L \rho k}{2}$$

Et la température dans chaque phase s'écrit :

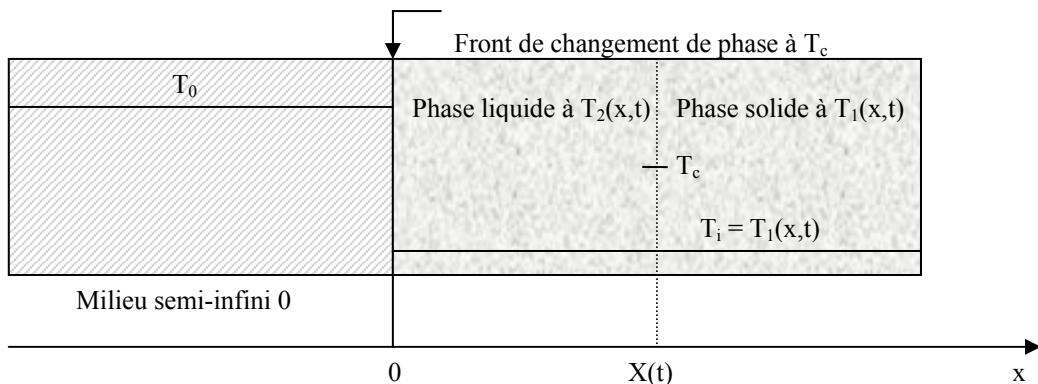
$$T_1(x, t) = \frac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}t}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1}t}\right) + T_0 ; \quad T_2(x, t) = T_i - \frac{T_i - T_c}{\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}t}\right)\right]} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2}t}\right)\right] \quad (2.52)$$

On obtient dans le cas de l'eau les valeurs données dans le tableau 4.1.

$10^4 k$		T_0					
		-3	-6	-9	-12	-15	-18
T_i	0	0,9871	1,3876	1,6893	1,9393	2,1559	2,3484
	3	0,8937	1,2919	1,5925	1,8420	2,0582	2,2506
	6	0,8106	1,2040	1,5025	1,7506	1,9661	2,1580
	9	0,7371	1,1235	1,4188	1,6650	1,8792	2,0703
	12	0,6724	1,0500	1,3411	1,5848	1,7974	1,9873
	15	0,6154	0,9829	1,2690	1,5098	1,7203	1,9087
		0,5653	0,9217	1,2023	1,4395	1,6477	1,8344

Tableau 4.1 : Valeurs de k en fonction de T_i et de T_0 pour de l'eau initialement liquide à T_i

2.4.2 Fusion par contact avec un milieu semi-infini chaud



On montre de la même manière que si $X = k\sqrt{t}$ est la position de la surface de séparation liquide/solide alors k est solution de l'équation :

$$\frac{\lambda_0 \sqrt{a_2} (T_0 - T_c) \exp\left(-\frac{k^2}{4a_2}\right)}{\lambda_1 a_0^2 + \lambda_0 a_1 \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_2}}\right)} - \frac{\lambda_1 \sqrt{a_2} (T_c - T_i) \exp\left(-\frac{k^2}{4a_1}\right)}{\lambda_2 \sqrt{a_1} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{a_1}}\right)\right]} = \frac{k L \sqrt{\pi}}{2\sqrt{a_2} c_2} \quad (2.53)$$

2.5 Conduction multidirectionnelle en régime variable

2.5.1 Produit de solutions unidirectionnelles

Certains problèmes bi- ou tridimensionnels peuvent être résolus par combinaison de 2 ou 3 solutions monodimensionnelles. Considérons par exemple le cas d'une barre rectangulaire infinie (longueur très grande

devant les côtés $2L_1$ et $2L_2$), elle peut être considérée comme l'intersection de deux plaques infinies d'épaisseurs respectives $2L_1$ et $2L_2$. Le théorème de Von Neumann permet d'affirmer que la température adimensionnelle de cette barre s'exprime comme le produit des températures adimensionnelles des deux plaques infinies dont elle peut être considérée comme étant l'intersection :

$$\left[\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{barre } 2L_1 \times 2L_2} = \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaqué } 2L_1} \times \left[\frac{T(y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaqué } 2L_2} \quad (2.54)$$

Remarques :

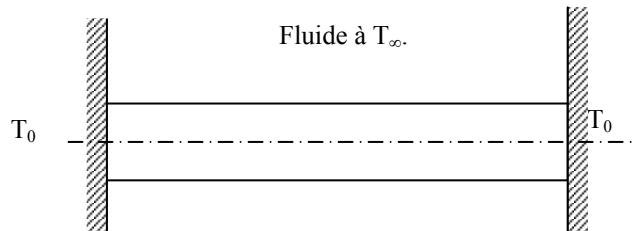
- Il faut vérifier que les conditions initiales et aux limites sont satisfaites sous forme adimensionnelle après décomposition de la géométrie considérée en intersection d'éléments simples.
- Des géométries plus complexes peuvent également se décomposer en intersection d'éléments simples, comme par exemple :
 - Cylindre semi-infini = Cylindre infini \cap Milieu semi-infini
 - Barre rectangulaire semi-infinie = Barre rectangulaire infinie \cap Milieu semi-infini
 - Cylindre hauteur $2L$ = Cylindre infini \cap Plaque épaisseur $2L$...

2.6 Les ailettes

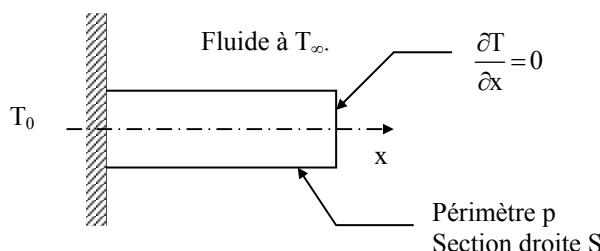
2.6.1 L'équation de la barre

Le problème de la barre encastrée schématisé le problème pratique important du refroidissement d'un solide par des ailettes.

Considérons une barre de section constante (épaisseur e et largeur ℓ) encastrée entre 2 surfaces à température T_0 et baignant dans un fluide à température T_∞ .

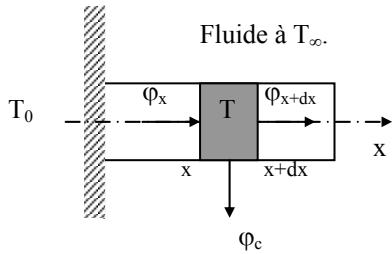


La symétrie du problème montre l'existence d'un extremum de la température au milieu de la barre ce qui permet de simplifier la géométrie :



La barre est supposée de section suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de variation de température dans une même section droite à une distance x de l'encastrement dans la paroi à T_0 .

Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué par la portion de barre comprise entre les abscisses x et $x+dx$ (nous retenons l'hypothèse du régime permanent et nous négligeons le rayonnement) :



Avec : φ_x Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse x

φ_{x+dx} Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse $x+dx$

φ_c Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre x et $x+dx$

$$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_x$$

$$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_c = h p dx [T(x) - T_\infty]$$

Le bilan d'énergie s'écrit : $\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_c$

$$\text{Soit : } \left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{dT}{dx}\right)_x = h p dx [T(x) - T_\infty]$$

$$\text{Si } \lambda \text{ et } S \text{ sont indépendants de l'abscisse } x, \text{ nous obtenons : } \lambda S \frac{\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x}{dx} = h p [T(x) - T_\infty]$$

Donc T est solution de l'équation différentielle suivante appelée équation de la barre :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h p}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0} \quad (2.55)$$

2.6.2 Flux extrait par une ailette

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres, exemple : barre d'épaisseur e et de longueur L avec $e \ll L$. Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées sont à transmettre dans un encombrement réduit : refroidissement de composants électroniques, refroidissement d'un moteur par air...

Nous avons établi l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ d'une ailette encastrée dans un mur à la température T_0 et baignant dans un fluide à la température T_∞ :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h p}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0$$

En posant : $\omega^2 = \frac{h p}{\lambda S}$ et $\theta = T - T_\infty$ elle peut encore s'écrire : $\frac{d^2\theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$

Si la section S est constante, c'est une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = A \exp(\omega x) + B \exp(-\omega x) \quad \text{ou} \quad \theta = A_1 \sinh(\omega x) + B_1 \cosh(\omega x)$$

2.6.2.1 Ailette rectangulaire longue de section constante

Dans le cas de l'ailette longue, on émet l'hypothèse que : $T(x=L) = T_\infty$, où L est la longueur de l'ailette.

Les conditions aux limites s'écrivent alors : en $x = 0$: $\theta(0) = T_0 - T_\infty$ (a)

en $x = L$: $\theta(L) = 0$ (b)

$$(b) \Rightarrow A = 0$$

$$(a) \Rightarrow B = T_0 - T_\infty$$

d'où :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \exp(-\omega x) \quad (2.56)$$

Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peut être calculé par intégration du flux de convection local :

$$\varphi_p = \int_0^L h p [T(x) - T_{\infty}] dx$$

ou plus facilement en remarquant que dans le cas du régime permanent c'est le même que celui transmis par conduction à la base de l'ailette soit : $\varphi_p = \Phi_c(x=0)$

$$\Phi_c = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda S (T_0 - T_{\infty}) (-\omega) \exp(-\omega x) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{h p}{\lambda S}}$$

d'où :

$$\varphi_p = \sqrt{h p \lambda S (T_0 - T_{\infty})} \quad (W) \quad (2.57)$$

2.6.2.2 Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (\text{conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \operatorname{ch}(\omega x) + \operatorname{th}(\omega L) \operatorname{sh}(\omega x) \quad (2.58)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_p = \omega \lambda S \operatorname{th}(\omega L) (T_0 - T_{\infty}) \quad (W) \quad (2.59)$$

Remarque : si l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur L , $\omega \approx \sqrt{\frac{h}{\lambda e}}$

2.6.2.3 Ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité

La solution générale obtenue est identique au cas 2.6.2.1, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h S [T(x=L) - T_{\infty}] \quad (\text{conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\operatorname{ch}[\omega(L-x)] + \left[\frac{h}{\omega \lambda} \operatorname{sh}[\omega(L-x)] \right]}{\operatorname{ch}(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda} \operatorname{sh}(\omega L)} \quad (2.60)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

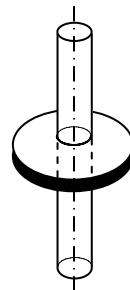
$$\varphi_p = \omega \lambda S (T_0 - T_\infty) \frac{\operatorname{th}(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda}}{1 + \frac{h}{\omega \lambda} \operatorname{th}(\omega L)} \quad (W) \quad (2.61)$$

Remarque : Dans le cas où l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ (ce qui est en général vérifié) : $\frac{h}{\omega \lambda} = \sqrt{\frac{h e}{\lambda}}$. Les ailettes étant en général réalisé en matériau bon conducteur (λ élevé) et ayant une épaisseur

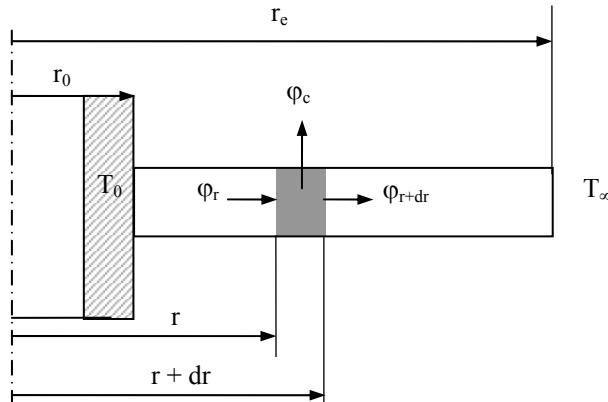
faible, l'hypothèse $\sqrt{\frac{h e}{\lambda}} \ll 1$ est le plus souvent vérifiée, les équations (2.60) et (2.61) se ramènent alors aux expressions plus simples des équations (2.58) et (2.59) qui sont celles utilisées dans la pratique (cf. annexe A.2.10).

2.6.2.4 Ailette circulaire de section rectangulaire

Ces d'ailettes destinées à améliorer le transfert de chaleur entre la paroi externe d'un tube et le milieu ambiant (exemple : tubes de radiateur d'automobile) peuvent être schématisées de la manière suivante :



Effectuons un bilan thermique sur l'élément d'ailette compris entre les rayons r et $r+dr$:



Le bilan d'énergie s'écrit : $\varphi_r = \varphi_{r+dr} + \varphi_c$

Avec :

$$\varphi_r \quad \text{Flux de chaleur transmis par conduction au rayon } r \quad \varphi_r = -\lambda 2 \pi r e \left(\frac{dT}{dr} \right)_r$$

$$\varphi_{r+dr} \quad \text{Flux de chaleur transmis par conduction au rayon } r+dr \quad \varphi_{r+dr} = -\lambda 2 \pi (r+dr) e \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$$

$$\varphi_c \quad \text{Flux de chaleur transmis par convection sur la surface de l'ailette entre } r \text{ et } r+dr \quad \varphi_c = 2 \left\{ h 2 \pi r dr [T(r) - T_\infty] \right\}$$

$$\text{Si } \lambda \text{ est indépendant du rayon } r, \text{ nous obtenons : } \frac{1}{r} \frac{(r+dr) \left(\frac{dT}{dx} \right)_{r+dr} - r \left(\frac{dT}{dx} \right)_r}{dr} = \frac{2h}{\lambda e} [T(x) - T_\infty]$$

$$\text{Soit encore : } \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{\lambda e} \theta \quad \text{où } \theta = T - T_\infty$$

C'est une équation de Bessel (cf. annexe 2.5) dont la solution s'écrit sous la forme :

$$\theta = C_1 I_0(\omega r) + C_2 K_0(\omega r) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{2h}{\lambda e}}$$

C_1 et C_2 étant déterminé par les conditions aux limites :

$$\text{En } r = r_0 \quad : \theta = T_0 - T_\infty$$

$$\text{En } r = r_e \quad : h \theta(r_e) = -\lambda \frac{d\theta}{dr}(r_e) \quad (\text{cas le plus général : transfert de chaleur à l'extrémité})$$

On en déduit les valeurs de C_1 et de C_2 :

$$C_1 = \frac{K_1(\omega r_e) - \frac{h}{\lambda \omega} K_0(\omega r_e)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e) + \frac{h}{\lambda \omega} [I_0(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_0(\omega r_e)]}$$

$$C_2 = \frac{1 - C_1 I_0(\omega r_0)}{K_0(\omega r_0)}$$

Dans le cas où l'on peut faire l'hypothèse du flux nul à l'extrémité : $\sqrt{\frac{h e}{\lambda}} \ll 1$, on aboutit à l'expression simplifiée suivante :

$$\boxed{\frac{T(r) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{K_1(\omega r_e) I_0(\omega r) + I_1(\omega r_e) K_0(\omega r)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)}} \quad (2.62)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a alors pour expression :

$$\boxed{\varphi_p = \lambda 2\pi r_0 e \omega (T_0 - T_\infty) \frac{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) - K_1(\omega r_e) I_0(\omega r_0)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)}} \quad (W) \quad (2.63)$$

2.6.3 Efficacité d'une ailette

Elle définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique $\lambda \rightarrow \infty$, pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'ailette).

Le flux échangé par cette ailette idéale serait :

$$\varphi_{max} = h p L (T_0 - T_\infty) \quad \text{pour une ailette rectangulaire de périmètre } p \text{ et de longueur } L$$

$$\varphi_{max} = 2 h \pi (r_e^2 - r_0^2) (T_0 - T_\infty) \quad \text{pour une ailette circulaire de rayon de base } r_0 \text{ et de rayon externe } r_e.$$

$$\text{L'efficacité de l'ailette s'écrit donc : } \eta = \frac{\varphi_p}{\varphi_{max}}$$

Nous en déduisons les résultats pratiques suivants :

Ailette rectangulaire longue :

$$\boxed{\eta = \frac{1}{\omega L}} \quad (2.64)$$

Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\operatorname{th}(\omega L)}{\omega L} \quad (2.65)$$

Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\operatorname{th}(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda}}{\omega L + \frac{hL}{\lambda} \operatorname{th}(\omega L)} \quad (2.66)$$

Ailette circulaire de section rectangulaire :

$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{2\lambda}{hr_0 r_0}} \frac{1}{\frac{r_e^2}{r_0^2} - 1} \frac{I_1(\omega r_e) K_1(\omega r_0) - K_1(\omega r_e) I_1(\omega r_0)}{I_1(\omega r_e) K_0(\omega r_0) + I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_e)}} \quad (2.67)$$

Dans le cas de géométries plus complexes (ailettes à section variable, ailettes aiguilles...), il existe des formules ou des abaques (cf. annexe A.2.10) permettant de déterminer l'efficacité des ailettes et ensuite le flux de chaleur φ_p extrait par l'ailette grâce à la relation : $\varphi_p = \eta \varphi_{max}$.

2.6.4 Choix des ailettes

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateur d'automobile, carter de moteur refroidi par air, évaporateur de climatiseur...

D'une façon générale, l'usage des ailettes est :

- Peu utile pour les liquides car h est grand.
- Utile dans le cas des gaz car h est faible.

Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique λ est élevée. Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

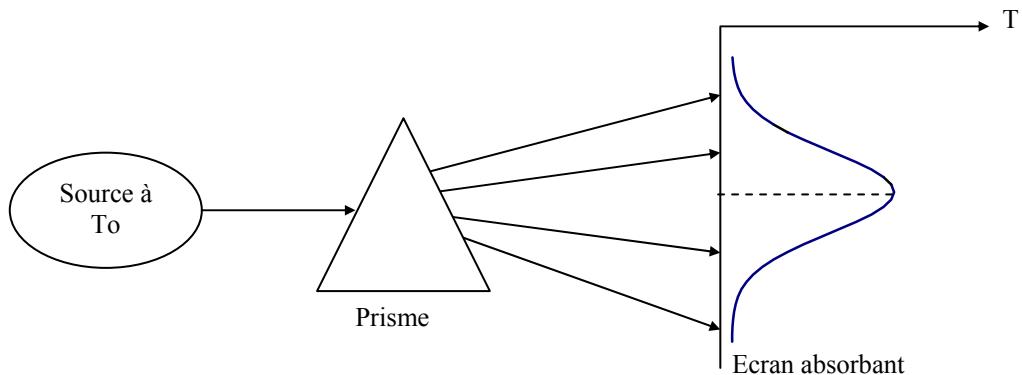
3 TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

3.1 Généralités. Définitions

3.1.1 Nature du rayonnement

Tous les corps, quelque soit leur état : solide, liquide ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur.

Le rayonnement se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière, il est constitué de radiations de différentes longueurs d'onde comme l'a démontré l'expérience de William HERSCHELL :



Principe de l'expérience de William HERSCHELL

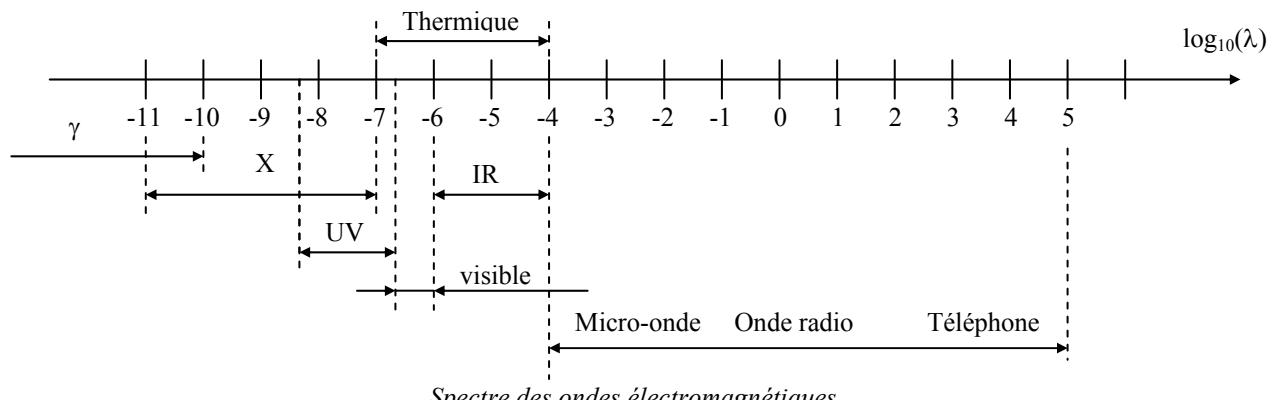
En passant à travers un prisme, les radiations sont plus ou moins déviées selon leur longueur d'onde. On envoie donc les radiations émises par une source à la température T_0 sur un prisme et on projette le faisceau dévié sur un écran absorbant (noirci), on obtient ainsi la décomposition du rayonnement total incident en un spectre de radiations monochromatiques.

Si l'on déplace le long de l'écran un thermomètre, on mesure la température T_e caractérisant l'énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde. En construisant la courbe $T_e = f(\lambda)$, on obtient la répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température T_0 de la source. On constate alors que :

- L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_m variable avec T_0 .
- L'énergie n'est émise que sur un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.

On trouvera représenté sur la figure ci-dessous les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre 0,1 et 100 μm. On notera par ailleurs que le rayonnement est perçu par l'homme :

- Par l'oeil : pour $0,31 \mu\text{m} > \lambda < 0,79 \mu\text{m}$ rayonnement visible.
- Par la peau : pour $0,79 \mu\text{m} < \lambda < 314 \mu\text{m}$ rayonnement IR.



Spectre des ondes électromagnétiques

3.1.2 Définitions

3.1.2.1 Classification

Les grandeurs physiques seront distinguées selon :

- La composition spectrale du rayonnement
 - Si la grandeur est relative à l'ensemble du spectre elle est dite totale.
 - Si elle concerne un intervalle spectral étroit $d\lambda$ autour d'une longueur d'onde λ elle est dite monochromatique : G_λ .
- La distribution spatiale du rayonnement
 - Si la grandeur est relative à l'ensemble des directions de l'espace elle est dite hémisphérique.
 - Si elle caractérise une direction donnée de propagation elle est dit directionnelle : G_x .

3.1.2.2 Définitions relatives aux sources

Flux

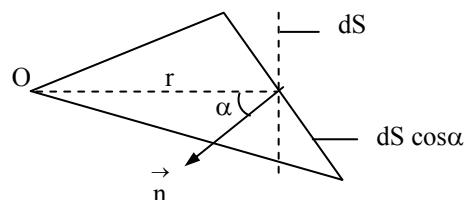
- On appelle flux d'une source S la puissance rayonnée notée ϕ par S dans tout l'espace qui l'entoure, sur toutes les longueurs d'onde. Le flux ϕ s'exprime en W
- Le flux envoyé par un élément de surface dS dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ est noté $d^2\phi$
- Le flux envoyé dans tout l'espace par une surface élémentaire dS est noté $d\phi$.
- Le flux envoyé par une surface S dans l'angle solide $d\Omega$ entourant la direction Ox est noté $d\phi_x$.

$$\text{Nous avons donc les relations suivantes : } d\phi = \int_{\Omega} d^2\phi \quad \text{et} \quad \phi = \int_S d\phi = \int_{\Omega} d\phi_x$$

Rappel sur les angles solides élémentaires :

L'angle solide sous lequel depuis un point O on voit une surface S est par définition l'aire de la surface intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet O s'appuyant sur le contour de la surface S.

L'angle solide $d\Omega$ sous lequel est vu d'un point O le contour d'une petite surface dS (assimilée à une surface plane) peut être calculé par :



$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (3.1)$$

Emittance énergétique

- Monochromatique :

Un élément de surface dS émet dans toutes les directions du $\frac{1}{2}$ espace un certain flux d'énergie par rayonnement. Ce flux est réparti sur un intervalle de longueurs d'ondes. Si l'on considère le flux d'énergie $d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}$ émis entre les deux longueurs d'ondes λ et $\lambda+d\lambda$, on définit l'émittance monochromatique d'une source à la température T par :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}}{dS d\lambda} \quad (\text{W m}^{-3}) \quad (3.2)$$

- Totale :

C'est la densité de flux de chaleur émise par rayonnement par dS sur tout le spectre des longueurs d'ondes. Elle n'est plus fonction que de la température T et de la nature de la source :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \frac{d\phi}{dS} \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (3.3)$$

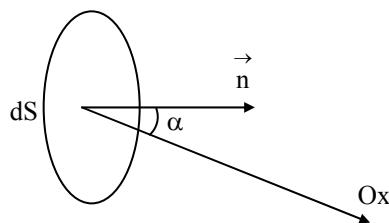
Intensité énergétique dans une direction

On appelle intensité énergétique I_x le flux par unité d'angle solide émis par une surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant la direction Ox :

$$I_x = \frac{d^2\varphi_x}{d\Omega} \quad (3.4)$$

Luminance énergétique dans une direction

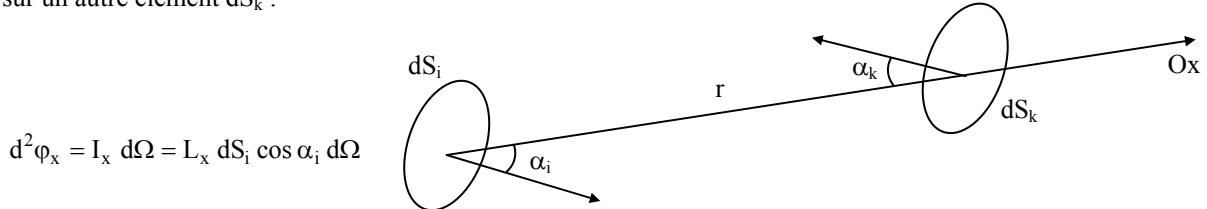
Soit α l'angle fait par la normale \vec{n} à la surface émettrice S avec la direction Ox suivant laquelle la surface S possède une intensité énergétique I_x . La projection de S sur le plan perpendiculaire à Ox s'appelle la surface émettrice apparente Σ et l'intensité énergétique dans la direction Ox par unité de surface émettrice apparente s'appelle la luminance énergétique L :



$$L_x = \frac{I_x}{dS_x} = \frac{I_x}{dS \cos \alpha} = \frac{d^2\varphi_x}{d\Omega dS \cos \alpha} \quad (3.5)$$

Application : Formule de Bougouer

On déduit des définitions précédentes l'expression du flux $d^2\varphi_x$ envoyé par un élément dS_i de luminance L_x sur un autre élément dS_k :



$$d^2\varphi_x = I_x d\Omega = L_x dS_i \cos \alpha_i d\Omega$$

$$d\Omega = \frac{dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$$

D'où la formule de Bougouer :

$$d^2\varphi_x = L_{ix} \frac{dS_i \cos \alpha_i dS_k \cos \alpha_k}{r^2} \quad (3.6)$$

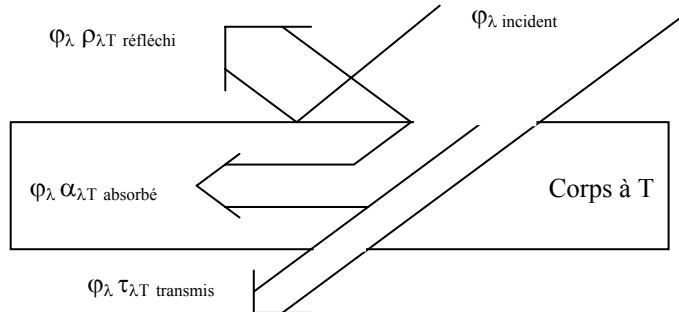
3.1.2.3 Définitions relatives à une récepteur

ECLAIREMENT

C'est l'homologue de l'émissance pour une source. L'éclairage est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions.

Réception du rayonnement par un solide

Quand un rayon incident d'énergie φ_λ frappe un corps à la température T , une partie $\varphi_\lambda \rho_{\lambda T}$ de l'énergie incidente est réfléchie par la surface S , une autre partie $\varphi_\lambda \alpha_{\lambda T}$ est absorbée par le corps qui s'échauffe et le reste $\varphi_\lambda \tau_{\lambda T}$ est transmis et continue son chemin :



$$\text{On a évidemment : } \varphi_\lambda = \varphi_\lambda \rho_{\lambda T} + \varphi_\lambda \alpha_{\lambda T} + \varphi_\lambda \tau_{\lambda T} \quad \text{d'où :} \quad \rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1.$$

On définit ainsi les pouvoirs monochromatiques réfléchissant $\rho_{\lambda T}$, absorbant $\alpha_{\lambda T}$ et filtrant $\tau_{\lambda T}$ qui sont fonction de la nature du corps, de son épaisseur, de sa température T , de la longueur d'onde λ du rayonnement incident et de l'angle d'incidence.

Si l'on considère l'énergie incidente sur tout le spectre des longueurs d'onde, on obtient les pouvoirs réfléchissants ρ_T , absorbant α_T et filtrant τ_T totaux. Les valeurs de ρ_T , α_T et τ_T de certains corps sont données en annexe A.3.1.

3.1.2.4 Corps noir, corps gris

Corps noir

C'est un corps qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit indépendamment de son épaisseur, de sa température, de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde du rayonnement incident, il est défini par : $\alpha_{\lambda T} = 1$. Une surface enduite de noir de fumée est approximativement un corps noir.

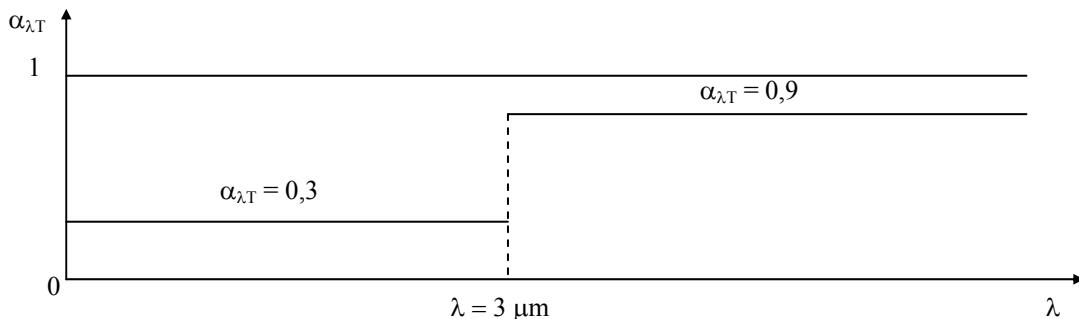
Propriétés du corps noir :

- Tous les corps noirs rayonnent de la même manière.
- Le corps noir rayonne plus que le corps non noir à la même température.

Corps gris

Un corps gris est un corps dont le pouvoir absorbant $\alpha_{\lambda T}$ est indépendant de la longueur d'onde λ du rayonnement qu'il reçoit. Il est défini par : $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$.

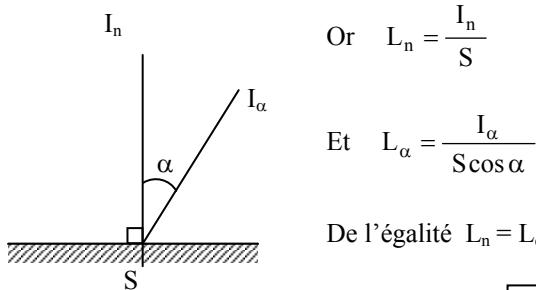
En général, on considère les corps solides comme des corps gris par intervalle et on utilise un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour $\lambda < 3 \mu\text{m}$ (rayonnement émis par des corps à haute température comme le Soleil) et un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour $\lambda > 3 \mu\text{m}$ (rayonnement émis par les corps à faible température : atmosphère, absorbeur solaire,...). On pourra à titre d'exemple considérer les valeurs suivantes pour la peinture blanche :



3.2 Lois du rayonnement

3.2.1 Loi de Lambert

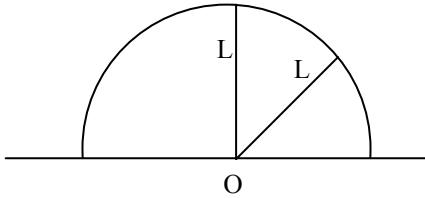
Dans le cas où la source est isotrope, la luminance est indépendante de la direction : $L_x = L$



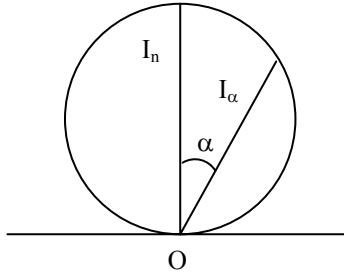
De l'égalité $L_n = L_\alpha$ on déduit la loi de Lambert pour une source isotrope :

$$I_\alpha = I_n \cos \alpha \quad (3.7)$$

Ainsi l'indicatrice de l'intensité est une sphère tangente en O à la surface émettrice lorsque celle-ci suit la loi de Lambert :



Luminance d'une source isotrope



Intensité énergétique d'une source isotrope

Remarque : Lorsqu'un corps suit la loi de Lambert, on montre qu'émittance et luminance sont proportionnelles :

$$M = \pi L \quad (\text{W.m}^{-2}) \quad (3.8)$$

3.2.2 Lois physiques

3.2.2.1 Loi de Kirchoff

A une température T donnée et pour une longueur d'onde λ donnée, le rapport $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$ est le même pour tous les corps.

Pour le corps noir : $\alpha_{\lambda T} = 1$, le rapport $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$ est donc égal à $M_{\lambda T}$ en appelant $M_{\lambda T}$ l'émittance monochromatique du corps noir, donc :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} M_{\lambda T} \quad (\text{W.m}^{-3}) \quad (3.9)$$

L'émittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique par l'émittance monochromatique du corps noir à la même température, d'où l'intérêt de connaître le rayonnement émis par le corps noir.

Cas des corps gris : loi de Kirchoff généralisée

Dans le cas du corps gris, on peut généraliser cette loi ce qui facilite les applications. En effet pour un corps gris $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$, donc :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda T} M_{\lambda T} d\lambda = \alpha_T \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda$$

En appelant M_{tot} l'émissance totale du corps noir à la température T , nous obtenons pour un corps gris :

$$M_T = \alpha_T M_{\text{tot}} \quad (\text{W.m}^{-2}) \quad (3.10)$$

L'émissance totale M_T d'un corps gris à la température T est égal au produit de son pouvoir absorbant α_T par l'émissance totale M_{tot} du corps noir à la même température.

3.2.2.2 Rayonnement du corps noir

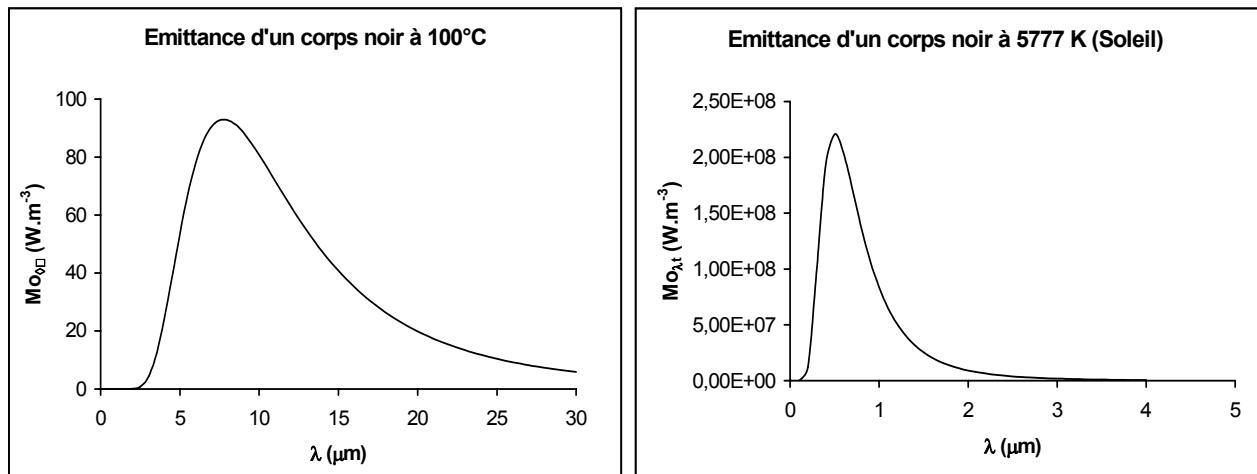
Emittance monochromatique

Elle est donnée par la loi de Planck :

$$M_{\lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (\text{W.m}^{-3}) \quad (3.11)$$

avec : $C_1 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^{-2}$
 $C_2 = 1,4385 \cdot 10^{-2} \text{ m.K}$

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de $M_{\lambda T}$ en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :



Remarques :

- La longueur d'onde λ_M pour laquelle l'émission est maximale varie avec la température de la source :

$$\lambda_M = \frac{2,897 \cdot 10^3}{T} \quad (\mu\text{m}) \quad (3.12) \quad \text{et}$$

$$M_{\lambda_M T} = 0,410 \left(\frac{T}{10} \right)^5 \quad (\text{W.m}^{-3}) \quad (3.13)$$

Avec T : Température (K)

- Pour le Soleil ($T \approx 5777$ K), 90% de l'énergie est émise entre 0,31 et 2,5 μm, le maximum étant situé dans le spectre visible. Par contre, un corps noir à 373 K (100°C) a son émission maximale vers $\lambda = 8$ μm dans l'IR.

Emittance totale M_{O_T}

L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émittance totale M_{O_T} du corps noir qui n'est plus fonction que de la température T, on obtient la loi de Stephan-Boltzmann :

$$M_{\text{O}_T} = \sigma T^4 \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (3.14)$$

avec $\sigma = 5,675 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

Dans les calculs on écrira souvent : $\sigma = 5,675 \left(\frac{T}{100} \right)^4$

Fraction de l'émittance dans un intervalle donné de longueurs d'onde $[\lambda_1, \lambda_2]$

C'est la fraction du flux émis par l'unité de surface du corps noir à la température T entre les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 :

$$F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda T} d\lambda}{\int_0^{\infty} M_{\lambda T} d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} M_{\lambda T} d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_{\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} M_{\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} - \frac{\int_0^{\lambda_1} M_{\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4}$$

Ce qui peut également s'écrire : $F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = F_{0 - \lambda_2 T} - F_{0 - \lambda_1 T}$; Calculons $F_{0 - \lambda T}$ à T constant :

$$F_{0 - \lambda T} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 (\lambda T)^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} T d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 (\lambda T)^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} d(\lambda T)$$

Nous constatons que $F_{0 - \lambda T}$ ne dépend que du produit λT . Il suffit donc de dresser une fois pour toutes une table à une entrée unique λT donnant $F_{0 - \lambda T}$ et de l'utiliser pour le calcul de $F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = F_{0 - \lambda_2 T} - F_{0 - \lambda_1 T}$. Le tableau des valeurs est donné en annexe A.3.2.

3.2.2.3 Rayonnement des corps non noirs

Facteur d'émission ou émissivité

On définit les propriétés émissives des corps réels par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde et on les caractérise à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{\text{O}_T}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_T = \frac{M_T}{M_{\text{O}_T}} \quad (3.15)$$

D'après la loi de Kirchoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} \quad (3.16)$$

Cas des corps gris

Ils sont caractérisés par $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ soit d'après ce qui précède : $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$

Or : $M_T = \varepsilon_T M_0 T$, nous en déduisons l'émittance du corps gris à la température T :

$$M_T = \varepsilon_T \sigma T^4 \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (3.17)$$

3.3 Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces

Hypothèse : Les surfaces considérées seront supposées homogènes, opaques, isothermes et grises.

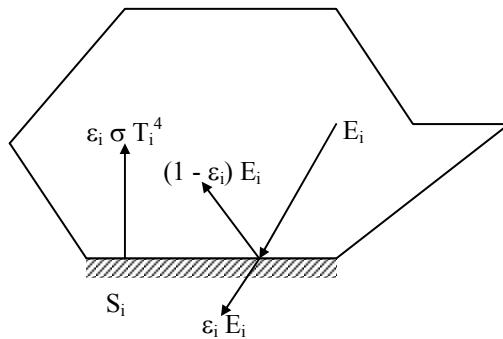
3.3.1 Radiosité et flux net perdu

Le rayonnement qui quitte une surface S_i est la somme de son émission propre et de la réflexion d'une partie du rayonnement incident sur cette surface. On appelle **radiosité**, que l'on note J_i , l'émittance apparente de la surface S_i donc :

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) E_i \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (3.18)$$

Avec E_i : ECLAIREMENT de la surface S_i (W.m^{-2})

Considérons maintenant la surface S_i choisie parmi n surfaces isothermes et homogènes qui délimitent un volume :



La densité d'énergie nette perdue par rayonnement par S_i s'écrit : $\phi_{i_{\text{net}}} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - \varepsilon_i E_i$

En introduisant, d'après (2.18), la radiosité J_i par : $E_i = \frac{1}{1 - \varepsilon_i} (J_i - \varepsilon_i \sigma T_i^4)$, nous obtenons :

$$\phi_{i_{\text{net}}} = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) = \varepsilon_i (\sigma T_i^4 - E_i) = J_i - E_i \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (3.19)$$

3.3.2 Facteur de forme géométrique

On considère une surface S_i qui sur toute son étendue a une émission apparente $\varphi_i = S_i J_i$.

La surface S_i est environnée par un nombre n de surfaces et φ_i est envoyé sur toutes ces surfaces (la surface S_i peut également rayonner vers elle-même si elle est concave). Le flux apparent φ_i peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$\varphi_i = \varphi_{i \rightarrow 1} + \varphi_{i \rightarrow 2} + \dots + \varphi_{i \rightarrow i} + \dots + \varphi_{i \rightarrow n}$$

Calculons $\varphi_{i \rightarrow k}$ qui est la part du flux quittant S_i qui atteint S_k :

D'après la formule de Bougouer, le flux $d^2\varphi_{i \rightarrow k}$ envoyé par la surface élémentaire dS_i vers la surface élémentaire dS_k s'écrit :

$$d^2\varphi_{i \rightarrow k} = L_i \frac{dS_i \cos \alpha_i dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$$

avec $L_i = \frac{J_i}{\pi}$ si la surface S_i suit la loi de Lambert.

$$\text{Nous en déduisons : } \varphi_{i \rightarrow k} = J_i \int \int_{S_i S_k} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_k}{\pi r^2} dS_i dS_k$$

Le facteur de forme géométrique f_{ik} de la surface S_i par rapport à la surface S_k est alors défini par la relation :

$$S_i f_{ik} = \int \int_{S_i S_k} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_k}{\pi r^2} dS_i dS_k \quad (3.20)$$

Il ne dépend que de la géométrie et de la disposition relative des surfaces S_i et S_k . Des formules donnent sa valeur pour les cas de figure les plus courants (cf. annexe A.3.3). Le flux $\varphi_{i \rightarrow k}$ peut alors s'écrire simplement :

$$\varphi_{i \rightarrow k} = J_i f_{ik} S_i$$

Remarques :

- Le 2^{ème} membre de la formule (3.20) de définition de f_{ik} est symétrique en i et k , on en déduit que :

$$S_i f_{ik} = S_k f_{ki} \quad (3.21)$$

- La relation $\varphi_i = \varphi_{i \rightarrow 1} + \varphi_{i \rightarrow 2} + \dots + \varphi_{i \rightarrow i} + \dots + \varphi_{i \rightarrow n}$ peut s'écrire :

$$\varphi_i = J_i f_{i1} S_i + J_i f_{i2} S_i + \dots + J_i f_{in} S_i = J_i S_i (f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{in}) \quad \text{or} \quad \varphi_i = S_i J_i$$

d'où :

$$f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{in} = 1 \quad (3.22)$$

Ces deux relations sont utiles pour la détermination des facteurs de formes de plusieurs surfaces en présence.

3.3.3 Calcul des flux

Le flux $\varphi_{\rightarrow i}$ reçu par la surface S_i s'écrit : $\varphi_{\rightarrow i} = E_i S_i = \sum_{k=1}^n \varphi_{k \rightarrow i}$ or $\varphi_{k \rightarrow i} = J_k S_k f_{ki}$

D'où : $E_i S_i = \sum_{k=1}^n J_k S_k f_{ki} = \sum_{k=1}^n J_k S_i f_{ik}$ d'après (3.21).

En reportant cette expression dans (3.18), nous obtenons : $J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{k=1}^n J_k f_{ik}$

$$\text{Soit encore : } \sigma T_i^4 = \frac{J_i}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{k=1}^n (1 - \varepsilon_i) J_k f_{ik}$$

En utilisant le symbole de Kronecker, nous pouvons écrire : $J_i = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} J_k$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon_i} [\delta_{ik} - (1 - \varepsilon_i) f_{ik}] J_k = \sigma T_i^4 \quad (3.23)$$

Nous écrirons cette relation pour toutes les surfaces S_i dont on connaît les températures. Pour celles dont on connaît plutôt la densité de flux net perdu $\phi_{i_{\text{net}}}$ nous utiliserons la relation : $\phi_{i_{\text{net}}} = J_i - E_i = J_i - \sum_{k=1}^n f_{ik} J_k$ qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^n (\delta_{ik} - f_{ik}) J_k = \phi_{i_{\text{net}}} \quad (3.24)$$

Méthode de résolution

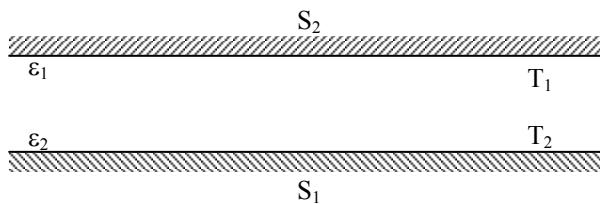
Si l'on connaît p températures et $(n-p)$ densités de flux nets $\phi_{i_{\text{net}}}$, on écrit p fois l'équation (3.23) et $(n-p)$ fois l'équation (3.24), on obtient ainsi un système linéaire de n équations à n inconnues : $J_1, J_2, \dots, J_p, T_{p+1}, \dots, T_n$.

La résolution de ce système permet de calculer les $(n-p)$ températures et les p radiosités inconnues. Les p densités de flux nets inconnues se calcurent ensuite par la relation : $\phi_{i_{\text{net}}} = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i)$

Remarque :

Si une surface est noire ($\varepsilon_i = 1$), la relation (3.23) ne peut pas être utilisée. Nous avons alors simplement dans ce cas la relation : $J_i = \sigma T_i^4$ et l'on résout le système des $(n-1)$ équations restantes.

Exemple d'application : Cas de deux plans parallèles infinis



On suppose que les températures T_1 et T_2 des deux surfaces S_1 et S_2 sont connues, on cherche à déterminer le flux net perdu par chacune de ces surfaces.

Nous avons $f_{11} = f_{22} = 0$ car les surfaces S_1 et S_2 sont planes et ne peuvent pas rayonner vers elles-mêmes.

Nous en déduisons $f_{12} = 1$ et $f_{21} = 1$ en appliquant la relation $\sum_{k=1}^n f_{ik} = 1$ pour $i = 1$ et pour $i = 2$.

La relation (3.23) s'écrit alors de la manière suivante pour $i = 1$ et $i = 2$:

$$\begin{cases} J_1 - (1 - \varepsilon_1) J_2 = \sigma \varepsilon_1 T_1^4 \\ -(1 - \varepsilon_2) J_1 + J_2 = \sigma \varepsilon_2 T_2^4 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } J_1 = \sigma \frac{\varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 (1-\varepsilon_1) T_2^4}{1 - (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}$$

$$\text{et } \phi_{1_{\text{net}}} = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} (\sigma T_1^4 - J_1) = \sigma T_1^4 \left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) = \sigma T_1^4 \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 (1-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

$$\phi_{1_{\text{net}}} = -\phi_{2_{\text{net}}} = \sigma \left(T_1^4 - T_2^4 \right) \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Soit finalement :

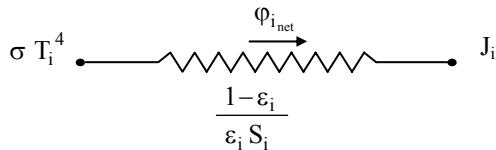
$$\boxed{\phi_{1_{\text{net}}} = -\phi_{2_{\text{net}}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}} \quad (3.25)$$

3.3.4 Analogie électrique

Flux net perdu par une surface

Nous avons montré que : $\phi_{i_{\text{net}}} = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i)$ ce qui peut encore s'écrire : $\phi_{i_{\text{net}}} = \frac{\sigma T_i^4 - J_i}{\varepsilon_i S_i}$

Par analogie, cette relation peut être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



On notera que cette résistance thermique de rayonnement ne dépend que des propriétés physiques de la surface S_i et qu'elle est nulle pour un corps noir.

Flux net échangé entre plusieurs surfaces

Le flux net perdu par la surface S_i dans ses échanges radiatifs avec l'ensemble des surfaces environnantes s'écrit d'après la relation (2.) : $\phi_{i_{\text{net}}} = (J_i - E_i) S_i$

Le flux $\phi_i = J_i S_i$ quittant la surface S_i peut se décomposer de la manière suivante :

$$\phi_i = \phi_{i \rightarrow 1} + \phi_{i \rightarrow 2} + \dots + \phi_{i \rightarrow n} = \sum_{j=1}^n J_i S_i f_{ij}$$

L'éclairement E_i reçu par la surface S_i peut se décomposer de la manière suivante :

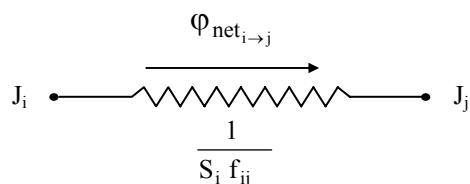
$$E_i S_i = \sum_{j=1}^n \phi_{j \rightarrow i} = \sum_{j=1}^n J_j S_j f_{ji}$$

Le flux net perdu par S_i peut donc s'écrire :

$$\phi_{i_{\text{net}}} = \sum_{j=1}^n J_i S_i f_{ij} - J_j S_j f_{ji} = \sum_{j=1}^n S_i f_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^n \phi_{\text{net}_{i \rightarrow j}}$$

Le flux net échangé entre les surfaces S_i et S_j s'écrit donc : $\phi_{\text{net}_{i \rightarrow j}} = (J_i - J_j) S_i f_{ij} = \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{S_i f_{ij}}}$

Cet échange radiatif peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :



On notera que cette résistance thermique de rayonnement est purement géométrique et qu'elle ne dépend pas des propriétés physiques des surfaces S_i et S_j .

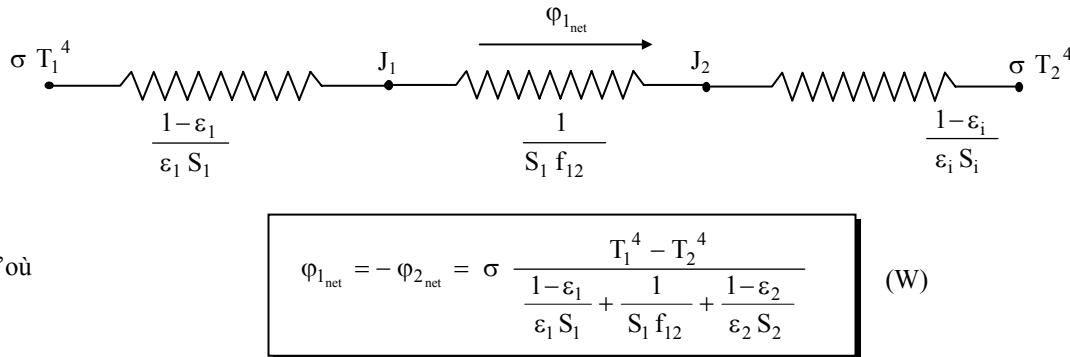
Application : Echange entre deux surfaces grises

Si les deux surfaces S_1 et S_2 sont seules en présence, le flux net $\varphi_{1_{\text{net}}}$ perdu par S_1 est égal au flux net $\varphi_{2_{\text{net}}}$ gagné par S_2 . Ce flux est encore égal au flux net $\varphi_{\text{net}_{1 \rightarrow 2}}$ échangé entre S_1 et S_2 , nous avons donc les égalités :

$$\varphi_{1_{\text{net}}} = \varphi_{\text{net}_{1 \rightarrow 2}} = -\varphi_{2_{\text{net}}}$$

$$\text{Soit } \varphi_{1_{\text{net}}} = \frac{\sigma T_1^4 - J_1}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{S_1 f_{12}}} = \frac{J_2 - \sigma T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

Cet échange radiatif peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant :



Utilisation des schémas analogiques

Dans les systèmes simples, il est plus rapide d'utiliser la technique des schémas analogiques que celle du système linéaire. Lorsqu'on a établi le schéma analogique, on calcule les différentes résistances du circuit puis on résout par les techniques habituelles utilisées en électricité : loi d'association des résistances en série et en parallèle, loi des noeuds,...

Exemple d'application : Cas d'une surface S_1 convexe complètement entourée par une surface S_2

La surface S_1 étant convexe elle ne peut pas rayonner vers elle-même donc : $f_{11} = 0$

La relation $f_{11} + f_{12} = 1$ nous permet de déduire : $f_{12} = 1$

La relation (3.26) s'écrit alors :

$$\varphi_{1_{\text{net}}} = -\varphi_{2_{\text{net}}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 S_2} - \frac{1}{S_2}}$$

D'où :

$$\boxed{\varphi_{1_{\text{net}}} = -\varphi_{2_{\text{net}}} = \sigma \frac{S_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}} \quad (\text{W}) \quad (3.27)$$

Cas particulier où la surface S_1 est « petite » devant la surface S_2 :

Nous avons dans ce cas : $\frac{S_1}{S_2} \approx 0$ et la relation (3.27) s'écrit alors :

$$\boxed{\varphi_{1_{\text{net}}} = -\varphi_{2_{\text{net}}} = \sigma \varepsilon_1 S_1 (T_1^4 - T_2^4)} \quad (\text{W}) \quad (3.28)$$

3.4 Emission et absorption des gaz

3.4.1 Spectre d'émission des gaz

Beaucoup de gaz et de mélanges de gaz sont transparents pour $T < 3000$ K : O₂, N₂, air sec...

Par contre, les gaz hétéropolaires di- ou tri-atomiques (CO₂, SO₂,...) et des vapeurs d'hydrocarbures ou d'alcools présentent des bandes d'émission et d'absorption de largeur plus ou moins grande dans le spectre, le gaz restant transparent entre ces bandes. Les spectres d'émission sont de plus différents selon la température du gaz.

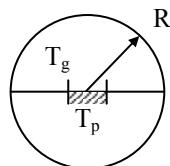
Le CO₂ et la vapeur d'eau sont importants en pratique :

- Présents en grande quantité dans les gaz de combustion, leur rayonnement est parfois essentiel dans les échanges de chaleur entre les flammes, les gaz chauds et les charges à réchauffer.
- Présents dans l'atmosphère, le flux qu'ils envoient vers la Terre joue un rôle important dans son bilan thermique :
 - Les refroidissements nocturnes importants observés en saison sèche s'expliquent par l'abaissement du rayonnement émis par l'atmosphère du fait de la faible présence de vapeur d'eau dans l'air.
 - L'augmentation de la teneur en CO₂ dans l'atmosphère du fait des émissions industrielles et automobiles augmente le rayonnement émis par l'atmosphère vers la Terre et contribuent au réchauffement de la Terre (effet de serre).

3.4.2 Echange thermique entre un gaz et une paroi

Cas particulier

Traitons le cas d'une masse de gaz hémisphérique et d'une paroi plane de petites dimensions placée au centre de la base de l'hémisphère :



Soient T_p et T_g les températures de la paroi et du gaz et R le rayon de l'hémisphère.

Le gaz envoie sur la paroi un rayonnement dont la densité de flux a pour valeur : $\sigma \varepsilon_g T_g^4$, ε_g étant le facteur total d'émission de la couche de gaz d'épaisseur R à la température T_g. ε_g a la même valeur dans toutes les directions car la couche de gaz a la même épaisseur dans toutes les directions du fait de sa forme hémisphérique.

La densité de flux absorbé par la paroi est : $\varepsilon_p \sigma \varepsilon_g T_g^4$, ε_p étant le facteur total d'absorption de la paroi.

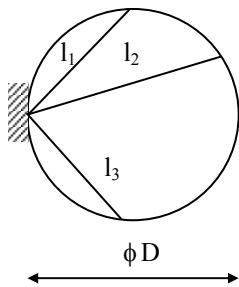
La paroi émet par ailleurs un rayonnement d'une densité de flux égale à : $\sigma \varepsilon_p T_p^4$

Au total, la paroi reçoit la densité de flux net :

$$\phi_{p_{net}} = \varepsilon_p \sigma (\varepsilon_g T_g^4 - T_p^4) \quad (W m^{-2}) \quad (3.29)$$

Cas général

Dans le cas particulier que nous venons de traiter, tous les trajets aboutissant à la paroi ont la même longueur donc ε_g est le même dans toutes les directions. Il n'en n'est pas ainsi dans le cas général. Par exemple, dans le cas d'une paroi sphérique de diamètre D enfermant une masse gazeuse, les trajets aboutissant à la paroi ont une longueur comprise entre 0 et D. Le calcul de la densité de flux envoyée par le gaz sur la paroi nécessite donc une intégration par rapport à l'angle d'incidence.



On trouve par exemple dans ce cas que la densité de flux est égale à celle que l'on obtiendrait avec une hémisphère de rayon équivalent $R = \frac{2}{3} D$

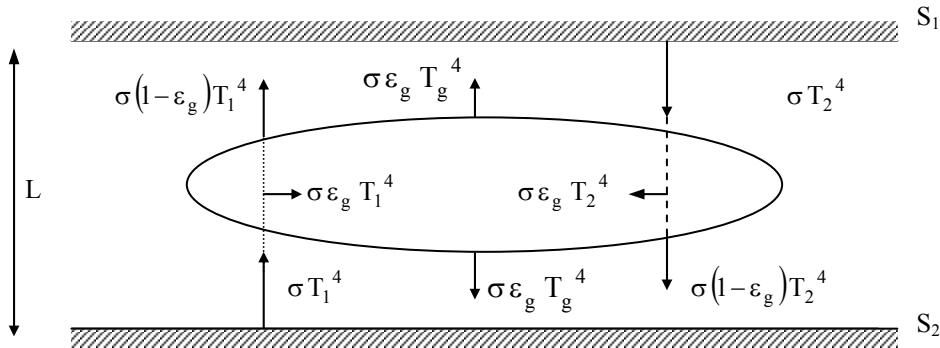
D'une manière plus générale, on trouve qu'une bonne approximation du rayon de l'hémisphère équivalent peut être calculée par :

$$R = \frac{4V}{S} \quad (m) \quad (3.30)$$

Des valeurs plus précises sont données dans le tableau de l'annexe A.3.6.

Echange thermique entre deux parois séparées par un gaz

Considérons un gaz séparant deux surfaces S_1 et S_2 supposées planes, parallèles et noires, à des températures différentes T_1 et T_2 . On admettra que la masse de gaz est à la température uniforme T_g et qu'elle a une épaisseur constante L .



Schématisation des flux radiatifs

La température T_g du gaz peut être calculée en fonction de T_1 et de T_2 en écrivant que le flux de chaleur absorbé par la couche gazeuse est égal au flux qu'elle rayonne vers les deux parois :

$$2\sigma\epsilon_g T_g^4 = \epsilon_g \sigma T_1^4 + \epsilon_g \sigma T_2^4$$

d'où : $T_g^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$

La densité de flux qui passe de la surface S_1 à la surface S_2 s'écrit :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 (1 - \epsilon_g) + \sigma \epsilon_g T_g^4 - \sigma T_2^4$$

D'où :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \sigma \left(T_1^4 - T_2^4 \right) \left(1 - \frac{\epsilon_g}{2} \right) \quad (\text{W m}^{-2}) \quad (3.31)$$

4 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

4.1 Rappels sur l'analyse dimensionnelle

4.1.1 Dimensions fondamentales

On peut exprimer les grandeurs physiques en fonction d'un nombre limité de dimensions fondamentales.

Exemples : Vitesse : $L \cdot T^{-1}$; viscosité dynamique : $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$; force : $M \cdot L \cdot T^{-2}$

Sur ces exemples on voit que le nombre de dimensions fondamentales est de 3 : Masse M, Longueur L, Temps T.

Ces trois dimensions fondamentales ne sont pas toujours suffisantes. Pour les problèmes de transfert de chaleur, il est nécessaire d'ajouter une 4^{ème} dimension : la température θ et, lorsque l'échange d'énergie entre grandeurs mécaniques et grandeurs thermiques ne sera pas mesurable, on ajoutera la quantité de chaleur Q qui sera considérée comme une 5^{ème} dimension.

Remarque : Q, homogène à un travail qui s'exprime en fonction des dimensions fondamentales M, L et T par $Q = M \cdot L \cdot T^{-2}$ n'est pas une vraie dimension fondamentale.

La méthode d'analyse dimensionnelle, qui repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation est connue sous le nom de Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des groupements π .

4.1.2 Principe de la méthode

Si l'on peut représenter mathématiquement une loi physique en exprimant une variable physique G_1 en fonction d'un certain nombre d'autres variables physiques indépendantes G_2, \dots, G_n , c'est à dire si $G_1 = f(G_2, G_3, \dots, G_n)$ ou encore $f(G_1, G_2, \dots, G_n) = 0$, le problème peut être simplifié de la manière suivante :

- On écrit pour chaque variable G_i , l'équation dimension en fonction des dimensions fondamentales. On dispose alors de n équations qui ont nécessité p dimensions fondamentales pour caractériser toutes les grandeurs physiques.
- On préleve p de ces n équations que l'on considère comme équations de base. Bien que le choix des équations prélevées soit arbitraire, il faut toutefois que chaque dimension fondamentale apparaisse au moins une fois sur l'ensemble des p équations.
- Les (n-p) équations restantes se présentent alors sous forme de (n-p) rapports sans dimensions appelés groupements π qui sont des "grandes réduites". On obtient alors une équation réduite :

$$g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

Un groupement π est le rapport d'une équation dimension d'une grandeur physique n'appartenant pas à l'ensemble des équations de base au produit des équations de base, chacune d'elle étant portée à une certaine puissance :

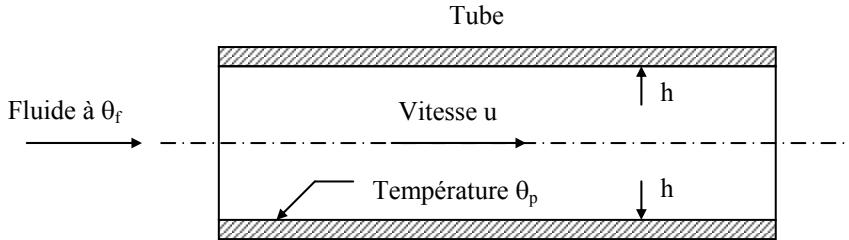
$$\pi_i = \frac{[G_i]}{[G_1]^{a_i} [G_2]^{b_i} \dots [G_p]^{e_i}}$$

Pour chaque dimension fondamentale M, L, T, θ , Q figurant au dénominateur, on fait la somme des exposants que l'on identifie avec l'exposant de la même dimension figurant dans l'équation dimension de la grandeur physique du numérateur. On obtient ainsi un système linéaire de p équations dont la résolution permet de déterminer les p exposants des équations de base du dénominateur.

Il suffit alors d'écrire le rapport π en fonction des grandeurs physiques attachées aux équations dimensions de départ.

4.1.3 Exemple d'application

Considérons un fluide en circulation forcée dans une canalisation cylindrique pour lequel on se propose de déterminer le coefficient de convection h relatif au transfert de chaleur fluide-paroi qui correspond à une convection forcée :



Détermination des grandeurs physiques :

Il faut déterminer tous les paramètres dont dépend la densité de flux de chaleur ϕ (liée à h par $\phi = h \Delta T$), ce sont ici :

- Les caractéristiques du fluide :
 - λ coefficient de conductibilité thermique
 - c_p chaleur massique
 - ρ masse volumique
 - μ viscosité dynamique
- Les caractéristiques de l'écoulement
 - u vitesse moyenne du fluide
- La géométrie de la surface d'échange
 - D diamètre de la conduite
- L'écart de température paroi-fluide ΔT

$$\text{d'où : } f(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

Équation dimension de chaque grandeur :

Il faut ensuite écrire l'équation aux dimensions fondamentales M, L, T, θ, Q de chacune des grandeurs, ce qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \lambda &: Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ c_p &: Q \cdot M^{-1} \cdot \theta^{-1} \\ \rho &: M \cdot L^{-3} \\ \mu &: M \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \\ u &: L \cdot T^{-1} \\ D &: L \\ T &: \theta \\ \phi &: Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \end{aligned}$$

Détermination des groupements π :

Il faut maintenant choisir 5 équations de base (toutes les dimensions fondamentales ont été utilisées) de façon à ce que les 5 dimensions fondamentales figurent au moins une fois dans l'ensemble des équations.

Prenons par exemple : $\lambda, \rho, u, D, \Delta\theta$, il reste ϕ, c_p et μ .

On écrit alors les 3 rapports sans dimension correspondants à ces variables sous la forme :

$$\pi_1 = \frac{\phi}{T^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} D^{d_1} u^{e_1}} ; \quad \pi_2 = \frac{c_p}{T^{a_2} \lambda^{b_2} \rho^{c_2} D^{d_2} u^{e_2}} ; \quad \pi_3 = \frac{\mu}{T^{a_3} \lambda^{b_3} \rho^{c_3} D^{d_3} u^{e_3}}$$

Pour chaque rapport π , on remplace les grandeurs physiques par leurs équations dimensions ce qui donne par exemple pour π_1 :

$$[\pi_1] = \frac{Q T^{-1} L^{-2}}{\theta^{a1} (Q T^{-1} L^{-1} \theta^{-1})^{b1} (M L^{-3})^{c1} L^{d1} (L T^{-1})^{e1}}$$

Pour chaque dimension fondamentale, on identifie les exposants de puissance entre numérateur et dénominateur relatifs à une même dimension ce qui conduit au système :

$$\begin{aligned} (Q) : \quad & 1 = b_1 \\ (T) : \quad & -1 = -b_1 - c_1 \\ (L) : \quad & -2 = -b_1 - 3c_1 + d_1 + e_1 \\ (\theta) : \quad & 0 = a_1 - b_1 \\ (M) : \quad & 0 = c_1 \end{aligned}$$

$$\text{Le rapport } \pi_1 \text{ s'écrit donc } \pi_1 = \frac{\phi D}{\Delta T \lambda}$$

Ce qui avec $\phi = h \Delta \theta$ peut encore s'écrire :

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}$$

On obtient de la même manière :

$$\pi_2 = \frac{\rho u D c_p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingham nous permet d'affirmer que la relation :

$$f(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

entre 8 variables peut s'exprimer à l'aide des trois nombres sans dimension π_1, π_2 et π_3 sous la forme :

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad \text{ou} \quad \pi_1 = f(\pi_2, \pi_3).$$

Signification physique de ces groupements :

- $\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}$ est le Nombre de Nusselt, il peut aussi s'écrire : $Nu = \frac{D}{\frac{\lambda}{h}}$

C'est donc le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction. Il caractérise le type de transfert de chaleur.

- $\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u} = \frac{1}{Re}$, c'est l'inverse du Nombre de Reynolds qui caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation.

- $\pi_2 = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$, c'est le Nombre de Peclet. On peut aussi l'écrire : $Pe = \frac{\rho u D}{\mu} \cdot \frac{c_p \mu}{\lambda}$ et faire apparaître un nouveau nombre adimensionnel : $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ appelé Nombre de Prandtl. Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend que de la température) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection.

On préfère donc chercher une relation sous la forme :

$$Nu = f(Re, Pr)$$

(4.1)

4.1.4 Avantages de l'utilisation des grandeurs réduites

Ils concernent essentiellement la représentation, la comparaison et la recherche des résultats expérimentaux :

- La représentation des résultats expérimentaux est simplifiée on pourra avoir une courbe reliant 2 variables ou une abaque reliant 3 variables réduites au lieu d'une relation liant ($3 + p$) paramètres.
- La comparaison des résultats expérimentaux est aussi très rapide et aisée, quel que soit le chercheur, même si le système d'unité utilisé est différent puisque les grandeurs réduites sont sans dimension.
- La recherche des résultats expérimentaux est facilitée et ordonnée : s'il suffit de tracer une courbe entre deux variables réduites, c'est qu'il suffit d'effectuer une seule série d'expériences.

Remarque :

Il faut toutefois bien comprendre que la méthode de l'analyse dimensionnelle qui fournit les grandeurs réduites ne donne pas la forme de la relation qui les lie, la recherche de cette relation fait l'objet du dépouillement des résultats expérimentaux.

Quelques groupements sans dimensions

Groupement	
$Re = \frac{\rho u D}{\mu}$	Nombre de Reynolds
$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$	Nombre de Prandtl
$Nu = \frac{h D}{\lambda}$	Nombre de Nusselt
$Pe = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$	Nombre de Peclet
$Ma = \frac{h}{\rho u c_p}$	Nombre de Margoulis
$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$	Nombre de Grashof
$Ra = \frac{c_p \beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\lambda \mu}$	Nombre de Rayleigh

4.2 Convection sans changement d'état

4.2.1 Généralités. Définitions

Les transferts de chaleur qui s'effectuent simultanément avec des transferts de masse sont dits transferts de chaleur par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides dans lesquels il est généralement prépondérant.

Convection naturelle et forcée

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue :

- La convection libre ou naturelle : le fluide est mis en mouvement sous le seul effet des différences de masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (la pesanteur).

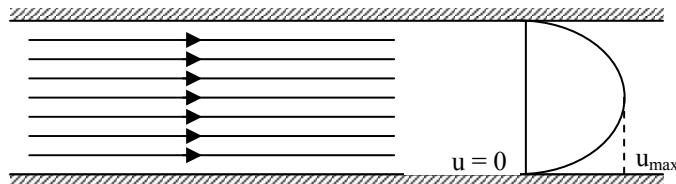
- La convection forcée : le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur...).

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

Régime d'écoulement

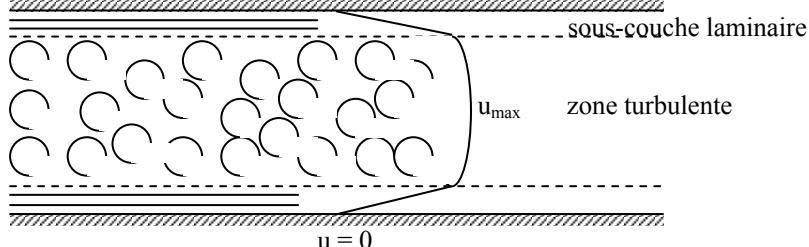
Compte-tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de considérer le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

- En régime laminaire, l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes. :



Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc :

- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.
- En régime turbulent, l'écoulement n'est pas unidirectionnel :



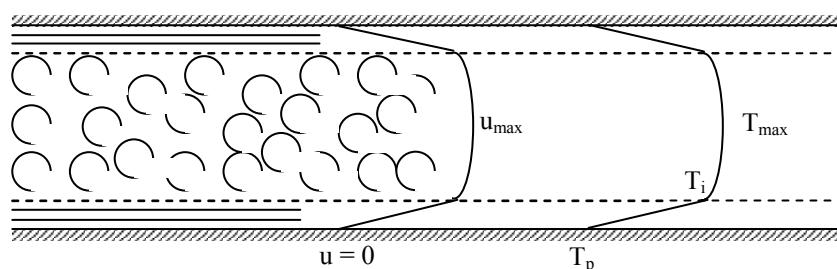
L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction est généralement négligeable par rapport à la convection.

4.2.2 Expression du flux de chaleur

Analogie de Reynolds

De même qu'au niveau moléculaire on explique la viscosité des gaz par la transmission des quantités de mouvement des molécules lors des chocs intermoléculaires, on explique la transmission de la chaleur par la transmission d'énergie cinétique lors de ces mêmes chocs.

Cette liaison intime des phénomènes de viscosité et de transfert de chaleur conduisent à l'analogie de Reynolds : dans un écoulement fluide avec transfert de chaleur dans un tube, le profil des vitesses et le profil des températures sont liés par une relation de similitude :



Couches limites dynamiques et thermiques

Quelque soit le régime d'écoulement, il demeure une sous-couche laminaire (couche limite dynamique) dont l'épaisseur est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est grand. L'épaisseur de cette couche limite varie en fonction de nombreux paramètres : nature du fluide, température, rugosité de la paroi...

L'analogie de Reynolds montre que le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, c'est à dire dans la sous-couche laminaire. Quelque soit le régime d'écoulement du fluide, on considère que la résistance thermique est entièrement située dans le film laminaire qui joue le rôle d'isolant thermique (couche limite thermique).

Expression du flux de chaleur

On considère que cette résistance thermique R est équivalente à celle que le flux de chaleur rencontreraient en conduction à travers une paroi dont l'épaisseur serait celle du film laminaire et qui possèderait les mêmes caractéristiques thermiques que le fluide soit :

$$R = \frac{e}{\lambda}$$

avec : e épaisseur du film laminaire
 λ conductivité thermique du fluide

Rigoureusement, le flux de chaleur par unité de surface s'écrit alors : $\phi = \frac{\lambda}{e} (T_p - T_i)$ où T_i est la

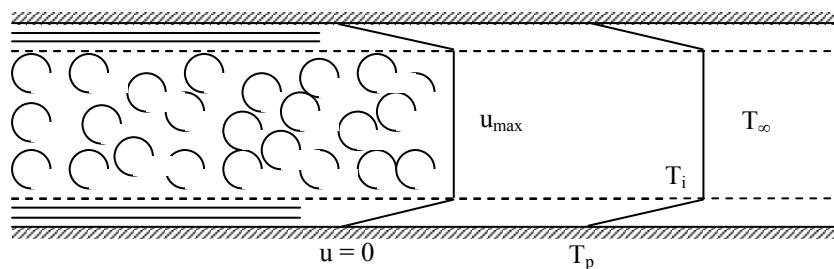
température à la limite du film laminaire.

Pour un régime thermique bien établi, on peut considérer en première approximation que par suite des courants de convection la masse fluide au-delà du film laminaire est à une température constante et prendre comme loi de la densité de flux de chaleur la relation :

$$\boxed{\phi = \frac{\lambda}{e} (T_p - T_\infty)} \quad (W.m^{-2}) \quad (4.2)$$

Avec : T_∞ : Température du fluide loin de la paroi ($^{\circ}C$)

qui correspond au modèle de Prandtl représenté ci-après à titre d'exemple pour l'écoulement d'un fluide dans une conduite :



T_∞ , qui est la température moyenne du fluide dans une section perpendiculaire à l'écoulement dans le cas de la circulation d'un fluide dans une canalisation, dépend du régime d'écoulement. Dans le cas d'un échange paroi-fluide, on prendra pour T_∞ la température du fluide loin de la paroi.

Loi de Newton. Valeur du coefficient de transfert

Cette loi simple présente néanmoins une énorme difficulté dans son application puisque l'on ne connaît pas l'épaisseur e du film laminaire. C'est ce qui amène à définir un coefficient de transfert superficiel ou coefficient de transfert de chaleur par convection par :

$$\boxed{h = \frac{\lambda}{e}} \quad (W m^{-2} {}^{\circ}C^{-1}) \quad (4.3)$$

Quelque soit le type de convection (libre ou forcée) et quelque soit le régime d'écoulement du fluide (lamininaire ou turbulent), le flux de chaleur ϕ est donné par la relation dite loi de Newton :

$$\boxed{\varphi = h S \Delta\theta} \quad (W) \quad (4.4)$$

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer h qui dépend d'un nombre important de paramètres : caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la température, de la forme de la surface d'échange,...

On trouvera dans le tableau ci-après l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations.

Configuration	$h (\text{Wm}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1})$
<u>Convection naturelle</u>	
Dans un gaz	2-10
Dans un liquide	100-1000
<u>Convection forcée</u>	
Avec un gaz	10-200
Avec un liquide	100-5000
<u>Ebullition de l'eau</u>	
Dans un récipient	2500-35000
En écoulement dans un tube	5000-100000
<u>Condensation de l'eau sous 1 atm</u>	
Sur une surface verticale	1000-11000
A l'extérieur de tubes horizontaux	10000-25000

4.2.3 Calcul du flux de chaleur en convection forcée

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels :

$$\boxed{\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})} \quad (4.5)$$

Définis par :

$$\text{Nu} = \frac{h D}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue donc de la manière suivante :

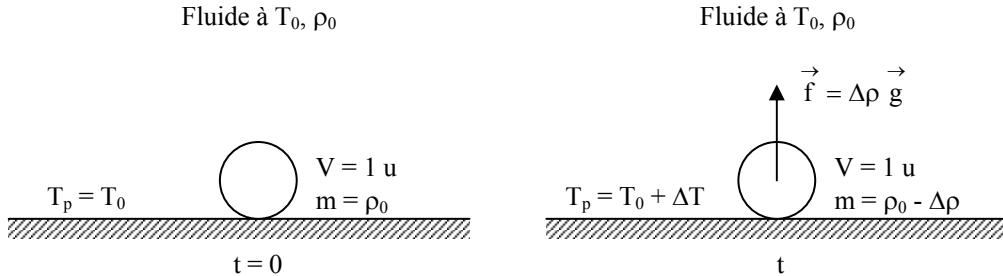
1. Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de Re et la configuration → choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de $h = \frac{\lambda \text{Nu}}{D}$ et de $\varphi = h S (T_p - T_\infty)$.

Pour la convection forcée, les principales corrélations sont données en annexe A.4.1.

4.2.4 Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

Mécanisme de la convection naturelle

Considérons un fluide au repos en contact avec une paroi plane à température T_0 . Si l'on porte la paroi à une température $T = T_0 + \Delta T$, le fluide au contact de la paroi va s'échauffer par conduction et la masse du volume unité va passer de ρ_0 à $\rho_0 - \Delta\rho$:



Il sera donc soumis à une force ascensionnelle $\vec{f} = -\Delta\rho \vec{g}$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'évaluer l'accélération du fluide :

$$\text{Pour un volume unité : } m = \rho \quad \text{d'où : } \Delta\rho g = \rho \gamma \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\Delta\rho}{\rho} g$$

$$\text{En introduisant le coefficient de dilatation cubique } \beta \text{ du fluide défini par } \beta = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}, \text{ il vient :}$$

$$\gamma = \beta g \Delta T$$

$\beta g \Delta T$ est donc le module de l'accélération produite par l'expansion thermique due à la variation ΔT de la température T_0 . Ce mouvement du fluide induit par les différences de masse volumique résultantes des gradients de température va donner naissance aux courants de convection.

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque plane, le coefficient de convection dépend des caractéristiques du fluide : λ , ρ , μ , c_p , β , g , de la paroi caractérisée par la longueur L , et de l'écart de température $\Delta\theta$ aux bornes du film ce que l'on peut traduire par une relation du type :

$$\phi = f(\lambda, \rho, \mu, c_p, \beta, g, L, \Delta T)$$

Dans le système M, L, T, θ, Q , cette relation entre 8 grandeurs se réduit à une relation entre trois nombres adimensionnels :

$Nu = f(Gr, Pr)$

(4.6)

Définis par :

$$Nu = \frac{h D}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Signification physique du nombre de Grashof

Lorsque la masse unité du fluide, soumise à l'accélération $\beta g \Delta T$ subit une variation d'altitude L , la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{u^2}{2} = \beta g \Delta T L$$

$\frac{u^2}{2}$ représente la variation d'énergie cinétique et $\beta g \Delta T L$ la variation d'énergie potentielle.

On voit donc que le nombre de Grashof peut se mettre sous la forme :

$$Gr = \frac{1}{2} \left(\frac{u L \rho}{\mu} \right)^2$$

Il est donc proportionnel au carré d'un nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement. En pratique, en convection naturelle, le courant qui prend naissance reste laminaire jusqu'à ce que le nombre de Grashof atteigne une valeur d'environ 10^9 .

Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels : $Nu = f(Gr, Pr)$ définis par :

$$Nu = \frac{h D}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection naturelle s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl .
2. Suivant la valeur de Gr et configuration → choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de $h = \frac{\lambda Nu}{D}$ et de $\varphi = h S (T_p - T_\infty)$

Pour la convection naturelle, les principales corrélations sont données en annexe A.4.2.

4.3 Convection avec changement d'état

4.3.1 Condensation

Phénomènes

Les échanges de chaleur entre une vapeur se condensant sur une paroi et la paroi proprement dite sont liés aux types de condensation qui dépendent essentiellement des interactions liquide-paroi.

Si le liquide ne mouille pas la surface, il se forme alors en certains points des gouttelettes de liquide qui ruissent le long de la paroi . Ce type de condensation ne peut s'observer que si la paroi a une surface lisse et propre. Dans le cas d'une condensation en gouttes, le liquide qui ne forme pas un film continu sur la paroi offre une résistance thermique négligeable.

Cependant, le type de condensation que l'on rencontre généralement dans la pratique est la condensation en film : la paroi est isolée de la vapeur par un film continu de liquide qui joue le rôle d'isolant thermique entre la paroi et la vapeur et fait chuter la valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h par rapport à la condensation en gouttes.

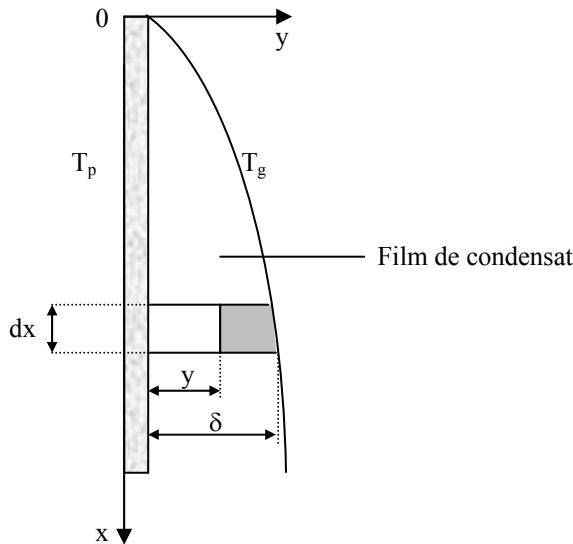
Valeur du coefficient h pour la condensation en film

La théorie de Nusselt, établie en 1916, relie analytiquement le coefficient de transfert h aux divers paramètres physiques intervenant dans la condensation en film d'un fluide sur une paroi :

Paroi verticale

Hypothèses :

- Ecoulement laminaire du film.
- Température de paroi constante.
- Gradient de température constant dans le film.
- Grand rayon de courbure du film de condensat.



On notera T_g la température de saturation (rosée) de la vapeur et T_p ($< T_g$) la température maintenue constante de la paroi verticale.

Les forces s'exerçant sur le système constitué du liquide d'épaisseur dx compris entre y et δ et de longueur unité suivant Oz (surface grise) sont :

- La force de pesanteur : $\rho_l g (\delta - y) dx$
- La force due à la vapeur d'eau déplacée : $\rho_v g (\delta - y) dx$
- La force de frottement visqueux : $\mu_l \frac{du}{dy} dx$ (hypothèse du fluide newtonien)

$$\text{Le bilan des forces s'écrit : } \rho_l g (\delta - y) dx = \mu_l \frac{du}{dy} dx + \rho_v g (\delta - y) dx$$

En intégrant entre $y = 0$ et $y = \delta$ avec la condition limite $u = 0$ en $x = 0$, on obtient :

$$u = \frac{(\rho_l - \rho_v)g}{\mu_l} \left(\delta y - \frac{1}{2} y^2 \right)$$

Le débit massique de liquide condensé à une hauteur x (par unité de longueur suivant Oz) est donné par :

$$m = \int_0^\delta \rho \left[\frac{(\rho_l - \rho_v)g}{\mu_l} \left(\delta - \frac{1}{2} y^2 \right) \right] dy = \frac{(\rho_l - \rho_v)g \delta^3}{3\mu_l}$$

Le flux de chaleur cédé par le condensat à la paroi sur la hauteur dx s'écrit :

$$\varphi_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \lambda dx \frac{T_p - T_\infty}{\delta}$$

Entre les hauteurs x et $x + dx$, l'épaisseur du film de liquide passe de δ à $\delta + d\delta$ du fait de la condensation sur la hauteur dx . La quantité de vapeur condensée entre x et $x + dx$ s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(\rho_l - \rho_v) g \delta^3}{3\mu_l} \right] dx = \frac{d}{d\delta} \left[\frac{(\rho_l - \rho_v) g \delta^3}{3\mu_l} \right] \frac{d\delta}{dx} dx = \frac{(\rho_l - \rho_v) g \delta^2 d\delta}{\mu_l}$$

Le flux de chaleur cédé par le condensat à la paroi doit être égal à la chaleur latente de condensation libérée par la quantité de vapeur calculée ci-dessus soit :

$$\frac{(\rho_l - \rho_v) g \delta^2 d\delta}{\mu_l} \Delta H = \lambda_l dx \frac{T_g - T_p}{\delta}$$

L'intégration de cette équation avec la condition limite $\delta = 0$ en $x = 0$ conduit à :

$$\delta = \left[\frac{4\mu_l \lambda_l x (T_g - T_p)}{g \Delta H \rho_l (\rho_l - \rho_v)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Le coefficient de transfert de chaleur local (en x) par convection vérifie : $h_x dx (T_g - T_p) = -\lambda_l dx \frac{T_g - T_p}{\delta}$

$$\text{D'où : } h_x = \frac{\lambda_l}{\delta}$$

$$\text{Soit : } h_x = \left[\frac{g \Delta H \rho_l (\rho_l - \rho_v) \lambda^3}{4\mu_l x (T_g - T_p)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Le coefficient de transfert moyen s'obtient en intégrant le coefficient local sur la hauteur L de la surface condensante :

$$h_v = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$$

Soit finalement :

$$h_v = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\lambda_l^3 \rho_l^2 g \Delta H}{L \mu_l \Delta T} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{W m}^{-2} \text{ °C}^{-1}) \quad (4.7)$$

Avec :

ΔH : Chaleur latente de condensation (J kg^{-1})

ΔT : Différence entre la température de rosée de la vapeur et la température de la paroi ($^\circ\text{C}$)

L : Hauteur de la paroi (m)

Condition de validité : $\text{Re} < 2100$ où Re est défini de la façon suivante :

Soient M : débit massique de condensat
 S : section de passage du film liquide

Considérons par exemple le cas d'un tube vertical de grand diamètre extérieur D_e . On définit le diamètre hydraulique D_h du film par :

$$D_h = 4 \frac{\text{section passage}}{\text{périmètre mouillé}} = 4 \frac{S}{\pi D e} \quad \text{d'où} \quad Re = \frac{\rho_l u D_h}{\mu_l} = \frac{\rho_l u}{\mu_l} \frac{4S}{\mu_l \pi D e} = \frac{4M}{\mu_l \pi D e}$$

La condition de validité s'écrit donc dans ce cas : $\frac{4M}{\mu_l \pi D e} < 2100$

Remarque :

Les grandeurs physiques relatives au liquide sont évaluées à la température du film définie par la formule de Drew : $T_f = \frac{3T_p + T_v}{4}$

Tube horizontal

Une valeur moyenne de h pour un tube horizontal peut être calculée par :

$$h_h = 0,725 \left(\frac{\lambda_l^3 \rho_l^2 g \Delta H}{D e \mu_l \Delta T} \right)^{1/4} \quad (\text{W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) \quad (4.8)$$

Avec la condition de validité : $Re = \frac{4M}{\mu_l \pi D e} < 2100$

Comparaison entre tube horizontal et vertical

Si l'on note L_v la longueur du tube vertical et D_{e_h} le diamètre extérieur du tube horizontal, le rapport des deux expressions de h conduit à :

$$\frac{h_h}{h_v} = 0,769 \left(\frac{L_v}{D_{e_h}} \right)$$

D'où $h_h > h_v$ si $L_v > 2,86 D_{e_h}$ ce qui est pratiquement toujours le cas. Dans les mêmes conditions de température, le coefficient de transfert est plus élevé sur un tube horizontal que sur un tube vertical.

Dans le cas des condenseurs à faisceaux tubulaires, les tubes n'étant pas tous dans un même plan horizontal, le liquide tombant d'un tube va « épaisser » le film qui existe sur le tube situé en-dessous de lui de sorte que le coefficient de transfert de chaleur h est moins élevé sur les tubes inférieurs.

En tenant compte du recyclage du condensat sur les tubes inférieurs, Nusselt a proposé la relation suivante pour calculer la valeur moyenne de h pour un ensemble de N tubes situés dans un même plan vertical :

$$\overline{h_h} = 0,725 \left(\frac{\lambda_l^3 \rho_l^2 g \Delta H}{N D e \mu_l \Delta T} \right)^{1/4} \quad (\text{W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) \quad (4.9)$$

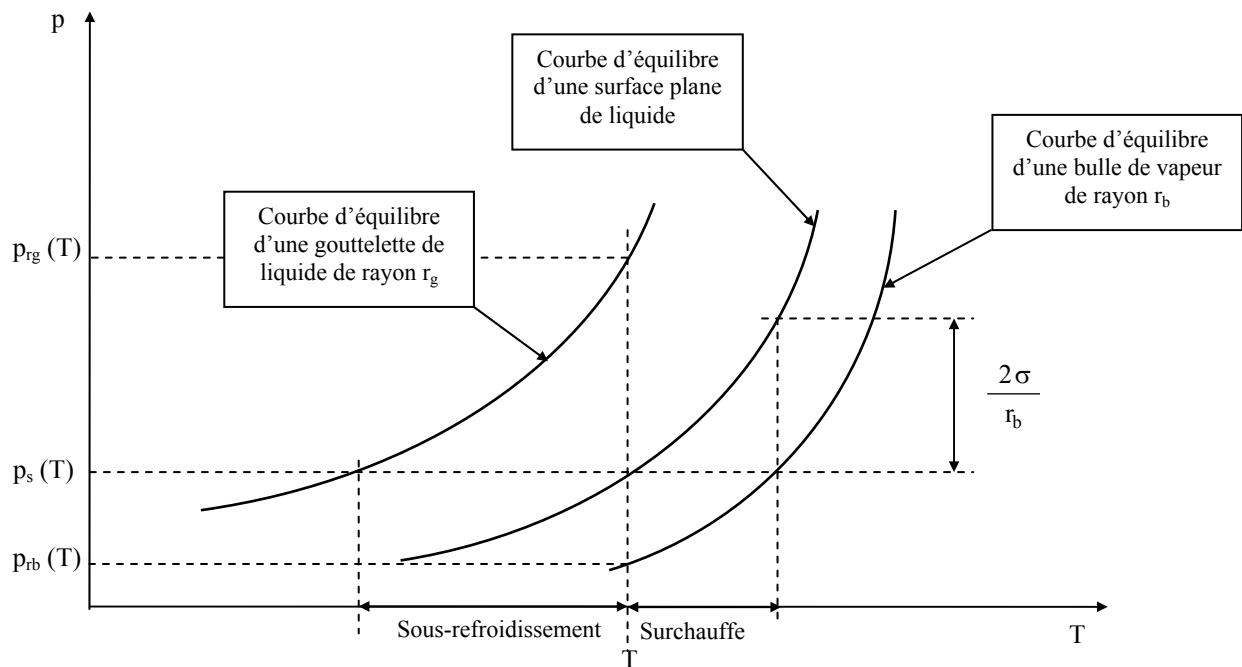
L'expérience a montré que cette formule théorique donne des valeurs de h inférieures à celles déterminées expérimentalement et qu'il convient de multiplier la valeur de h donné par la formule (4.9) par un facteur correctif selon la formule suivante :

$$\overline{h_h \text{ corrigé}} = \overline{h_h} \left[1 + 0,2(N-1) \frac{c_p \Delta T}{\Delta H} \right] \quad (\text{W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) \quad (4.10)$$

4.3.2 Ebullition

Formation des bulles

Diagramme général d'équilibre liquide-vapeur

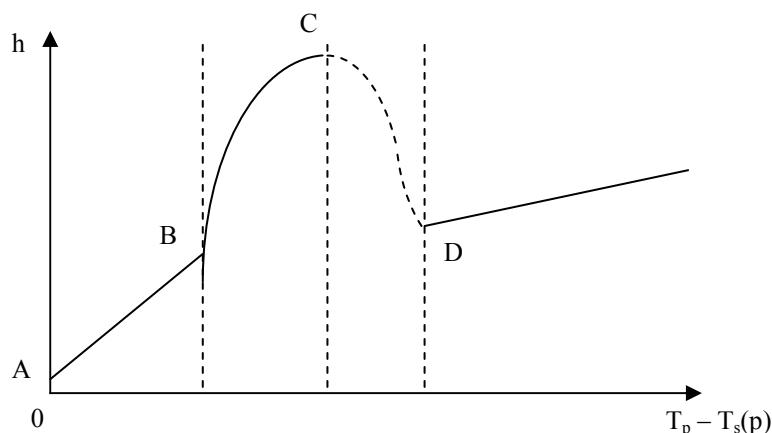


$$p_{rb}(T) = p_s(T) - \frac{2\sigma}{r} \quad \text{donc si } r_b \rightarrow 0 \text{ alors } p_{rb} \rightarrow \infty \text{ donc une bulle ne pourrait théoriquement pas}$$

prendre naissance dans un liquide qui est un milieu continu. On suppose que sur les parois chauffées sur lesquelles se produit l'ébullition se trouvent des discontinuités (petites cavités contenant de l'air) qui servent de "germes" favorisant la naissance des bulles. Ces points privilégiés sont appelés "sites" et leur nombre croît avec la différence $T_p - T_s(p)$ entre la température de la surface chauffée et la température de saturation du liquide sous la pression p .

Les différents régimes d'ébullition

Les variations du coefficient de transfert de chaleur h en fonction de l'écart de température $T_p - T_s(p)$ présentent la même allure pour un grand nombre de liquides, elles sont représentées par le Graphe de Nukiyama :



Zone AB

Bien que $T_p > T_s(p)$, il n'y a pas encore naissance de bulles. L'échange paroi-liquide s'effectue par convection naturelle et obéit à la loi de Newton : $\varphi = h S (T_p - T_\infty)$, h se calculant par les corrélations concernant la convection naturelle (cf. annexe A.4.2) Une évaporation se produit sur la surface plane et libre du liquide en contact avec l'air.

Zone BC

Les bulles montent en colonne à partir de points isolés de la paroi : les « sites » avec une fréquence de l'ordre de 100 par seconde. Ensuite les bulles deviennent de plus en plus nombreuses et isolent presque totalement la paroi par une couche de vapeur presque continue. L'évacuation de la chaleur s'effectue principalement sous forme de chaleur latente de vaporisation. C'est la zone d'ébullition nucléée.

La densité de flux de chaleur Φ transférée dans cette zone peut être calculée par la formule de Rosenhow qui s'écrit :

$$\frac{c_l \Delta T}{\Delta H (\text{Pr}_l)^s} = C \left[\frac{\Phi}{\mu_l \Delta H} \sqrt{\frac{\sigma}{g (\rho_l - \rho_v)}} \right]^{0,33} \quad (4.11)$$

Où :	c_l	Capacité thermique du liquide
	ΔT	Ecart de température $T_p - T_s(p)$
	ΔH	Chaleur latente de vaporisation
	Pr_l	Nombre de Prandtl du liquide à saturation
	σ	Tension superficielle (valeur pour l'eau dans le tableau 5.1)
	g	Accélération de la pesanteur
	ρ_l	Masse volumique du liquide
	ρ_v	Masse volumique de la vapeur
	C	Constante déterminée expérimentalement (cf. valeurs dans le tableau 5.2)
	s	$s = 1$ pour l'eau, $1,7$ pour les autres liquides

Température saturation °C	Tension superficielle 10^{-3} N.m^{-1}
0	75,6
15,6	73,3
37,8	69,8
60	66,0
93,3	60,1
100	58,8
160	46,1
226,7	32,0
293,3	16,2
360	1,46
374,1	0

Tableau 51: Valeur de la tension superficielle pour l'eau

Configuration	C		
Eau-Cuivre	0,013	Benzènze-Chrome	0,010
Eau-Platine	0,013	Alcool éthylique-Chrome	0,027
Eau-Laiton	0,006	n-Pentane-Chrome	0,015
Eau-Cuivre poli à l'émeri	0,0128	n-Pentane-Cuivre poli à l'émeri	0,0154
Eau-Aacier inox poli	0,0080	n-Pentane-Nickel poli à l'émeri	0,0127
Tetrachlorure de carbone-Cuivre	0,013	Alcool isopropylique-Cuivre	0,00225
Tetrachlorure de carbone-Cuivre poli	0,007	Acool n-Butyl-Cuivre	0,00305

Tableau 52: Valeurs de la constante C pour diverses configurations fluide/surface chauffante

Point C

La couche de vapeur isole totalement la paroi du liquide et la chaleur ne peut plus se transmettre que par l'intermédiaire de la vapeur de très faible conductivité thermique. L'augmentation brutale de la résistance thermique va provoquer une brusque augmentation de la température de la paroi chauffante jusqu'à un niveau qui va permettre d'évacuer le flux fourni à la paroi à la fois par conduction-convection et par rayonnement. On passe ainsi brusquement du point C au point D dont la température dépasse largement 1000°C, on a fusion de la paroi dans la plupart des cas, c'est pourquoi le point C est appelé point de burn-out.

La détermination du point de burn-out est capitale dans l'étude de l'ébullition pour d'évidentes raisons de sécurité. La corrélation la plus utilisée pour déterminer cette densité de flux de burn-out est celle de Zuber :

$$\phi_{bo} = \frac{\pi \rho_v}{24} \Delta H \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)^{1/2} \quad (W m^{-2}) \quad (4.12)$$

Zone CD

Zone instable.

Zone DE

Zone d'ébullition pelliculaire dans laquelle le transfert de chaleur de la paroi vers le liquide s'effectue par conduction et par rayonnement à travers la couche continue de vapeur. Les coefficients de transfert de chaleur peuvent se calculer par :

Conduction (Bromley) :

$$h_c = 0,62 \left[\frac{\lambda_v^3 \rho_v (\rho_l - \rho_v) g (\Delta H + 0,4 c_{pv} \Delta T)}{d \mu_v \Delta T} \right]^{1/4} \quad (4.13)$$

Rayonnement :

$$h_r = \frac{\sigma \varepsilon (T_p^4 - T_{sat}^4)}{T_p - T_{sat}} \quad (4.14)$$

Global :

$$h = h_c \left(\frac{h_c}{h} \right)^{1/3} + h_r \quad (4.15)$$

Intérêt du transfert de chaleur par ébullition

Outre dans les générateurs de vapeur d'eau largement utilisés dans les industries agro-alimentaires et textiles, ce type de transfert est utilisé pour l'extraction de très importantes puissances calorifiques à partir de surfaces très réduites : refroidissement de coeurs de réacteurs nucléaires, de moteurs de fusée,...du fait des coefficients de transfert élevés obtenus de l'ordre de 100 000 W m⁻² °C⁻¹.

5 LES ECHANGEURS DE CHALEUR

5.1 Les échangeurs tubulaires simples

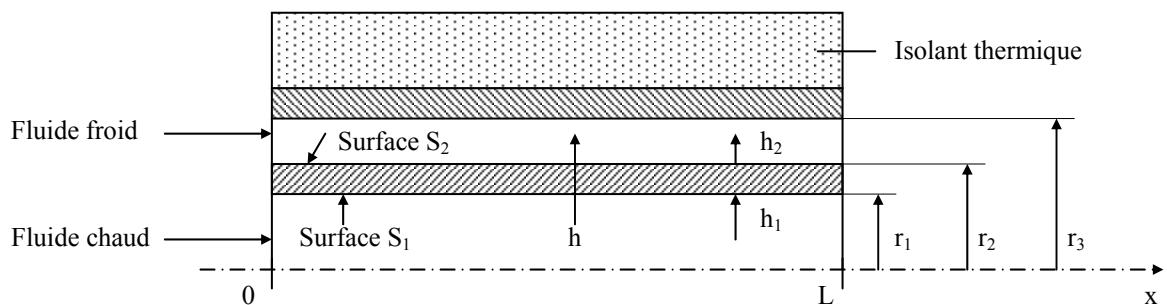
5.1.1 Généralités. Définitions

5.1.1.1 Description

Un échangeur de chaleur est un système qui permet de transférer un flux de chaleur d'un fluide chaud à un fluide froid à travers une paroi sans contact direct entre les deux fluides.

Exemples : radiateur d'automobile, évaporateur de climatiseur ...

Un échangeur tubulaire simple est constitué de deux tubes cylindriques coaxiaux. Un fluide (généralement le chaud) circule dans le tube intérieur, l'autre dans l'espace compris entre les deux tubes. Le transfert de chaleur du fluide chaud au fluide froid s'effectue à travers la paroi que constitue le tube intérieur :



5.1.1.2 Hypothèses

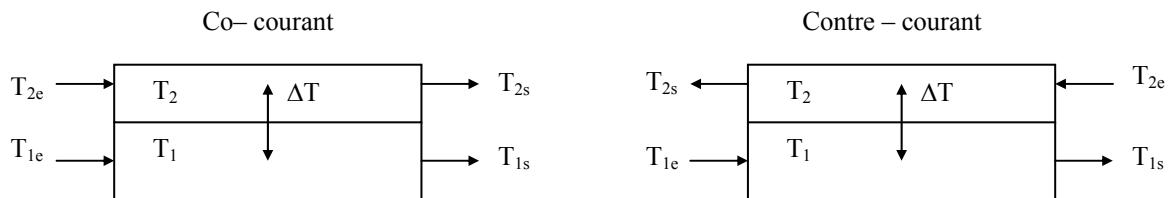
Dans les calculs qui suivent, nous avons retenu les hypothèses suivantes :

- Pas de pertes thermiques : la surface de séparation est la seule surface d'échange.
- Pas de changement de phase au cours du transfert.

5.1.1.3 Conventions

Le fluide chaud entre dans l'échangeur à la température T_{1e} et en sort à T_{1s} , le fluide froid entre à T_{2e} et sort à T_{2s} .

Deux modes de fonctionnement sont réalisables :



5.1.2 Expression du flux échangé

5.1.2.1 Coefficient global de transfert

Une première expression du flux de chaleur transféré dans un échangeur peut être déterminée en écrivant qu'il est égal au flux de chaleur perdu par le fluide chaud et au flux de chaleur gagné par le fluide froid pendant leur traversée de l'échangeur :

$$\dot{\varphi} = \dot{m}_1 c_{p1} (T_{1s} - T_{1e}) = \dot{m}_2 c_{p2} (T_{2e} - T_{2s})$$

Les produits $q_{c1} = \dot{m}_1 c_{p1}$ et $q_{c2} = \dot{m}_2 c_{p2}$ sont appelés les débits calorifiques des deux fluides.

Le flux de chaleur peut donc finalement s'écrire :

$$\dot{\varphi} = q_{c1} (T_{1e} - T_{1s}) = q_{c2} (T_{2s} - T_{2e})$$

(W) (5.1)

Par ailleurs, le flux de chaleur $\dot{\varphi}$ transmis d'un fluide 1 à un fluide 2 à travers la paroi d'un tube cylindrique s'écrit :

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2\pi h_1 r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{1}{2\pi h_2 r_2 L}}$$

Dans les échangeurs de chaleur, on choisit de rapporter le flux de chaleur échangé à la surface $S_2 = 2\pi r_2 L$, soit d'écrire : $\dot{\varphi} = h S_2 \Delta\theta$. Le coefficient global de transfert h d'un échangeur de chaleur s'écrit donc :

$$h = \left(\frac{r_2}{h_1 r_1} + \frac{r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda L} + \frac{1}{h_2} + R_{en} \right)^{-1}$$

(W m⁻² °C⁻¹) (5.2)

R_{en} est une résistance thermique due à l'encrassement des surfaces d'échange dont il faut tenir compte après quelques mois de fonctionnement (entartrage, dépôts, corrosion...).

On trouvera dans le tableau ci-dessous les ordres de grandeur de h pour des échangeurs tubulaires en verre et métallique.

Ordres de grandeur du coefficient global de transfert h de divers types d'échangeurs

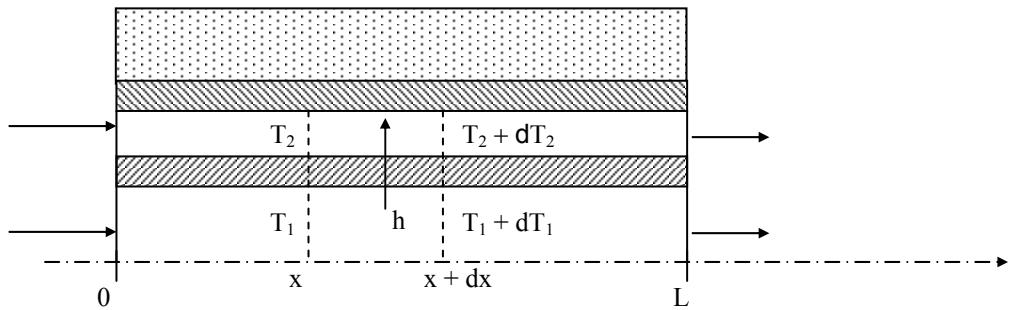
	Coefficient global de transfert h (W m ⁻² °C ⁻¹)
Liquide-liquide	100-2000
Liquide-gaz	30-300
Condenseur	500-5000

5.1.2.2 Cas où h est constant

Fonctionnement à co-courant

Nous allons établir la relation liant le flux de chaleur transmis dans l'échangeur au coefficient global de transfert h et à la surface extérieure S_2 d'échange. Cette relation est fondamentale car elle permet de dimensionner un échangeur, c'est à dire de calculer la surface d'échange nécessaire pour transférer un flux imposé.

Pour cela, effectuons un bilan thermique de la partie d'échangeur comprise entre les distance x et $x + dx$ de l'entrée de l'échangeur :



Le bilan thermique consiste à écrire que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud lors de son passage entre les plans d'abscisse x et $x + dx$ est passé intégralement à travers la paroi de séparation des deux fluides soit :

$$-q_{cl} dT = h dS_2 (T_1 - T_2)$$

L'équation du bilan thermique s'écrit :

$$\frac{dT_1}{T_1 - T_2} = -\frac{h dS_2}{q_{cl}}$$

θ_1 dépend de θ_2 donc avant d'intégrer il faut établir la relation liant ces deux grandeurs. Pour cela, on effectue le bilan thermique de l'échangeur entre l'entrée de l'échangeur et l'abscisse x en écrivant que le flux de chaleur perdu par le fluide chaud a été intégralement récupéré par le fluide froid soit :

$$q_{cl} (T_{le} - T_1) = q_{c2} (T_2 - T_{2e}) \quad \text{d'où} \quad T_2 = T_{2e} + \frac{q_{cl}}{q_{c2}} (T_{le} - T_1)$$

Nous pouvons alors écrire en intégrant sur la surface totale d'échange S_2 :

$$-\int_0^{S_2} \frac{h dS_2}{q_{cl}} = \int_{T_{le}}^{T_{2e}} \frac{dT_1}{T_1 - \frac{q_{cl}}{q_{c2}} (T_{le} - T_1) - T_{2e}} = \int_{T_{le}}^{T_{ls}} \frac{dT_1}{\left(1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}\right) T_1 - \left(\frac{q_{cl}}{q_{c2}} T_{le} + T_{2e}\right)}$$

$$\text{d'où : } -\frac{h S_2}{q_{cl}} = \frac{1}{1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}} \ln \left[\left(1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}\right) T_{ls} - \left(\frac{q_{cl}}{q_{c2}} T_{le} + T_{2e}\right) \right]_{T_{le}}^{T_{ls}}$$

soit :

$$-\frac{h S_2}{q_{cl}} = \frac{1}{1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}} \left\{ \ln \left[\left(1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}\right) T_{ls} - \left(\frac{q_{cl}}{q_{c2}} T_{le} + T_{2e}\right) \right] - \underbrace{\ln \left[\left(1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}\right) T_{le} - \left(\frac{q_{cl}}{q_{c2}} T_{le} + T_{2e}\right) \right]}_{T_{le} - T_{2e}} \right\}$$

L'écriture du bilan thermique global entre l'entrée et la sortie de l'échangeur :

$$\varphi = q_{cl} (T_{le} - T_{ls}) = q_{c2} (T_{2s} - T_{2e})$$

$$\text{permet d'écrire : } \frac{q_{cl}}{q_{c2}} T_{le} + T_{2e} = \frac{q_{cl}}{q_{c2}} T_{ls} + T_{2s}$$

$$\text{En reportant dans l'équation intégrée, il vient : } -\frac{h S_2}{q_{cl}} = \frac{1}{1 + \frac{q_{cl}}{q_{c2}}} \ln \left(\frac{T_{ls} - T_{2s}}{T_{le} - T_{2e}} \right)$$

Nous pouvons également exprimer $\frac{1}{1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}}$ en fonction des températures des fluides :

$$\frac{1}{1 + \frac{q_{c1}}{q_{c2}}} = \frac{1}{1 + \frac{T_{2s} - T_{2e}}{T_{le} - T_{ls}}} = \frac{T_{le} - T_{ls}}{T_{le} - T_{ls} + T_{ls} - T_{2e}}$$

$$\text{d'où la relation : } -\frac{h S_2}{q_{c1}} = \frac{T_{le} - T_{ls}}{T_{le} - T_{ls} + T_{2s} - T_{2e}} \ln\left(\frac{T_{ls} - T_{2s}}{T_{le} - T_{2e}}\right)$$

$T_{le} - T_{2e}$ qui représente l'écart de température entre le fluide chaud et le fluide froid à l'entrée de l'échangeur peut être noté : $\Delta T_e = T_{le} - T_{2e}$, on écrira de même à la sortie de l'échangeur : $\Delta T_s = T_{ls} - T_{2s}$.

L'expression précédente peut alors se mettre sous la forme : $q_{c1}(T_{le} - T_{ls}) = h S_2 \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}$

Le premier membre de cette équation représente le flux de chaleur total φ transféré dans l'échangeur et le

rapport : $\frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}$

est la moyenne logarithmique (MLDT) de la fonction ΔT entre l'entrée et la sortie de l'échangeur.

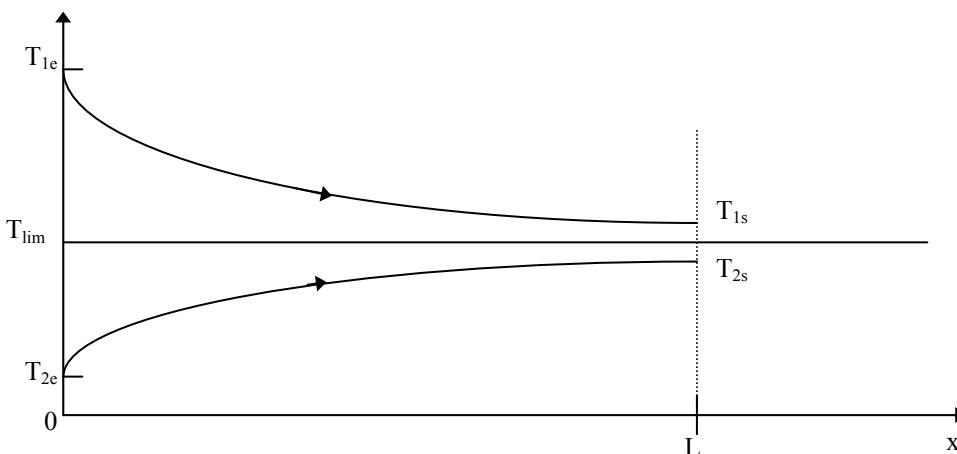
Le flux de chaleur échangé se met donc finalement sous la forme :

$$\boxed{\varphi = h S_2 \Delta T_m} \quad (W) \quad (5.3)$$

Avec :

$$\boxed{\Delta T_m = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}} \quad (\text{°C}) \quad (5.4)$$

La distribution des températures des fluides le long de l'échangeur présente l'allure suivante :



Remarques :

- En aucun cas on ne peut avoir $T_{2s} > T_{ls}$ car à partir de l'abscisse où les deux fluides seraient à la même température il n'y aurait plus d'échange de chaleur possible.

- Les deux fluides voient leurs température se rapprocher d'une température limite T_{lim} , cette température est telle que :

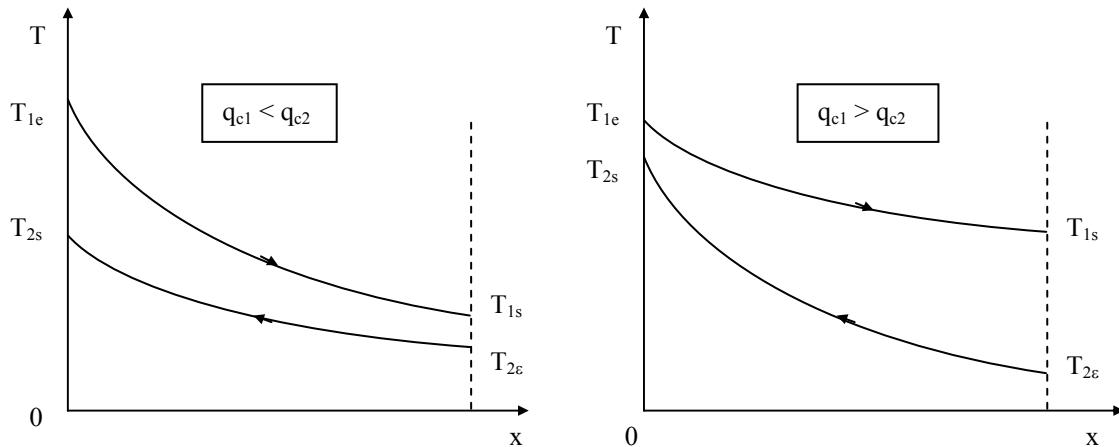
$$T_{lim} = \frac{q_{c1} T_{1e} + q_{c2} T_{2e}}{q_{c1} + q_{c2}} \quad (\text{°C}) \quad (5.5)$$

Fonctionnement à contre-courant

On montre que la relation (5.3) s'applique aussi bien à un échange à contre-courant qu'à un échange à co-courant, mais les expressions de ΔT_s et de ΔT_e ne sont pas identiques dans les deux cas :

<u>Co-courant</u>	<u>Contre-courant</u>	
$\Delta T_s = T_{ls} - T_{2s}$	$\Delta T_s = T_{ls} - T_{2e}$	
$\Delta T_e = T_{le} - T_{2e}$	$\Delta T_e = T_{le} - T_{2s}$	(°C)

La distribution des températures dans un échangeur à contre-courant présente l'une des allures suivantes :



$q_{c1} < q_{c2}$: On dit que le fluide chaud commande le transfert. Si $L \rightarrow \infty$ alors $T_{ls} \rightarrow T_{2e}$ et $T_{2s} \neq T_{le}$

$q_{c1} > q_{c2}$: On dit que le fluide froid commande le transfert. Si $L \rightarrow \infty$ alors $T_{2s} \rightarrow T_{le}$ et $T_{ls} \neq T_{2e}$

Remarque :

- Dans un fonctionnement à contre-courant il est possible d'obtenir $T_{2s} > T_{ls}$
- Il est par contre impossible d'obtenir $T_{2s} > T_{le}$ ou $T_{le} < T_{2s}$.

Comparaison des deux modes de fonctionnement

Dans un échangeur tubulaire simple, le flux de chaleur transférée est toujours plus élevé avec un fonctionnement à contre-courant car ΔT_m est plus élevé.

Exemple : $T_{le} = 300^\circ\text{C}$ $T_{ls} = 200^\circ\text{C}$
 $T_{2e} = 20^\circ\text{C}$ $T_{2s} = 100^\circ\text{C}$

co-courant :
$$\Delta T_m = \frac{(300 - 20) - (200 - 100)}{\ln\left(\frac{300 - 20}{200 - 100}\right)} = 174,8^\circ\text{C}$$

contre-courant : $\Delta T_m = \frac{(300 - 100) - (200 - 20)}{\ln\left(\frac{300 - 100}{200 - 20}\right)} = 189,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$

A chaque fois que cela sera possible on choisira donc un fonctionnement à contre-courant.

Plus généralement, un échangeur de chaleur de configuration quelconque aura des performances toujours supérieures à celles de l'échangeur tubulaire simple en co-courant et inférieures à celles d'un échangeur tubulaire simple en contre-courant.

5.1.2.3 Cas où h n'est pas constant

On utilise dans ce cas la méthode de Colburn qui fait l'hypothèse que le coefficient global de transfert h varie linéairement en fonction de ΔT : $h = a + b T$.

Nous pouvons écrire :

- A l'entrée de l'échangeur : $h_e = a + b \Delta T_e$
- A la sortie de l'échangeur : $h_s = a + b \Delta T_s$

Les coefficients a et b s'expriment par : $a = \frac{h_e - h_s}{\Delta T_e - \Delta T_s}$ et $b = h_e - \frac{h_e - h_s}{\Delta T_e - \Delta T_s} \Delta T_e$

Le bilan thermique de l'échangeur entre les abscisses x et $x + dx$ s'écrit toujours :

$$-q_{cl} dT_1 = h dS_2 (T_1 - T_2) \text{ soit } \frac{dT_1}{T_1 - T_2} = -\frac{h dS_2}{q_{cl}}$$

Le calcul de $\int_{T_{le}}^{T_{ls}} \frac{dT_1}{h(T_1 - T_2)}$ après avoir exprimé h et T_2 en fonction de T_1 conduit au résultat final suivant :

$$\varphi = \frac{h_e \Delta T_s - h_s \Delta T_e}{\ln\left(\frac{h_e \Delta T_s}{h_s \Delta T_e}\right)} S_2 \quad (\text{W}) \quad (5.7)$$

Remarque : Dans le cas où h ne varie pas linéairement sur tout l'échangeur, on découpera celui-ci en autant de morceaux sur lesquels on pourra faire l'hypothèse d'une variation linéaire de h .

5.1.3 Efficacité d'un échangeur

5.1.3.1 Définition et calcul

On définit l'efficacité d'un échangeur comme le rapport du flux de chaleur effectivement transféré dans l'échangeur au flux de chaleur maximal qui serait transféré dans les mêmes conditions de températures d'entrée des deux fluides dans un échangeur tubulaire de longueur infinie fonctionnant à contre-courant :

$$\eta = \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \quad (5.8)$$

Cas où $q_{cl} < q_{c2}$, le fluide chaud commande le transfert :

Si $L \rightarrow \infty$ alors $T_{ls} \rightarrow T_{2e}$ d'où : $\varphi_{max} = q_{cl} (T_{le} - T_{2e})$ et $\varphi = q_{cl} (T_{le} - T_{ls})$

On définit alors une efficacité de refroidissement :

$$\eta_r = \frac{T_{le} - T_{ls}}{T_{le} - T_{2e}} \quad (5.9)$$

Cas où $q_{c2} < q_{c1}$, le fluide froid commande le transfert :

Si $L \rightarrow \infty$ alors $T_{2s} \rightarrow T_{le}$ d'où : $\varphi_{max} = q_{c2} (T_{le} - T_{2e})$ et $\varphi = q_{c2} (T_{2s} - T_{2e})$

On définit alors une efficacité de chauffage :

$$\eta_c = \frac{T_{2s} - T_{2e}}{T_{le} - T_{2e}} \quad (5.10)$$

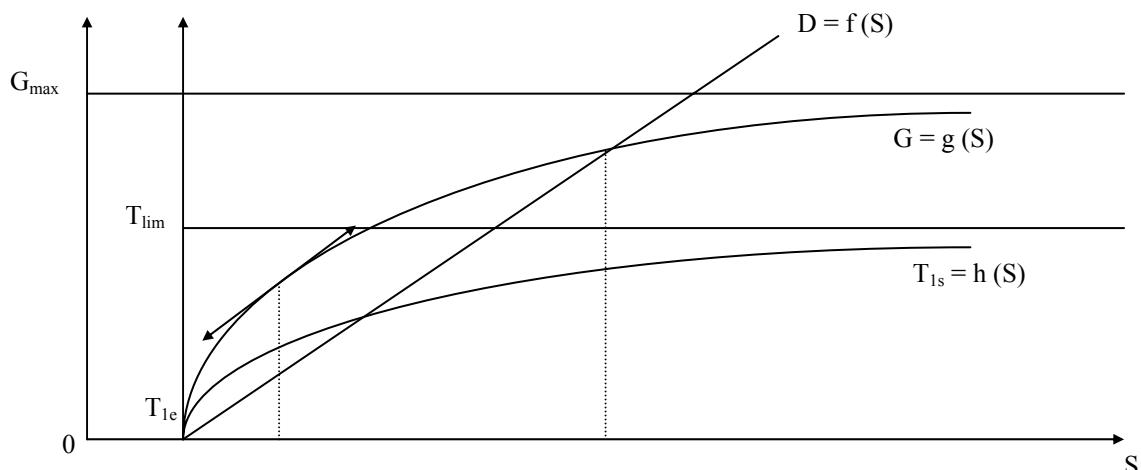
5.1.3.2 Signification du rendement

Lorsque le but recherché par l'installation d'un échangeur est de récupérer de la chaleur, la notion de rendement prend toute sa justification du point de vue économique. Considérons l'exemple le plus simple d'un échangeur fonctionnant à co-courant destiné à récupérer de la chaleur. Appelons P le prix en F du mètre carré d'échangeur (supposé constant) et C le gain en F par W récupéré sur le fluide chaud.

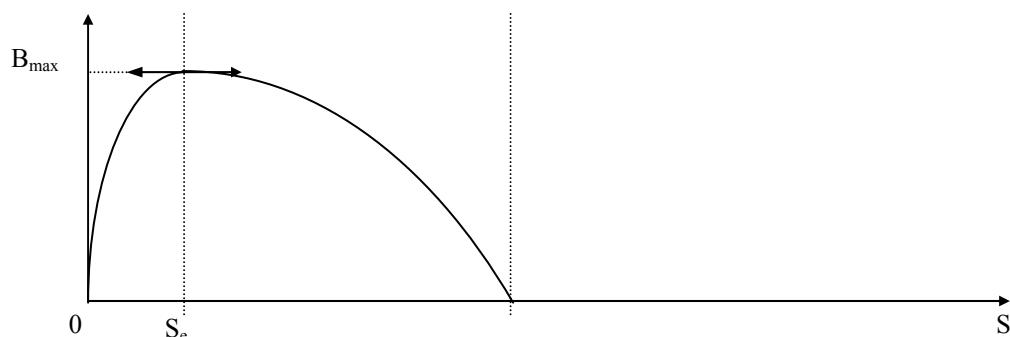
Le gain total engendré par l'échangeur est : $G = C \cdot \varphi = C q_{c1} (\theta_{le} - \theta_{ls})$

Le coût de l'échangeur est : $D = S \cdot P$ où S est la surface d'échange en m^2 .

Ce qui peut être représenté graphiquement de la manière suivante :



On en déduit l'allure de la représentation graphique du bénéfice $B = G - D$ engendré par l'installation de l'échangeur :



On constate que le bénéfice atteint un maximum pour une certaine valeur S_e de la surface d'échange. L'augmentation de la surface d'échange au-delà de S_e permet d'augmenter le rendement mais a un effet inverse

sur le bénéfice. Il existe donc une limite économique S_e pour la surface d'échange de ce type d'échangeur de chaleur.

5.1.4 Nombre d'unités de transfert

5.1.4.1 Définition

On appelle nombre d'unité de transfert noté NUT le rapport adimensionnel $\frac{hS}{q_c}$ qui est aussi égal à $\frac{T_{le} - T_{2e}}{\Delta T_m}$ pour le fluide chaud dans le cas d'un échangeur tubulaire simple :

$$NUT_1 = \frac{hS}{q_{c1}} = \frac{T_{le} - T_{2e}}{\Delta T_m} \quad (5.11)$$

Le NUT est représentatif du pouvoir d'échange de l'échangeur. Nous allons montrer dans ce qui suit qu'il est lié à l'efficacité de l'échangeur et que son utilisation permet de simplifier les calculs de dimensionnement des échangeurs.

5.1.4.2 Relation entre NUT et efficacité

Considérons le cas d'un échangeur tubulaire simple fonctionnant à contre-courant et supposons que le fluide chaud commande le transfert : $q_{c1} < q_{c2}$ donc $\eta_r = \frac{T_{le} - T_{ls}}{T_{le} - T_{2e}}$

Posons $z = \frac{q_{c1}}{q_{c2}} < 1$ et $\Delta T_{max} = T_{le} - T_{2e}$

$$NUT_1 = \frac{hS_2}{q_{c1}} = \frac{T_{le} - T_{ls}}{\Delta T_s - \Delta T_e}$$

Exprimons ΔT_e et ΔT_s en fonction de ΔT_{max} et η_r , nous pouvons écrire :

$$\Delta T_s = T_{ls} - T_{2e} = T_{ls} - T_{le} + T_{le} - T_{2e} = -\eta_r \Delta T_{max} + \Delta T_{max} (1 - \eta_r)$$

$$\Delta T_e = T_{le} - T_{2s} = T_{le} - T_{2e} + T_{2e} - T_{2s} = \Delta T_{max} - z (T_{le} - T_{ls}) = \Delta T_{max} (1 - z \eta_r)$$

Nous en déduisons l'expression du NUT_1 en fonction de ΔT_{max} et de η_r :

$$NUT_1 = \frac{\Delta T_{max} \eta_r}{\Delta T_{max} (1 - \eta_r) - \Delta T_{max} ((1 - z \eta_r))} \ln \left[\frac{\Delta T_{max} (1 - \eta_r)}{\Delta T_{max} (1 - z \eta_r)} \right] = \frac{1}{1 - z} \ln \left(\frac{1 - z \eta_r}{1 - \eta_r} \right)$$

En reprenant ce calcul dans le cas où le fluide froid commande le transfert puis pour un fonctionnement à contre-courant nous obtenons les relations générales suivantes :

<u>Co-courant</u>	<u>Contre-courant</u>	
$NUT_{max} = \frac{-\ln[1 - (1+z)\eta]}{1+z}$	$NUT_{max} = \frac{1}{z-1} \ln \left(\frac{\eta - 1}{z\eta - 1} \right)$	(5.12)
$\eta = \frac{1 - \exp[-NUT_{max}(1+z)]}{1+z}$	$\eta = \frac{1 - \exp[-NUT_{max}(1-z)]}{1 - z \exp[-NUT_{max}(1-z)]}$	

Avec : $NUT_{max} = \frac{h S}{q_{cmin}}$ et $z = \frac{q_{cmin}}{q_{cmax}}$

Cas particuliers :

- Pour tous les types d'échangeurs : $\eta = 1 - \exp(-NUT_{max})$ et $NUT_{max} = -\ln(1-\eta)$ si $z = 0$.
- Pour l'échangeur à contre-courant : $\eta = \frac{NUT_{max}}{NUT_{max} + 1}$ et $NUT_{max} = \frac{\eta}{1-\eta}$ si $z = 1$.

L'utilisation de ces formules a permis d'établir les abaques présentées en annexe A.5.1.

5.1.5 Calcul d'un échangeur

5.1.5.1 Températures de sorties connues

Le coefficient global de transfert h ayant été calculé, on connaît : q_{c1} , q_{c2} , T_{1e} , T_{1s} , T_{2e} et T_{2s} . On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour calculer S_2 :

Méthode MLDT :

- On calcule $\varphi = q_{c1} (T_{1e} - T_{1s}) = q_{c2} (T_{2s} - T_{2e})$
- On calcule $\Delta T_m = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)}$
- On en déduit $S_2 = \frac{\varphi}{h \Delta T_m}$

Méthode du NUT :

- On calcule η et $z = \frac{q_{cmin}}{q_{cmax}}$
- On détermine NUT_{max} par utilisation des formules (5.12) ou des abaques
- On en déduit $S_2 = NUT_{max} \frac{q_{cmin}}{h}$

5.1.5.2 Températures de sortie inconnues

Le coefficient global de transfert h ayant été calculé, on connaît : q_{c1} , q_{c2} , T_{1e} , T_{2e} et S . On peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes pour calculer T_{1s} et T_{2s} :

Méthode MLDT :

Son application nécessite la résolution (complexe) par des méthodes numériques du système de deux équations :

$$q_{c1} (T_{e1} - T_{1s}) = h S \Delta T_m$$

$$q_{c1} (T_{le} - T_{1s}) = q_{c2} (T_{2s} - T_{2e})$$

Méthode du NUT :

- On calcule $NUT_{max} = \frac{h S}{q_{cmin}}$ et $z = \frac{q_{cmin}}{q_{cmax}}$
- On détermine η par utilisation des formules (5.12) ou des abaques. Dans l'expression de η ne figure qu'une seule température inconnue T_{1s} ou T_{2s} que l'on calcule.
- On détermine la deuxième température inconnue par le bilan thermique global de l'échangeur :

$$q_{c1} (T_{le} - T_{ls}) = q_{c2} (T_{2s} - T_{2e})$$

Remarque : La méthode du NUT qui s'applique directement sans avoir recours à des méthodes numériques complexes est à préférer dans ce cas de figure.

5.2 Les échangeurs à faisceaux complexes

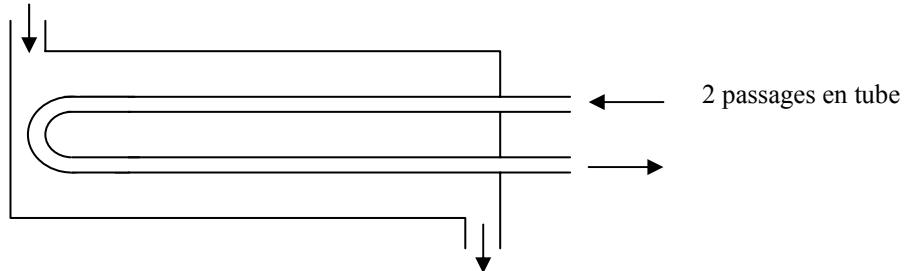
5.2.1 Généralités

Nous avons jusqu'alors étudié le modèle le plus simple d'échangeur que l'on puisse concevoir à savoir l'échangeur tubulaire simple. Il est toutefois difficile avec ce type d'échangeur d'obtenir des surfaces d'échange importantes sans aboutir à des appareils très encombrants. C'est l'une des raisons qui a conduit à développer d'autres géométries d'échanges.

5.2.2 Echangeur 1-2

C'est l'échangeur à faisceau le plus simple : le fluide circulant dans l'enveloppe effectue un seul passage tandis que le fluide circulant dans le tube effectue 2 (ou 2n) passages :

1 passage en enveloppe



Une passe en tube s'effectue à co-courant avec l'écoulement en calandre tandis que l'autre s'effectue à contre-courant. L'écoulement co-courant est moins efficace que l'écoulement à contre-courant, l'échangeur 1-2 a donc une efficacité comprise entre celle d'un échangeur tubulaire fonctionnant à co-courant et celle d'un échangeur tubulaire fonctionnant à contre-courant.

Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{max} et l'efficacité η de l'échangeur :

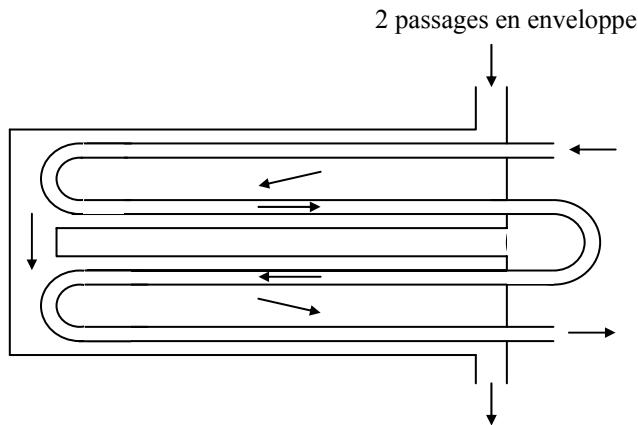
$$\boxed{\begin{aligned} NUT_{max} &= - (1+z^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{2/\eta - 1 - z - (1+z^2)^{1/2}}{2/\eta - 1 - z + (1+z^2)^{1/2}} \right] \\ \eta &= 2 \left\{ 1 + z + (1+z^2)^{1/2} \frac{1 + \exp \left[- NUT_{max} (1+z^2)^{1/2} \right]}{1 - \exp \left[- NUT_{max} (1+z^2)^{1/2} \right]} \right\}^{-1} \end{aligned}} \quad (5.13)$$

On trouvera également en annexe A.5.1 les abaques établis à partir de cette relation. Le calcul d'un échangeur 1-2 s'effectue en appliquant la méthode du NUT telle qu'elle a été décrite pour les échangeurs tubulaires simples.

5.2.3 Echangeur 2-4

Lorsque l'échangeur 1-2 ne permet pas d'obtenir une efficacité supérieure à 0,75, on cherche à se rapprocher

davantage de l'échangeur à contre-courant en effectuant 2 (ou plus) passages en calandre. L'échangeur 2-4 comporte une chicane longitudinale de sorte que le fluide en enveloppe effectue 2 passages. Le fluide dans le tube effectue 4 (ou 4n) passages :

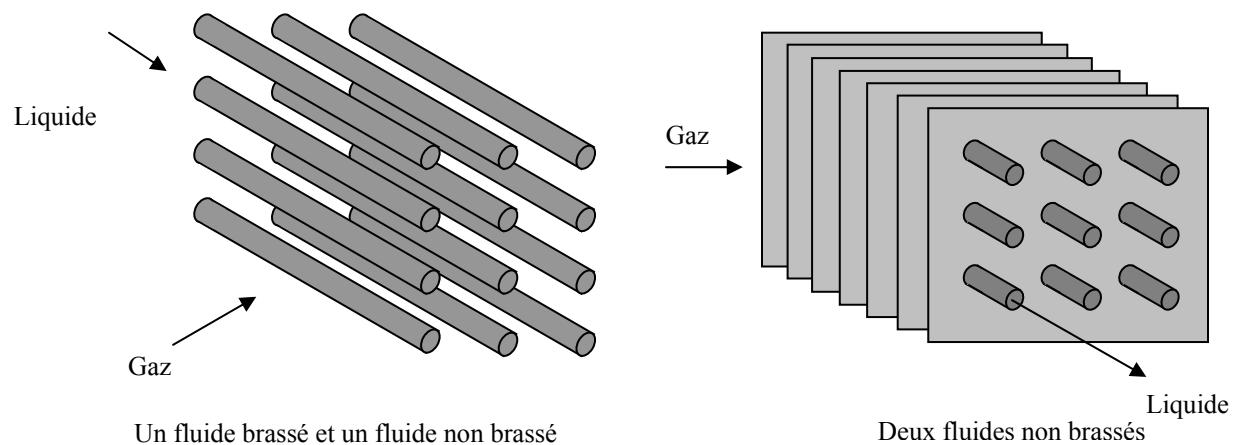


Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{max} et l'efficacité η de l'échangeur à partir de laquelle on a pu établir l'abaque $\eta = f(NUT_{max}, z)$ que l'on trouvera en annexe A.5.1.

Le calcul d'un échangeur 2-4 s'effectue en appliquant la méthode du NUT telle qu'elle a été décrite pour les échangeurs tubulaires simples.

5.2.4 Echangeur à courants croisés

Les deux fluides s'écoulent perpendiculairement l'un à l'autre. Un fluide est dit non brassé s'il s'écoule dans une veine divisée en plusieurs canaux parallèles distincts et de faible section, il est dit brassé dans le cas contraire. Le brassage a pour effet d'homogénéiser les températures dans la section droite de la veine. Les échangeurs à courants croisés sont surtout utilisés pour des échangeurs entre un gaz circulant en calandre et un liquide circulant dans les tubes :



Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{max} et l'efficacité η de l'échangeur :

Deux fluides non brassés :

$$\eta = 1 - \exp \left[\frac{\exp(-z \cdot NUT_{max}^{0,78}) - 1}{z \cdot NUT_{max}^{-0,22}} \right] \quad (5.14)$$

Deux fluides brassés :

$$\eta = \left[\frac{1}{1 - \exp(-NUT_{max})} + \frac{z}{1 - \exp(-NUT_{max} z)} - \frac{1}{NUT_{max}} \right]^{-1} \quad (5.15)$$

$$NUT_{max} = -\ln \left[1 + \frac{1}{z} \ln(1 - \eta z) \right]$$

Un fluide non brassé :

Fluide commandant le transfert ($q_{c \min}$) non brassé :

$$\eta = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \exp \left[-z \left(1 - e^{-NUT_{max}} \right) \right] \right\} \quad (5.16)$$

$$NUT_{max} = -\ln \left[1 + \frac{1}{z} \ln(1 - \eta z) \right]$$

Fluide commandant le transfert ($q_{c \min}$) brassé :

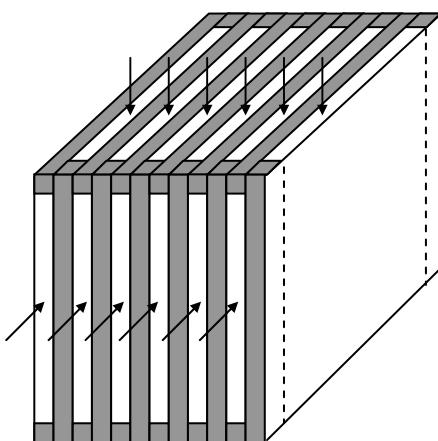
$$\eta = 1 - \exp \left\{ -\left(\frac{1}{z} \right) [1 - \exp(-z NUT_{max})] \right\} \quad (5.17)$$

$$NUT_{max} = -\frac{1}{z} \ln [1 + z \ln(1 - \eta)]$$

Le calcul d'un échangeur à courants croisés s'effectue en appliquant la méthode du NUT telle qu'elle a été décrite pour les échangeurs tubulaires simples. On trouvera en annexe A.5.1 des abaques représentant ces différentes formules.

5.2.5 Echangeur à plaques

Il est constitué par un empilage de plaques écartées les unes des autres par des entretoises pour former un ensemble de conduits plats. Un fluide circule dans les conduits pairs, l'autre dans les conduits impairs selon le schéma ci-dessous :



L'épaisseur des plaques est de 1 à 1,5 mm pour le verre et de l'ordre de 0,5 mm pour les métaux (aluminium, acier inox), l'écartement varie entre 5 et 10 mm. Ces échangeurs permettent d'obtenir un ratio surface d'échange / volume très élevé, ils sont utilisés pour des échanges entre deux fluides de même nature : gaz/gaz ou liquide/liquide.

La longueur caractéristique utilisée pour le calcul de Re et de Pr est égale à deux fois l'écartement entre les plaques.

5.2.6 Echangeurs frigorifiques

Une installation frigorifique comporte au moins deux échangeurs de chaleur :

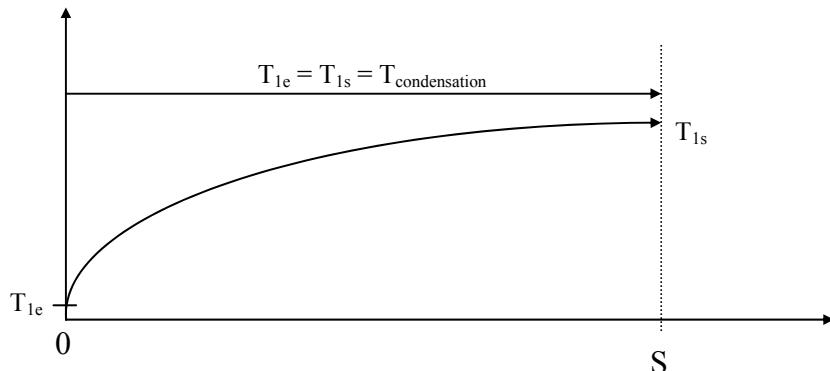
- Un condenseur dont le but est d'assurer le transfert de chaleur du fluide frigorigène au milieu extérieur
- Un évaporateur dont le rôle est d'assurer le transfert de chaleur du milieu à refroidir au fluide frigorigène.

Ces deux échangeurs se caractérisent par un écoulement diphasique du fluide frigorigène.

5.2.6.1 Condenseurs

Dans un condenseur, la phase liquide du fluide frigorigène apparaît dès que la température de la surface de refroidissement devient inférieure à la température de saturation du fluide frigorigène sous la pression de condensation. Ceci se produit à une distance très faible de l'entrée du condenseur, pratiquement dès le début s'il s'agit d'un condenseur à eau. On peut ainsi observer, quasiment dès l'entrée de l'échangeur, la présence contre la paroi froide d'une mince couche de liquide sur la surface de laquelle un film de vapeur saturée se condense.

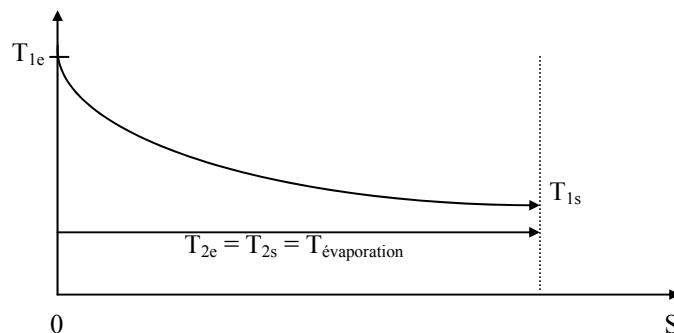
On peut dès lors considérer que la température du fluide frigorigène est constante et égale à la température de condensation. Si l'on admet que le coefficient global de transfert h est constant, le profil des températures a l'allure suivante :



5.2.6.2 Evaporateurs

Noyés :

Si la perte de charge due à la circulation du fluide frigorigène est négligeable, la température de ce fluide est constante tout au long de l'évaporateur et égale à la température d'évaporation :



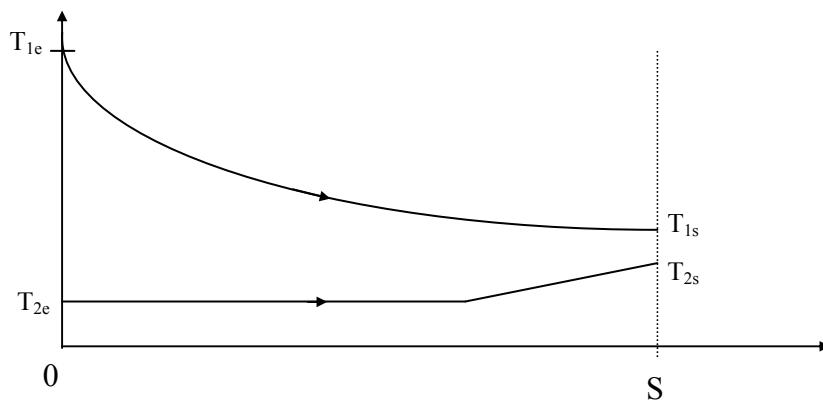
Comme dans ces échangeurs le titre de vapeur reste en deçà de 75%, le coefficient d'échange est relativement élevé et peut être considéré comme constant. La surface d'échange nécessaire se calcule de la même manière que pour une autre type d'échangeur.

A détente sèche :

Dans ce type d'échangeur, le fluide frigorigène circule à l'intérieur des tubes. Du point de vue des transferts thermiques, deux points différencient ces évaporateurs des précédents :

- Pour éviter tout risque que du fluide liquide pénètre dans le compresseur, les vapeurs sont légèrement surchauffées ce qui entraîne une variation de la température du fluide frigorigène dans la partie terminale de l'échangeur.
- Pour les titres de vapeur supérieurs à 75%, le coefficient de transfert côté fluide frigorigène chute brutalement ce qui ne permet plus de considérer le coefficient global de transfert h comme constant.

Pour dimensionner ces échangeurs, il faut les scinder en plusieurs parties telles que le coefficient global de transfert h soit constant ou varie linéairement sur chacune d'elles.



On trouvera dans le tableau ci-après l'ordre de grandeur des coefficients globaux d'échanges h dans divers types de condenseurs et d'évaporateurs.

Valeur du coefficient global d'échange pour divers types d'échangeurs frigorifiques :

Coefficient global d'échange h pour divers types de condenseurs ($\text{W m}^{-2} \text{°C}^{-1}$)			
Groupe	Médium de condensation	Type	h
A chaleur sensible	Air	Circulation naturelle Circulation forcée	9 à 12 24 à 30
	Eau	Immersion Double tube et contre-courant Multitubulaires horizontaux	240 à 300 700 à 950 700 à 1000
A chaleur latente	Evaporation forcée	Tubes lisses Tubes à ailettes	240 à 350 120 à 180

Coefficient global d'échange pour divers types d'évaporateurs ($\text{W m}^{-2} \text{°C}^{-1}$)		
Refroidisseurs de liquides	A serpentin	70 à 95
	A immersion	400 à 580
	Double tube et contre-courant	580 à 820
Refroidisseurs de gaz	Plaques eutectiques (eau ou saumure)	35 à 95
	Circulation d'air forcée : Tubes lisses Tubes ailetés	35 à 47 16 à 24
	Circulation d'air naturelle : Tubes lisses Tubes ailetés Plaques eutectiques	18 à 24 7 à 9 6 à 8

6 METROLOGIE THERMIQUE

6.1 Méthodes du plan chaud

6.1.1 Principe de la mesure

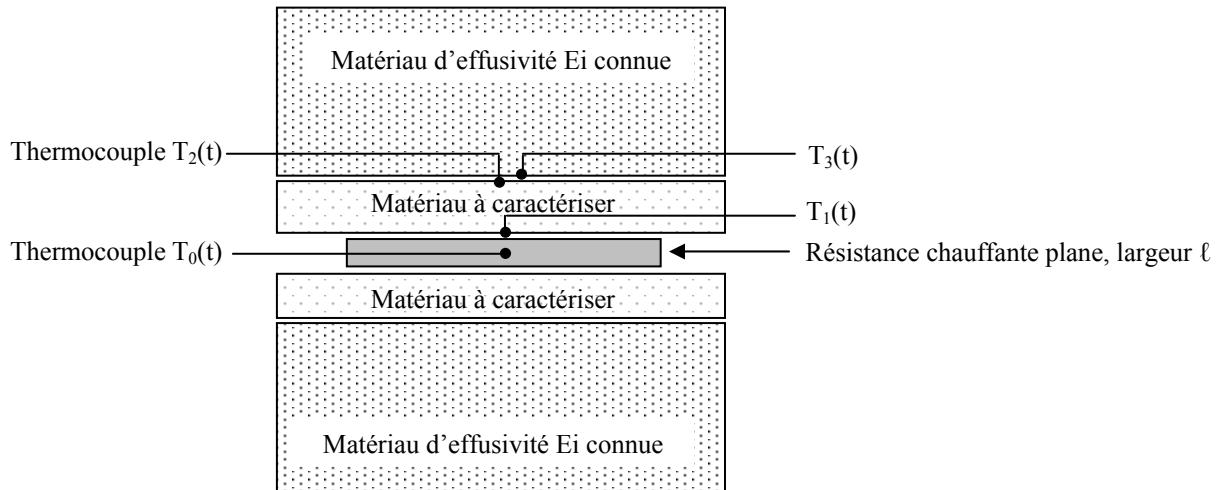


Figure 6.1 : Schéma du montage de la méthode du plan chaud avec deux échantillons.

On place une résistance chauffante plane de faible épaisseur entre deux échantillons du matériau à caractériser. On applique un échelon de flux de chaleur constant ($\varphi = \varphi_0$ si $t < t_0$ et $\varphi = 0$ si $t > t_0$) à la résistance chauffante et on relève l'évolution de la température $T_0(t)$ au centre de cette même résistance dans ou sur laquelle a été placé un thermocouple. On peut également relever la température $T_2(t)$ de la face non-chauffée d'un échantillon sur laquelle on aura fixé un thermocouple. Si les dimensions transversales de la résistance sont grandes devant l'épaisseur de l'échantillon, on peut considérer que le transfert de chaleur reste unidirectionnel au centre et le modéliser à l'aide de la méthode des quadripôles. On applique ensuite une méthode d'estimation de paramètres pour calculer les valeurs de :

- L'effusivité thermique $E = \sqrt{\lambda \rho c}$, et dans certains cas de la conductivité thermique λ du matériau à caractériser,
- La capacitance thermique $(mc)_s$ de l'ensemble sonde + résistance chauffante,
- Les résistances de contact R_{c1} à l'interface sonde/échantillon et R_{c2} à l'interface échantillon/matériau connu,

qui minimisent l'écart entre les courbes $T_0(t)$ théoriques et expérimentales.

6.1.2 Modélisation du plan chaud

Modèle complet bi-couche avec deux échantillons

La modélisation du système à l'aide du formalisme des quadripôles (cf. § 2.3.4) permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \varphi_0 \\ 2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{mc}{2}p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{c1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{c2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ E_i S \sqrt{p} \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où : } \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \operatorname{sh}(qe) \\ \lambda q S \operatorname{ch}(qe) & \operatorname{ch}(qe) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

avec :	θ_0	Transformée de Laplace de la différence $T_0(t) - T_0(t=0)$
	θ_3	Transformée de Laplace de la différence $T_3(t) - T_3(t=0)$
	R_{c1}	Résistance de contact à l'interface chauffante / matériau à caractériser
	R_{c2}	Résistance de contact à l'interface échantillon / matériau connu
	m	Masse thermocouple + résistance chauffante
	c	Capacité calorifique thermocouple + résistance chauffante
	E	Effusivité thermique du matériau à caractériser
	a	Diffusivité thermique du matériau à caractériser
	p	Variable de Laplace
	S	Surface de la résistance chauffante
	ϕ_0	Puissance dissipée dans la résistance chauffante

d'où :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \frac{\phi_0}{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{03} & B_{03} \\ C_{03} & D_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ E_i S \sqrt{p} \theta_3 \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} A_{03} & B_{03} \\ C_{03} & D_{03} \end{bmatrix} = \left[\frac{mc}{2} p A + \left(1 + \frac{mc}{2} p R_{cl} \right) C \left[\frac{mc}{2} p A + \left(1 + \frac{mc}{2} p R_{cl} \right) C \right] R_{c2} + \frac{mc}{2} p B + \left(1 + \frac{mc}{2} p R_{cl} \right) D \right]$$

et :

$$\theta_0(p) = \frac{\phi_0}{2p} \frac{A_{03} + B_{03} E_i S \sqrt{p}}{C_{03} + D_{03} E_i S \sqrt{p}} \quad (6.1)$$

On peut aussi écrire le bilan entre la résistance chauffante et la face non chauffée à température $T_2(t)$ du matériau à caractériser :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \frac{\phi_0}{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{mc}{2} p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{cl} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{02} & B_{02} \\ C_{02} & D_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} A_{02} & B_{02} \\ C_{02} & D_{02} \end{bmatrix} = \left[\frac{mc}{2} p A + \left(1 + \frac{mc}{2} p R_{cl} \right) C \left[\frac{mc}{2} p B + \left(1 + \frac{mc}{2} p R_{cl} \right) D \right] \right]$$

On en déduit la valeur de la transformée de Laplace de la température de la face non chauffée :

$$\theta_2(p) = D_{02} \theta_0(p) - B_{02} \frac{\phi_0}{p} \quad (6.2)$$

Modèle simplifié avec échantillons semi-infinis

Si la durée de la mesure est telle que l'on puisse faire l'hypothèse du milieu semi-infini pour le matériau à caractériser, le bilan thermique se simplifie sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \frac{\phi_0}{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{mc}{2} p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{cl} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E S \sqrt{p} \theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\theta_0(p) = \frac{\varphi_0}{2p} \frac{1 + R_{c1} E S \sqrt{p}}{\frac{mc}{2} p + \left[R_{c1} \frac{mc}{2} p + 1 \right] E S \sqrt{p}}} \quad (6.3)$$

Aux temps longs ($p \rightarrow 0$), cette expression devient :

$$\theta_0(p) = \frac{\varphi_0}{2p} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{\frac{mc}{2} p + E S \sqrt{p}} = \frac{\varphi_0}{2 E S p^{3/2}} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{1 + \frac{mc}{2 E S} \sqrt{p}} = \frac{\varphi_0}{2 E S p^{3/2}} \left(1 + R_c E S \sqrt{p} \right) \left[1 - \frac{mc}{2 E S} \sqrt{p} \right]$$

$$\text{soit : } \theta_0(p) = \frac{\varphi_0}{2 E S p^{3/2}} \left[1 + \left(R_c E S - \frac{mc}{2 E S} \right) \sqrt{p} \right] = \frac{\varphi_0}{2 E S p^{3/2}} + \frac{\varphi_0}{2p} \left(R_c - \frac{mc}{2(E S)^2} \right)$$

d'où :

$$\boxed{T_0(t) - T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \left[R_c - \frac{mc}{2(E S)^2} \right] + \frac{\varphi_0}{E S \sqrt{\pi}} \sqrt{t}} \quad (6.4)$$

Le tracé de $T_0(t) - T_0(0)$ en fonction de \sqrt{t} est donc une droite de pente $\frac{\varphi_0}{E S \sqrt{\pi}}$ dont la détermination

permet de calculer l'effusivité thermique E . L'inertie de la sonde et la résistance de contact n'influent pas sur la température aux temps longs. Pour appliquer cette méthode d'estimation, il faut s'assurer que l'hypothèse du milieu semi-infini reste valable sur l'intervalle d'estimation choisi.

Modèle bi-couche avec un seul échantillon

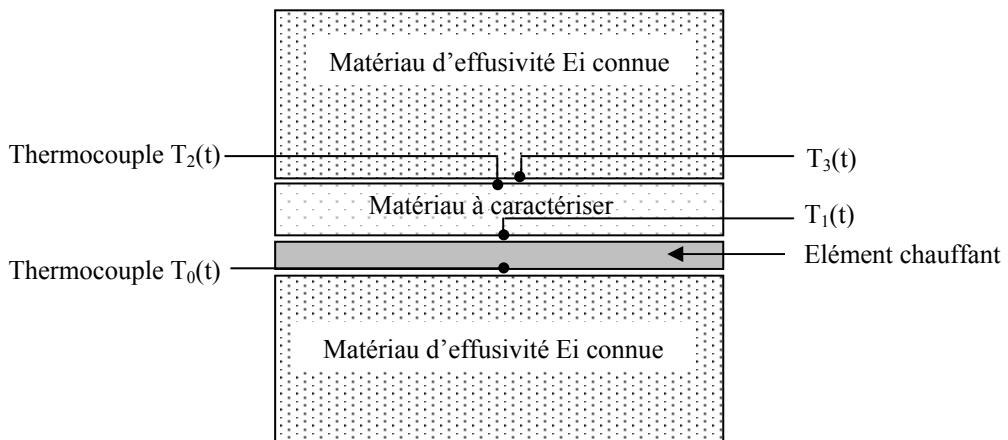


Figure 6.2 : Schéma du montage de la méthode du plan chaud avec un échantillon.

La modélisation du système à l'aide du formalisme des quadripôles permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Phi_{01} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mc p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{c1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{c2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i S \sqrt{p} & \theta_3 \\ \theta_3 & \theta_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Phi_{04} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R_{c3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \theta_4 \\ E_i S \sqrt{p} & \theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\Phi_0}{p} = \Phi_{01} + \Phi_{04}$$

où : $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}(qe) & \frac{1}{\lambda q S} \operatorname{sh}(qe) \\ \lambda q S \operatorname{ch}(qe) & \operatorname{ch}(qe) \end{bmatrix}$ avec $q = \sqrt{\frac{p}{a}}$

avec :	θ_0	Transformée de Laplace de la différence $T_0(t) - T_0(t=0)$
	θ_3	Transformée de Laplace de la différence $T_3(t) - T_3(t=0)$
	R_{c1}	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / matériau à caractériser
	R_{c2}	Résistance de contact à l'interface échantillon / matériau connu
	R_{c3}	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / matériau connu
	m	Masse thermocouple + résistance chauffante
	c	Capacité calorifique thermocouple + résistance chauffante
	E	Effusivité thermique du matériau à caractériser
	a	Diffusivité thermique du matériau à caractériser
	p	Variable de Laplace
	S	Surface de la résistance chauffante
	Φ_0	Puissance dissipée dans la résistance chauffante

La première relation matricielle peut aussi s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Phi_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{03} & B_{03} \\ C_{03} & D_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i S \sqrt{p} & \theta_3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où : $\begin{bmatrix} A_{03} & B_{03} \\ C_{03} & D_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + R_{c1} C) & (A + R_{c1} C)R_{c2} + (B + R_{c1} D) \\ mc p A + (1 + mc p R_{c1})C & [mc p A + (1 + mc p R_{c1})C]R_{c2} + mc p B + (1 + mc p R_{c1})D \end{bmatrix}$

On en déduit :

$$\boxed{\theta_0(p) = \frac{\frac{\Phi_0}{p}}{\frac{C_{03} + D_{03}}{A_{03} + B_{03}} E_i S \sqrt{p} + \frac{E_i S \sqrt{p}}{1 + R_{c3} E_i S \sqrt{p}}}}$$
(6.5)

On peut aussi écrire le bilan entre la résistance chauffante et la face non chauffée à température $T_2(t)$ du matériau à caractériser :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Phi_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ mc p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_{c1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{02} & B_{02} \\ C_{02} & D_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}$$

où : $\begin{bmatrix} A_{02} & B_{02} \\ C_{02} & D_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + R_{c1} C & B + R_{c1} D \\ mc p A + (1 + mc p R_{c1})C & mc p B + (1 + mc p R_{c1})D \end{bmatrix}$

en combinant avec la relation : $\boxed{\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \Phi_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{03} & B_{03} \\ C_{03} & D_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i S \sqrt{p} & \theta_3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$

on en déduit la valeur de la transformée de Laplace de la température de la face non chauffée :

$$\boxed{\theta_2(p) = \left[D_{02} - B_{02} \frac{C_{03} + D_{03} E_i S \sqrt{p}}{A_{03} + B_{03} E_i S \sqrt{p}} \right] \theta_0(p)}$$
(6.6)

Modèle simplifié avec un échantillon semi-infini

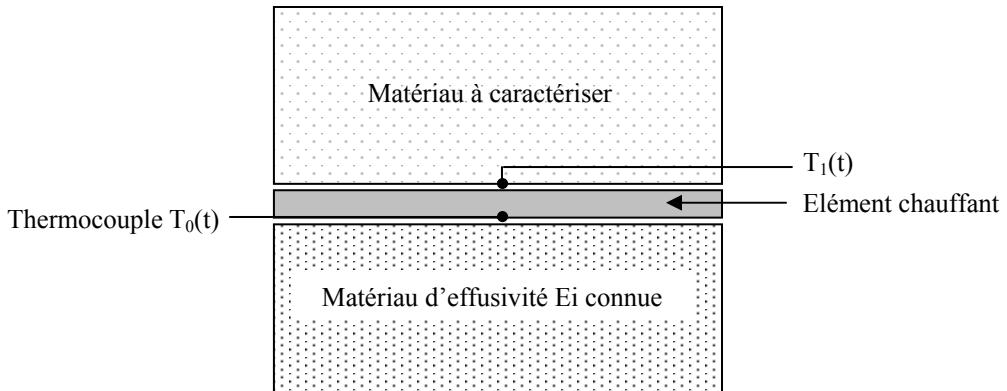


Figure 6.3 : Schéma du montage de la méthode du plan chaud avec un échantillon semi-infini.

La transformée de Laplace $\theta_0(p)$ de la température $T_0(t)$ s'écrit alors :

$$\boxed{\theta_0(p) = \frac{\frac{\varphi_0}{p}}{\frac{m c p + (1 + R_{c1} m c p) E S \sqrt{p}}{1 + R_{c1} E S \sqrt{p}} + \frac{E_i S \sqrt{p}}{1 + R_{c3} E_i S \sqrt{p}}}} \quad (6.7)}$$

avec :	θ_0	Transformée de Laplace de la différence $T_0(t) - T_0(t=0)$
	R_{c1}	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / matériau à caractériser
	R_{c3}	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / matériau connu
	m	Masse thermocouple + résistance chauffante
	c	Capacité calorifique thermocouple + résistance chauffante
	E	Effusivité thermique du matériau à caractériser
	p	Variable de Laplace
	S	Surface de la résistance chauffante
	φ_0	Puissance dissipée dans la résistance chauffante

6.1.3 Estimation des paramètres

Cas du monocouche

On fait l'hypothèse d'un transfert unidirectionnel et que le matériau à caractériser est un milieu semi-infini. L'hypothèse du transfert unidirectionnel est valable pendant un temps t_1 donné par la formule (Jannot, 2004) :

$$t_1 = \frac{0,146 \ell^2}{a}$$

Où :	a	Effusivité du matériau
	ℓ	Largeur de la résistance chauffante.

Cette formule est applicable dans le cas où l'échantillon est plus large que la résistance.

Dans le cas où l'échantillon et la résistance possèdent la même surface, il faut tenir compte des pertes thermiques sur les faces latérales de l'échantillon après le temps t_1 . Ce temps t_1 devra dans ce cas être suffisamment long pour permettre une estimation de l'effusivité thermique.

Une première valeur de l'effusivité E peut être estimée en traçant la courbe expérimentale $T_0(t) - T_0(0)$ en

fonction de \sqrt{t} . On observe qu'après une période initiale influencée par l'inertie de la sonde cette courbe est assimilable à une droite tout le temps que l'hypothèse du milieu semi-infini reste valable. D'après ce qui précède la pente de cette droite est égale à $\frac{\Phi_0}{E S \sqrt{\pi}}$. Il suffit donc de déterminer la pente α par régression linéaire sur un intervalle de temps adapté (tel que le coefficient de régression soit supérieur à 0,98) et l'on en déduit :

$$E = \frac{\Phi_0}{\alpha S \sqrt{\pi}} \quad (6.8)$$

On trouvera sur la figure (6.4) un exemple de thermogramme expérimental obtenu avec du PVC d'épaisseur 0,5cm. On constate qu'entre 5 et 40s, la courbe représentant $T_0(t) - T_0(0)$ en fonction de \sqrt{t} est assimilable à une droite dont on obtient la pente par régression linéaire : $\alpha = 0,671^\circ\text{C.s}^{-1/2}$. La surface de la sonde étant de $0,00243 \text{ m}^2$, sa résistance de $231,7\Omega$ et la tension d'alimentation 19V, on en déduit par application de la formule (6.5) la valeur de l'effusivité thermique : $E = 526,6 \text{ J.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}.\text{s}^{-1/2}$.

On peut remarquer sur ce thermogramme que le temps pendant lequel le modèle plan chaud s'applique ($\approx 50\text{s}$) est approximativement le double du temps au bout duquel la température de la face non chauffée de l'échantillon commence à varier ($\approx 25\text{s}$).

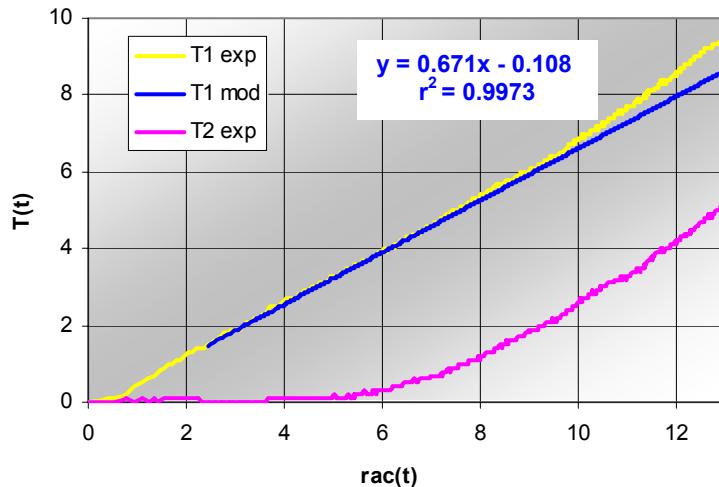


Figure 6.4 : Courbes expérimentales $T_1(t)$ et $T_2(t)$ et régression linéaire de la courbe $T_1(t)$ entre 5 et 50s.

Une valeur plus précise peut ensuite être estimée entre 0 et 50s de la manière suivante :

- On fixe des valeurs de départ des paramètres E (donné par 6.5), R_{c1} et mc .
- On utilise dans un tableur la méthode de Stehfest d'inversion de la transformée de Laplace pour calculer la différence $T_0(t) - T_0(0)$ à partir de la formule (6.3).
- On utilise le solveur du tableur (utilisant la méthode de Newton) pour déterminer la valeur des paramètres E , R_{c1} et mc qui minimisent l'écart entre la courbe expérimentale et la courbe calculée par inversion de (6.3).

On trouve dans le cas de l'exemple étudié : $E = 540,8 \text{ J.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}.\text{s}^{-1/2}$, $R_{c1} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ °C.m}^{-2}.\text{W}^{-1}$, $mc = 0,90 \text{ J.deg}^{-1}$. On observe une très bonne concordance entre la courbe expérimentale et la courbe théorique sur tout l'intervalle de temps [0, 50s] ainsi que le montre la figure 6.5. La divergence des 2 courbes au-delà de 40s indique que l'hypothèse du milieu semi-infini n'est plus valable après 40s et qu'il faut alors appliquer le modèle bi-couche.

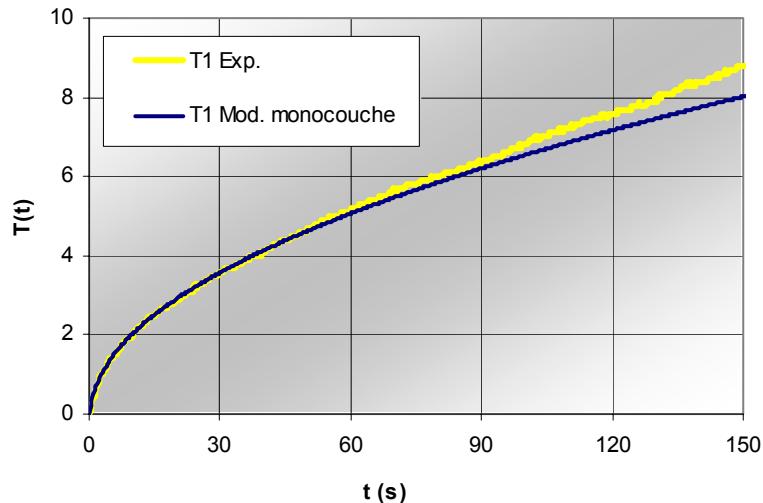


Figure 6.5 : Courbe $T_1(t)$ expérimentale et courbe simulée par le modèle complet mono-couche.

Cas du bi-couche avec deux échantillons

Le profil de température a l'allure de celui représenté sur la figure 6.6 : la température T_0 évolue comme dans le cas d'un milieu semi-infini pendant un certain temps puis augmente plus rapidement. Dans cette dernière zone, la température T_0 devient sensible à la conductivité thermique λ du matériau à caractériser. Le principe de la méthode d'estimation est d'utiliser le début du thermogramme $[0, t_1]$ pour déterminer les paramètres E , R_{c1} et m_c comme décrit précédemment. Le temps t_1 peut être repéré en traçant $T_0(t) - T_0(0)$ en fonction de \sqrt{t} , c'est le temps à partir duquel le tracé n'est plus linéaire. On calcule ensuite dans un tableur la valeur de la température par inversion par la méthode de Sthefest de la formule (6.1) dans laquelle on considère E_i , E , R_{c1} et m_c comme des données, les paramètres inconnus étant λ et R_{c2} . On utilise ensuite le solveur du tableur (utilisant la méthode de Newton) pour déterminer la valeur des paramètres λ et R_{c2} qui minimisent l'écart entre la courbe expérimentale et la courbe calculée par inversion de (6.1).

On trouve $\lambda = 0,204 \text{ W.m}^{-1}\text.{}^{\circ}\text{C}^{-1}$ et une valeur très faible de R_{c2} dans le cas de l'exemple traité où l'isolant est du polystyrène ($E = 34.6 \text{ J.m}^{-2}\text.{}^{\circ}\text{C}^{-1}\text.{}^{\text{s}}^{-1/2}$). On observe une très bonne concordance entre la courbe expérimentale et la courbe théorique du modèle bi-couche sur tout l'intervalle de temps [0, 150s] ainsi que le montre la figure 6.6.

Cas du bi-couche avec un échantillon

La méthode de traitement des résultats est en tout point identique à la configuration bi-couche avec deux échantillons en remplaçant la formule (6.1) par la formule (6.5)

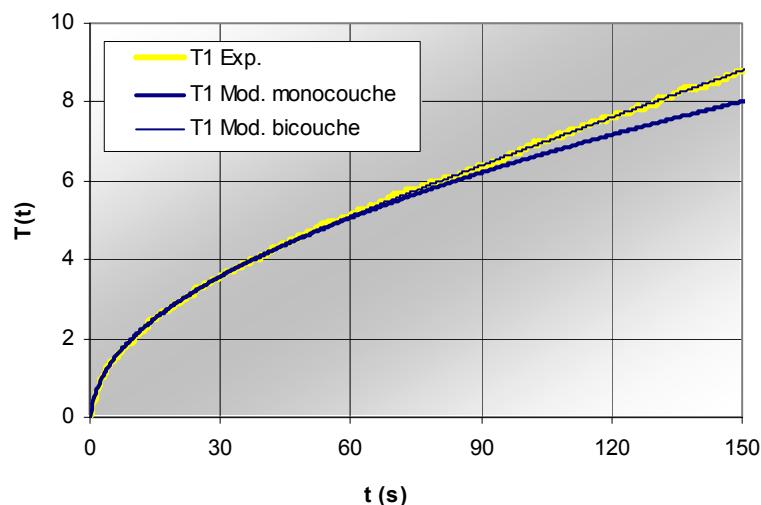


Figure 6.6 : Courbe $T_1(t)$ expérimentale et courbes simulées par les modèles complets mono-couche et bi-couche.

6.1.4 Réalisation pratique de la mesure

Cette méthode peut être mise en œuvre de manière extrêmement simple en utilisant une résistance chauffante plate (rectangulaire ou circulaire) de surface suffisante (au moins 25 cm^2). On fixe au centre de cette résistance un thermocouple réalisé en fils fins (diamètre $< 0,1 \text{ mm}$)..

La configuration avec un seul échantillon permet d'assurer un meilleur contact entre la résistance chauffante et l'échantillon en plaçant le thermocouple sur la face en contact avec l'isolant (polystyrène par exemple). Ce dernier étant déformable, la présence du thermocouple ne modifie pas de façon sensible la résistance de contact qui est de toute façon beaucoup moins influente sur la température du côté de l'isolant. Cette configuration est donc à préférer.

La principale source d'incertitude est la valeur de la densité de flux de chaleur $\frac{\varphi_0}{S}$, la mesure de la puissance

électrique est précise, mais il faut utiliser une surface de chauffe suffisante pour diminuer l'incertitude sur S . La mise en œuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. Un enregistrement entre 30 et 60 secondes après le début du chauffage permet d'obtenir une bonne précision sur l'effusivité thermique E . Un pas de temps de 0,1s pour l'enregistrement de la température donne des résultats satisfaisants.

6.2 Méthode du fil chaud pour la mesure de la conductivité thermique

6.2.1 Principe de la mesure

On applique un échelon de flux de chaleur constant ($\varphi = 0$ si $t < t_0$ et $\varphi = \varphi_0$ si $t > t_0$) au fil chauffant et on relève l'évolution de la température $T_0(t)$ de ce fil. Pendant le temps où la perturbation n'a pas atteint les autres faces c'est-à-dire où l'hypothèse du milieu semi-infini est valide, on peut considérer que le transfert au centre de l'échantillon autour du fil est radial. La modélisation de ce transfert de chaleur permet de calculer l'évolution de la température au centre de l'échantillon. On applique une méthode d'estimation de paramètres pour calculer les valeurs de :

- La conductivité thermique λ ,
- La capacité thermique (mc)_s de l'ensemble sonde + résistance chauffante,
- La résistance de contact R_c à l'interface sonde/échantillon,
-

qui minimisent l'écart entre les courbes $T_0(t)$ théoriques et expérimentales.

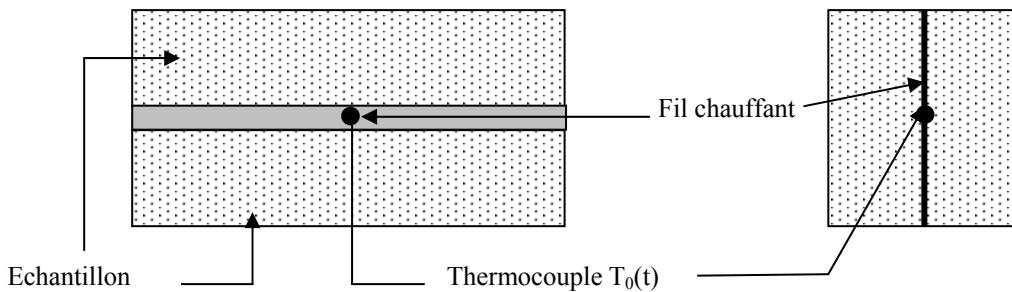
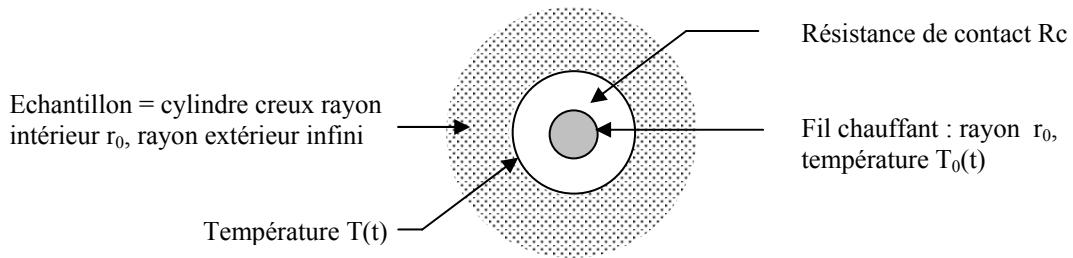


Figure 6.7 : Schéma du montage de la méthode du fil chaud.

6.2.2 Modélisation du fil chaud

Le voisinage du fil chauffant peut être schématisé de la manière suivante :



La modélisation du système à l'aide du formalisme des quadripôles (cf. § 2.3.4 et annexe A.2.9) permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \frac{\phi_0}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c \pi r_0^2 L p} \\ \rho c \pi r_0^2 L p & \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)} \theta \end{bmatrix} \text{ avec } q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

où :

θ_0	Transformée de Laplace de la différence $T_0(t) - T_0(t=0)$
θ	Transformée de Laplace de la différence $T(t) - T_0(t=0)$
R_c	Résistance de contact à l'interface résistance chauffante / échantillon
c	Capacité calorifique du thermocouple+résistance
λ	Conductivité thermique de l'échantillon
a	Diffusivité thermique de l'échantillon
p	Variable de Laplace
r_0	Rayon du fil chauffant
L	Longueur du fil chauffant
ϕ_0	Puissance dissipée dans la résistance chauffante
I_0, I_1, K_0, K_1	Fonctions de Bessel

d'où :

$$\boxed{\theta_0 = \frac{\phi_0}{p} \frac{A_0 + (A_0 R_c + B_0)/Z}{C_0 + (C_0 R_c + D_0)/Z}} \quad (6.9)$$

$$\text{avec } A_0 = 1 ; B_0 = \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c \pi r_0^2 L p} ; C_0 = \rho c \pi r_0^2 L p ; D_0 = \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)}$$

$$\frac{1}{Z} = 2\pi\lambda L q r_0 \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)}$$

Les paramètres inconnus à déterminer expérimentalement sont :

- La conductivité thermique λ de l'échantillon,
- La résistance thermique de contact R_c entre la sonde et l'échantillon,
- La capacitance thermique (mc_s) de la sonde.

6.2.3 Estimation des paramètres

Choix de l'intervalle de temps pour l'estimation

Le premier problème consiste à connaître le temps t de chauffage pendant lequel l'hypothèse du milieu semi-infini est valide. On calcule pour cela l'évolution de la température $T_e(t)$ sur un rayon égal à l'épaisseur de l'échantillon ($r = e$) à l'aide des paramètres estimés sur un temps t arbitraire. Si la température $T_e(t)$ calculée

diffère de la température initiale $T_e(0)$ de plus de $0,1^\circ\text{C}$ on reprend le calcul d'estimation des paramètres sur un temps plus court.

Le calcul de la température $T_e(t)$ s'effectue en décrivant le problème à l'aide du formalisme des quadripôles :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \frac{\varphi_0}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 \\ B_0 & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(e) \\ \Phi(e) \end{bmatrix}$$

$$A = q e [K_1(qe) I_0(qr_0) + I_1(qe) K_0(qr_0)]$$

$$B = \frac{1}{2\pi\lambda L} [K_0(qr_0) I_0(qe) - K_0(qe) I_0(qr_0)]$$

$$C = 2\pi L \rho c p r_0 e [K_1(qr_0) I_1(qe) - K_1(qe) I_1(qr_0)]$$

$$D = qr_0 [K_0(qe) I_1(qr_0) + K_1(qr_0) I_0(qe)]$$

$$\text{avec } q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

Etant donné que l'on cherche simplement à estimer le temps pendant lequel le milieu reste semi-infini, on peut se contenter de le faire dans le cas simple (et le plus défavorable) où la résistance de contact et la capacité thermique de l'ensemble sonde + résistance chauffante sont nulles et où le rayon de la sonde r_0 est très faible. La relation précédente s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \theta_0 \\ \frac{\varphi_0}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(e) \\ \Phi(e) \end{bmatrix}$$

avec $\Phi_e(p) = \frac{\theta_e(p)}{Z}$ pendant le temps où le milieu est semi-infini, cette formule est donc valable tout le

temps que la température T_e n'a pas varié. Elle peut donc être utilisée pour déterminer (en utilisant la méthode de Stehfest) l'instant à partir duquel T_e va commencer à varier mais ne permettra pas de déterminer l'évolution de T_e après cet instant.

On aboutit finalement à :

$$\boxed{\theta_e(p) = \frac{\varphi_0}{\left(C + \frac{D}{Z}\right)p}} \quad (6.10)$$

Avec les valeurs suivantes :

$$C = 2\pi L \rho c p r_0 e [K_1(qr_0) I_1(qe) - K_1(qe) I_1(qr_0)]$$

$$D = qr_0 [K_0(qe) I_1(qr_0) + K_1(qr_0) I_0(qe)]$$

$$\frac{1}{Z} = 2\pi\lambda L qr_0 \frac{K_1(qr_0)}{K_0(qr_0)}$$

T_e est calculable en appliquant la méthode de Stehfest à la formule (6.9).

Exemple :

Détermination de la conductivité thermique d'un carbure à l'aide d'un fil chaud de longueur 5 cm délivrant un flux égal à 3,03 W. Les figures 6.4 et 6.5 représentent le graphe de la température expérimentale T_0 obtenue avec un échantillon d'épaisseur 2,5 cm, celle-ci étant enregistrée toutes les 0,05 s. On a fait figurer sur ce même graphe :

- La température T_e de la face non-chauffée calculée par la formule (2) en prenant comme valeur de l'effusivité thermique $E = 5000 \text{ SI}$.
- La température T_{0c} calculée par un modèle simplifié aux temps longs après estimation de la conductivité thermique par régression linéaire de la courbe $T_0(t) = f[\ln(t)]$ entre les temps t_1 et t_2 (détail ci-après).

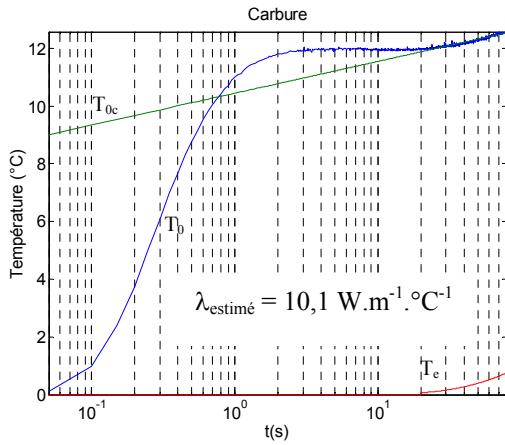


Figure 6.8 : Thermogramme fil chaud pour un carbure, estimation entre 20 et 80s.

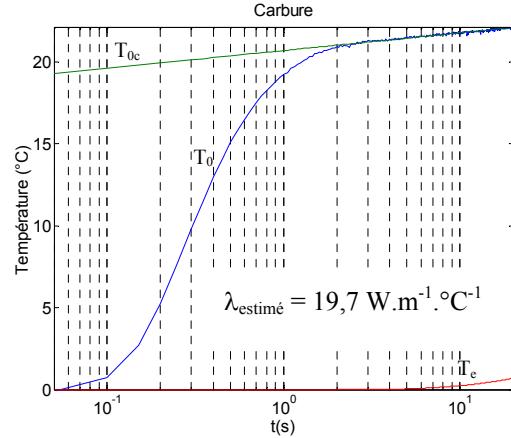


Figure 6.9 : Thermogramme fil chaud pour un carbure, estimation entre 2 et 20s.

La figure 6.8 correspond à une estimation entre 20 et 80s conduisant à une valeur $\lambda = 10,1 \text{ W.m}^{-1}.^{\circ}\text{C}^{-1}$. La figure 6.9 correspond à une estimation entre 2 et 20s conduisant à une valeur $\lambda = 19,7 \text{ W.m}^{-1}.^{\circ}\text{C}^{-1}$. Le graphe de la température $T_e(t)$ calculée ainsi que la forme de la courbe expérimentale $T_0(t)$ qui subit une modification de pente à $t = 20\text{s}$ nous montre que la première estimation de λ (entre 20 et 80s) n'est pas valide car elle est réalisée sur des temps où l'hypothèse du milieu semi-infini n'est plus valable (la perturbation a atteint l'autre face). La valeur de λ obtenue par régression linéaire entre 2 et 20s est quant à elle obtenue dans des conditions satisfaisantes : zone de linéarité de la courbe $T_0(t) = f[\ln(t)]$ et température de la face non chauffée constante. L'incertitude sur cette estimation provient principalement de l'incertitude sur la température : l'estimation est réalisée sur une élévation de température de l'ordre de 1°C alors que l'incertitude sur la température est de l'ordre de 0,2°C. Ceci montre les limites de la méthode du fil chaud pour l'estimation des conductivités thermiques élevées.

Estimation simplifiée aux temps longs

$$\text{La température du fil s'écrit dans l'espace de Laplace : } \theta_0 = \frac{\varphi_0}{p} \frac{A_0 + (A_0 R_c + B_0)/Z}{C_0 + (C_0 R_c + D_0)/Z}$$

$$\text{avec } A_0 = 1 ; \quad B_0 = \frac{1}{2\pi\lambda L q r_0} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)} - \frac{1}{\rho c \pi r_0^2 L p} ; \quad C_0 = \rho c \pi r_0^2 L p ; \quad D_0 = \frac{q r_0}{2} \frac{I_0(q r_0)}{I_1(q r_0)}$$

$$\frac{1}{Z} = 2\pi\lambda L q r_0 \frac{K_1(q r_0)}{K_0(q r_0)}$$

Si l'on considère un fil fin (r_0 petit) et si l'on se place aux temps longs ($p \rightarrow 0$), nous pouvons utiliser les développements limités des fonctions de Bessel au voisinage de 0 :

$$K_0(x) \approx -\ln(x) ; \quad K_1(x) \approx 1/x ; \quad I_0(x) \approx 1 ; \quad I_1(x) \approx x/2$$

$$\text{Qui conduisent à } A_0 = 1 ; \quad B_0 = 0 ; \quad C_0 = \rho c \pi r_0^2 L p ; \quad D_0 = 1 ; \quad \frac{1}{Z} = -\frac{2\pi\lambda L}{\ln(q r_0)}$$

On en déduit :

$$\theta_0 = \frac{\varphi_0}{p} \frac{Z + R_c}{m c p (R_c + Z) + 1} \approx \frac{\varphi_0}{p} (Z + R_c) \approx \frac{\varphi_0}{p} \left(-\frac{\ln(q r_0 \sqrt{\frac{p}{a}})}{2\pi\lambda L} + R_c \right) \approx \frac{\varphi_0}{p} \left(\frac{-\ln(p)}{4\pi\lambda L} - \frac{\ln(\frac{r_0}{\sqrt{a}})}{4\pi\lambda L} + R_c \right)$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse (cf. annexe A.2.3) permet de calculer la température $T_0(t)$ aux temps longs :

$$T_0(t) - T_0(0) \approx \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L} \ln(t) + R_c \varphi_0 - \frac{\gamma \varphi_0}{4\pi\lambda L} - \frac{\varphi_0 \ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L}$$

où $\gamma = 0,57721$ est la constante d'Euler.

soit finalement :

$$T_0(t) - T_0(0) \approx \frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L} \ln(t) + \varphi_0 \left(R_c - \frac{\ln\left(\frac{r_0}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L} + \frac{\gamma}{4\pi\lambda L} \right) \quad (6.11)$$

Le tracé de $T_0(t) - T_0(t=0)$ en fonction de $\ln(t)$ est donc une droite de pente $\frac{\varphi_0}{4\pi\lambda L}$ dont la détermination

permet de calculer la conductivité thermique λ . L'inertie de la sonde et la résistance de contact n'influent pas sur la température aux temps longs. Pour appliquer cette méthode d'estimation, il faut s'assurer que l'hypothèse du milieu semi-infini reste valable sur l'intervalle d'estimation choisi. Les bruits de mesure sur les valeurs des températures aux différents temps de mesure étant constants et non corrélés, on utilise la méthode des moindres carrés linéaires pour estimer la pente.

6.2.4 Réalisation pratique de la mesure

Cette méthode de mesure de la conductivité thermique peut être appliquée aussi bien pour les solides que pour les liquides (voire les gaz). Dans le cas des solides indéformables, le fil chauffant est inséré entre deux feuilles plastiques très minces. Un thermocouple plat est inséré dans une feuille plastique au centre du fil chauffant. Dans le cas des solides pulvérulents (grains, poudres...), le fil chauffant est placé avec le thermocouple dans un cylindre de très petit diamètre. Ce cylindre est inséré dans le matériau à caractériser avant de démarrer le chauffage et l'acquisition de la température.

Ces montages permettent d'obtenir un profil linéaire pour la courbe $T_0 = f[\ln(t)]$ et d'évaluer ensuite avec une bonne précision la valeur de la conductivité thermique λ . La principale source d'incertitude est la valeur de la densité linéique de flux de chaleur $\frac{\varphi_0}{L}$, la mesure de la puissance électrique est précise, mais il faut utiliser une longueur de chauffe suffisante pour diminuer l'incertitude sur S .

La mise en œuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. Un enregistrement d'une durée de 120 secondes après le début du chauffage est en général suffisant pour déterminer la conductivité thermique λ avec une bonne précision. Il est important comme cela a été montré ci-dessus de bien choisir l'intervalle d'estimation sur lequel les conditions suivantes doivent être respectées : linéarité de la courbe $T_0(t) = f[\ln(t)]$ et température de la face non chauffée constante.

6.3 Méthode du ruban chaud

6.3.1 Principe de la mesure

La méthode du ruban chaud consiste à utiliser une simple résistance électrique de forme rectangulaire sur laquelle est disposé un thermocouple constitué de fils de faible diamètre. La mesure de température est effectuée au centre de la résistance ce qui évite d'avoir à prendre en compte les déperditions thermiques par les fils électriques à une extrémité de la résistance. La résistance est insérée entre deux échantillons de surface plane du matériau à caractériser, les dimensions de l'échantillon sont telles que la perturbation provoquée par l'échelon de flux ($\varphi = \varphi_0$ si $t < t_0$ et $\varphi = 0$ si $t > t_0$) imposé à la sonde n'atteigne aucune de ses faces pendant la durée de la mesure (hypothèse du milieu semi-infini). Le rapport longueur/largeur de la résistance est choisi de manière à ce

que le transfert de chaleur au centre de la résistance puisse être considéré bidirectionnel pendant un temps inférieur à 180s. Le thermogramme correspondant au début du chauffage (pendant le temps où le transfert de chaleur au centre de la sonde reste unidirectionnel) est utilisé pour estimer l'effusivité thermique par une méthode de type plan chaud. Une modélisation complète des transferts bidirectionnels dans les échantillons associée à une méthode d'estimation de paramètres permet d'utiliser le thermogramme entre 0 et 180s pour estimer la conductivité thermique.

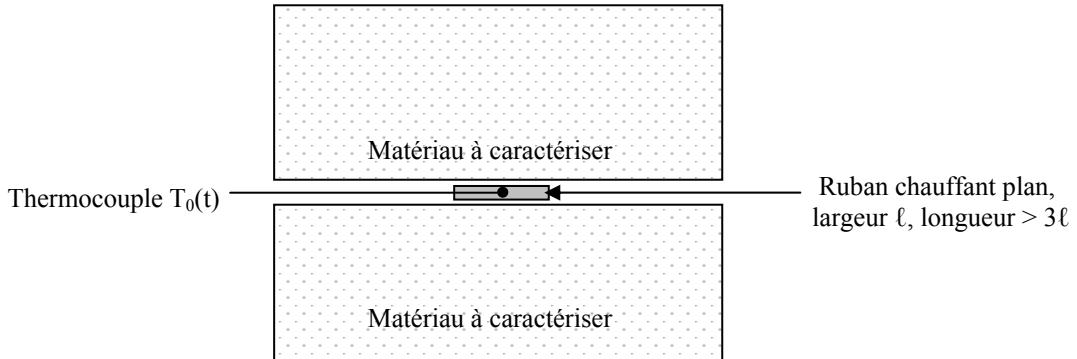


Figure 6.10 : Schéma du montage de la méthode du ruban chaud.

Les avantages de cette méthode sont un coût très faible de la sonde et une méthode d'estimation basée sur une modélisation relativement simple de la température au centre de la sonde :

- unidirectionnelle pendant le temps t_1 pour l'estimation de l'effusivité (méthode du plan chaud)
- bidirectionnelle pendant entre les temps t_1 et t_2 pour l'estimation de la conductivité .

6.3.2 Modélisation du ruban chaud

Modèle complet

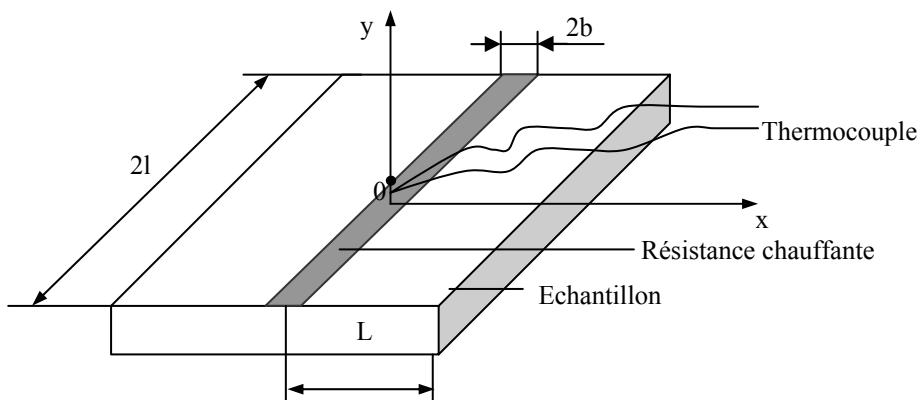


Figure 6.11 : Schématisation de la mesure ruban chaud.

L'élévation de température $T_s(x,y,t)$ en un point de coordonnées (x,y) du ruban vérifie l'équation suivante pendant le temps t_2 où le transfert en ce point reste bidirectionnel (ruban chaud infini) :

$$\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} \quad (a)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{En } y = 0 : \quad -\lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} = -\phi \quad \text{si } x < b \quad \text{et} \quad -\lambda \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} = 0 \quad \text{si } x > b$$

- En $x = 0$: $\frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} = 0$ par symétrie
- En $x = L$: $T(L, y, t) = 0$ hypothèse du milieu semi-infini selon Ox
- En $y = e$: $T(x, e, t) = 0$ hypothèse du milieu semi-infini selon Oy.

En appliquant successivement une transformation de Laplace puis une transformation finie de Fourier en cosinus entre $y = 0$ et $y = L$ à la relation (a), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, p)}{\partial y^2} = \frac{p}{a} \theta(x, y, p)$$

puis $\frac{d^2 \theta_c(n, y, p)}{dy^2} = \left(\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \theta_c(n, y, p)$ (b)

La solution générale de l'équation (b) s'écrit sous la forme :

$$\theta_c(n, y, p) = C_1 \cosh(q_n y) + C_2 \sinh(q_n y) \quad \text{avec} \quad q_n^2 = \frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

En utilisant le formalisme des quadripôles (Ladevie, 1998), on peut écrire sous forme matricielle au centre de la sonde considérée comme un système mince (pas de gradient thermique dans l'épaisseur) :

$$\begin{bmatrix} \theta_{cs}(n, 0, p) \\ \Phi_{cs}(n, 0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_s c_s p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_c(n, 0, p) \\ \lambda q_n S \theta_c(n, 0, p) \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\theta_{cs}(n, 0, p) = \frac{1 + \frac{\lambda}{h} q_n}{\frac{m_s c_s p}{S} \left(1 + \frac{\lambda}{h} q_n \right) + \lambda q_n} \frac{\sin(\alpha_n b)}{\alpha_n} \phi$$

(6.12)

avec $q_n = \sqrt{\frac{p}{a} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}}$ et $\alpha_n = \frac{n \pi}{L}$

Par transformation inverse de Fourier on obtient :

$$\theta_s(0, 0, p) = \frac{1}{L} \theta_{cs}(0, 0, p) + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{cs}(n, 0, p)$$

Et par transformation inverse de Laplace par la méthode de Stefhest, la température $T_s(0, 0, t)$ peut finalement se calculer par :

$$T_s(0, 0, t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{n_L} V_j \theta_s \left(0, 0, \frac{j \ln(2)}{t} \right)$$

Modèle simplifié

Dans le cas où l'on néglige la résistance de contact et la masse de la résistance chauffante et du thermocouple, on peut écrire (Carslaw, 1959) :

$$T_s(0, 0, t) = \frac{2 \phi \sqrt{a t}}{\lambda \sqrt{\pi}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{b}{2 \sqrt{a t}} \right) - \frac{b}{2 \sqrt{\pi a t}} \operatorname{Ei} \left(-\frac{b^2}{4 a t} \right) \right]$$

(6.13)

$$\text{avec : } \text{Ei}(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Le terme $\frac{2\phi}{\lambda\sqrt{\pi}}\sqrt{at}$ représente l'évolution de la température d'un plan chaud si l'on néglige sa masse et la résistance de contact.

6.3.3 Estimation des paramètres

Effusivité thermique

Pendant le temps t_1 où le transfert de chaleur au centre du ruban reste unidirectionnel, la température au centre du ruban évolue comme celle d'un plan chaud, soit dans l'espace de Laplace :

$$\theta_s(0,0,p) = \frac{\phi}{p} \frac{1 + R_c E S \sqrt{p}}{m_s c_s p + [R_c m_s c_s p + 1] E S \sqrt{p}}$$

$$\text{Et par inversion aux « temps longs » : } T_s(0,0,t) = \phi \left[R_c - \frac{m_s c_s}{E^2 S^2} \right] + \frac{2\phi}{ES\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$$

On trouvera à titre d'exemple sur la figure 6.12 la représentation simulée à l'aide de la formule (6.12) de l'évolution de la température au centre d'un ruban chaud de caractéristiques : $R = 61.9 \Omega$, $l = 5.3 \text{ cm}$, $b = 0.6 \text{ cm}$ utilisé sur du PVC : $\lambda = 0.21 \text{ W.m}^{-1}\text{.}^\circ\text{C}^{-1}$ et $E = 510 \text{ J.m}^{-2}\text{.}^\circ\text{C}^{-1}\text{.s}^{-1/2}$ sous une tension $U = 6V$ en considérant une résistance de contact $R_c = 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C.W}^{-1}$ et une inertie de la sonde nulles. On constate que cette courbe est confondue avec celle obtenue par le modèle plan chaud jusqu'à $t_1 = 25 \text{ s}$.

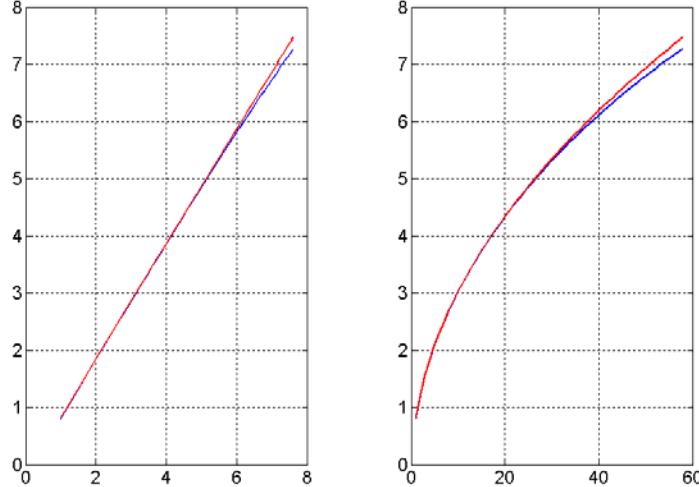


Figure 6.12 : Comparaison de thermogrammes simulés ruban chaud et plan chaud.

Une première valeur approchée de l'effusivité thermique E est estimable à partir de la pente α de la droite expérimentale $T_s(0,0,t) = f(\sqrt{t})$ déterminée par régression linéaire entre les temps t_0 (choisi tel que la sensibilité de T_s à $m_s c_s$ se soit stabilisée, 5 s pour le PVC sur la figure 2) et t_1 .

On utilise ensuite le résultat obtenu comme valeur initiale pour une estimation par la méthode de Newton des paramètres E , R_c et $m_s c_s$ qui minimisent la somme des écarts quadratiques entre la courbe $T_s(0,0,t)$ expérimentale et la courbe représentant les valeurs calculées par inversion de la formule (8) par la méthode de Sthefest. Il est également à noter qu'un léger décalage du thermocouple par rapport au centre de la sonde n'aura pas d'influence sur la précision de la mesure mais modifiera simplement le temps pendant lequel on pourra faire l'hypothèse du transfert unidirectionnel.

Conductivité thermique

Comme l'a montré Ladevie, la température d'un ruban chaud de grande longueur tend asymptotiquement vers celle du fil chaud. En négligeant l'effet de l'inertie de la sonde, la température du fil chaud s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\Theta(p) = \frac{\phi}{p} \left[R_c + \frac{K_0(qr_0)}{2\pi\lambda L qr_0 K_1(qr_0)} \right]$$

Aux temps longs, il est possible de linéariser la température $T_s(t)$ sous la forme :

$$T_s(t) = \frac{\phi}{4\pi\lambda L_{hw}} \ln(t) + \phi \left[R_c - \frac{\ln\left(\frac{r_{hw}}{\sqrt{a}}\right)}{2\pi\lambda L_{hw}} + \frac{\gamma}{4\pi\lambda L_{hw}} \right]$$

Cependant, le temps au bout duquel le ruban chaud se comporte comme un fil est trop long pour que ce comportement asymptotique puisse être utilisé dans la pratique. Si la pente de la courbe varie pour un ruban chaud, sa variation est suffisamment lente pour qu'on puisse la considérer comme constante sur un intervalle de

temps réduit. On peut ainsi estimer une première valeur approchée λ_m de λ à partir de la pente $\beta \approx \frac{\phi}{4\pi\lambda L}$ de

la courbe expérimentale $T_s(0,0,t) = f[\ln(t)]$ déterminée par régression linéaire entre les temps t_1 et t_2 .

Le résultat obtenu est ensuite utilisé comme valeur initiale pour l'estimation de la conductivité thermique λ . On peut utiliser pour cela une simple méthode dichotomique qui minimise la somme des erreurs quadratiques entre la courbe expérimentale et la courbe théorique calculée à l'aide de la formule (6.12) du modèle complet. Dans ces formules, les valeurs de E , R_c et $m_s c_s$ sont considérées comme des données.

Un exemple de courbe $T_s = f(\sqrt{t})$ entre 0 et 60s et $T_s = f[\ln(t)]$ entre 120 et 180s est présenté sur la figure 6.13. Ces courbes ont été obtenues avec le ruban chaud décrit plus haut soumis à une tension de 5,6V et placé entre deux échantillons de PVC.

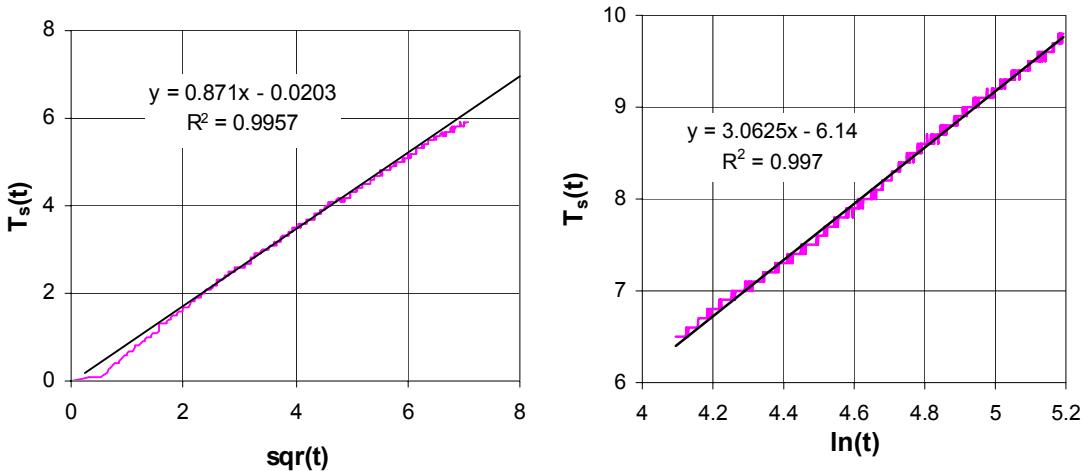


Figure 6.13 : Exemple d'une courbe expérimentale $T_s = f(t)$.

On note qu'entre 5 et 30s la courbe $T_s = f(\sqrt{t})$ est très proche d'une droite. Cela permet d'estimer une première valeur de l'effusivité thermique : $E = 525,0 \text{ J.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}.\text{s}^{-1/2}$. Une estimation des paramètres E , R_c et $m_s c_s$ par la méthode de Newton (intégrée dans un solveur bien connu) appliquée au modèle complet conduit aux résultats suivants : $E = 547,7 \text{ J.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}.\text{s}^{-1/2}$; $R_c = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ °C.W}^{-1}$ et $m_s c_s = 0,31 \text{ J.°C}^{-1}$. On note également qu'entre 60 et 120s la courbe $T_s = f[\ln(t)]$ est très proche d'une droite. Cela permet également d'estimer une

première valeur approchée de la conductivité qui peut servir de valeur initiale pour l'estimation par le modèle complet 2D.

En effet, celui-ci est ensuite utilisé avec ces valeurs de E , R_c et $m_s c_s$ considérées maintenant comme des données. Une estimation par une simple méthode dichotomique par minimisation de la somme des écarts quadratiques entre 0 et 180s conduit au résultat : $\lambda = 0,215 \text{ W.m}^{-1}.\text{C}^{-1}$. Les courbes expérimentales et calculées par le modèle 1D du plan chaud et par le modèle 2D complet sont représentées sur la figure 6.14. On note une très bonne concordance entre les courbes.

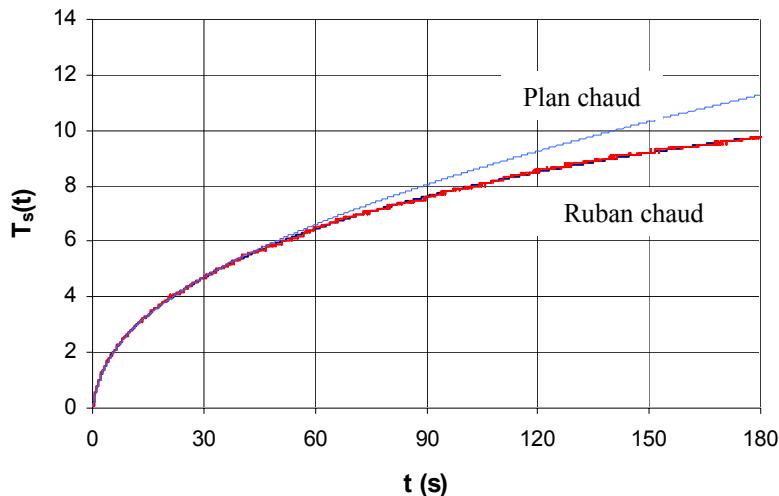


Figure 6.14 : Courbe expérimentale et courbes simulés par les modèles plan chaud 1D et complet 2D.

6.3.4 Réalisation pratique de la mesure

Cette méthode peut être mise en œuvre de manière extrêmement simple en utilisant une résistance chauffante plate rectangulaire de longueur au moins égale à 3 fois la largeur. On fixe au centre de cette résistance un thermocouple réalisé en fils fins (diamètre < 0,1 mm). Une largeur de 1,2 cm est suffisante pour les matériaux peu diffusifs (plastiques, bois), une largeur de l'ordre de 2,5 cm est nécessaire pour les matériaux plus diffusifs (pierre, grès...). La plus petite dimension de l'échantillon doit être supérieure à 1,5 fois la largeur totale du ruban. La méthode conduit à des dimensions de sonde et d'échantillons trop importantes pour les matériaux les plus diffusifs (métaux) pour lesquels elle est mal adaptée.

Un étalonnage de la sonde est nécessaire à partir d'un matériau de propriétés thermiques connues sur lequel on fait plusieurs essais. La surface utile S de la sonde est celle qui permet de retrouver la valeur connue de l'effusivité. La largeur ℓ de la sonde est ensuite déterminée : c'est celle qui permet de retrouver la valeur connue de la conductivité.

La mise en œuvre de la méthode nécessite en outre une alimentation stabilisée et un dispositif d'enregistrement de la tension délivrée aux bornes du thermocouple. Un enregistrement sur 180 secondes après le début du chauffage permet d'obtenir une bonne précision. Un pas de temps de 0,1s pour l'enregistrement de la température donne des résultats satisfaisants.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bouvenot A., « Transferts de chaleur », Masson.
2. Carslaw H.S., Jaeger J.C., « Conduction of heat in solids », Second Edition, Oxford University Press, 1959.
3. Chevrier J.-C., « Transfert de chaleur par conduction », Ecole des Mines, Nancy, 1979.
4. Chevrier J.-C., « Transfert de chaleur par rayonnement », Ecole des Mines, Nancy, 1979.
5. Gosse J. , « Guide technique de thermique », Dunod, 1981.
6. Gunther J. , « Informatique numérique », Ecole des Mines , Nancy, 1982.
7. Hladik J., « Métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux », Masson, 1990.
8. Holman J.P., « Heat transfer », seventh edition, Mac Graw Hill, 1990.
9. Huet O, Celaire R., « Bioclimatisme en zone tropicale », GRET, 1986.
10. Jannot Y., Meukam P., «Simplified estimation method for the determination of thermal effusivity and thermal conductivity with a low cost hot strip», Measurement Science and Technology, vol. 15, pp. 1932-1938, 2004.
11. Ladevie B., «Mise au point de dispositifs de caractérisation thermophysique de matériaux isolants solides ou pâteux , extension aux fluides cisaillés», Thèse doctorat ENSAM, Bordeaux, 1998.
12. Maillet D., André A., Batsale J.-C., Degiovanni A., Moyne C., « Thermal quadrupoles », John Wiley & Sons Ltd, 2000.
13. Özisik M. N., « Heat conduction », John Wiley & Sons, Inc., 1993.
14. Philipon A., « Echanges thermiques », Ecole d'Ingénieurs de l'Equipement Rural, Ouagadougou, 1988.
15. Pitts D. R., Sissom L. E., « Theory and problems of heat transfer », Schaum's Outline Series, 1977.
16. Rohsenow W. M., Hartnett J. P., Ganic E. N., « Handbook of heat transfer fundamentals », Mac Graw Hill, 1985.
17. Sacudura J.-F., « Initiation aux transferts thermiques », Technique et documentation, Lavoisier, 1989.
18. Siegel R., Howell J. R., « Thermal radiation heat transfer », 1992.
19. Spiegel M. R., « Transformées de Laplace, cours et problèmes », Schaum, 1990.
20. Sparrow E.M., Cess R.D., « Radiation heat transfer », Mac Graw Hill, 1978.
21. Taine J., Petit J.-P., « Transferts thermiques, cours et données de base », Dunod, 1995.
22. Whitaker S., « Fundamental principles of heat transfer », Robert E. Krieger Publishing Company Inc., 1983.
23. Wong H.Y., « Heat transfer for engineers », Longman, 1977.

ANNEXES

A.1.1 : PROPRIETES PHYSIQUES DE CERTAINS CORPS	113
A.1.1 : PROPRIETES PHYSIQUES DE L' AIR ET DE L' EAU	114
A.2.1 : VALEUR DU COEFFICIENT DE FORME DE CONDUCTION	115
A.2.2 : PRINCIPALES TRANSFORMATIONS INTEGRALES : LAPLACE, FOURIER, HANKEL	116
A.2.3 : TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE	118
A.2.4 : CHOIX DES TRANSFORMATIONS INTEGRALES POUR DIFFERENTES CONFIGURATIONS.....	120
A.2.5 : EQUATIONS ET FONCTIONS DE BESSSEL	122
A.2.6 : VALEURS DE LA FONCTION ERF.....	124
A.2.7 : MILIEU SEMI-INFINI AVEC TEMPERATURE IMPOSEE.....	124
A.2.8 : TEMPERATURE D'UNE PLAQUE AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE	125
A.2.9 : TEMPERATURE D'UN CYLINDRE INFINI AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE	126
A.2.10 : TEMPERATURE D'UNE SPHERE AVEC COEFFICIENT DE TRANSFERT IMPOSE.....	127
A.2.11 : MATRICES QUADRIPOLAIRES POUR DIFFERENTES CONFIGURATIONS	128
A.2.12 : EFFICACITE DES AILETTES.....	130
A.3.1 : EMISSIVITE DE CERTAINS CORPS	131
A.3.2 : FRACTION D'ENERGIE $F_{0-\lambda T}$ RAYONNEE PAR UN CORPS NOIR ENTRE 0 ET λ	132
A.3.3 : FACTEURS DE FORME GEOMETRIQUE DE RAYONNEMENT	133
A.3.4 : EMISSIVITE DU CO ₂ ET DE LA VAPEUR D'EAU	137
A.3.5 : EPAISSEURS DE GAZ EQUIVALENTES VIS-A-VIS DU RAYONNEMENT	139
A.4.1 : CORRELATIONS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT EN CONVECTION FORCEE.....	140
A.4.2 : CORRELATIONS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT EN CONVECTION NATURELLE	142
A.5.1 : ABAQUES NUT = f(η) POUR LES ECHANGEURS.....	143

A.1.1 : Propriétés physiques de certains corps

Nature	θ	ρ	c_p	λ	Nature	θ	ρ	c_p	λ					
	°C	kg m ⁻³	J kg ⁻¹ °C ⁻¹	W m ⁻¹ °C ⁻¹		°C	kg m ⁻³	J kg ⁻¹ °C ⁻¹	W m ⁻¹ °C ⁻¹					
Métaux, alliages et céramiques														
Acier au carbone	20	7833	465	54	Ardoise	20	2400	879	2,2					
	200			48	Basalte	20	2850	881	1,6					
	600			35	Béton caverneux	20	1900	879	1,4					
Acier inox 15%Cr, 10%Ni	20	7864	460	20	Béton plein	20	2300	878	1,75					
Acier inox 18%Cr, 8%Ni	20	7816	460	16,3	Bitume (cartonné)	20	1050	1305	0,23					
	600			22	Bois feuillus légers	20	525	3143	0,15					
Acier inox 25%Cr, 20%Ni	20	7864	460	13	Bois feuillus mi-lourds	20	675	3156	0,23					
Alumine	20			29	Bois feuillus très légers	20	375	3147	0,12					
Aluminium	20	2707	896	204	Bois résineux légers	20	375	3147	0,12					
	400			249	Bois résineux mi-lourds	20	500	3160	0,15					
Argent	20	10525	234	407	Bois résineux très légers	20	375	3147	0,12					
Bronze 75%Cu, 25%Sn	20	8666	343	26	Brique terre cuite	20	1800	878	1,15					
Carbone	20			147	Calcaire dur	20	2450	882	2,4					
Carbure de silicium	20			13	Calcaire tendre	20	1650	879	1					
Chrome	20	2118	7160	449	Carrelage	20	2400	875	2,4					
Constantan 60% Cu, 40%Ni	20	8922	410	22,7	Contre-plaqué okoumé	20	400	3000	0,12					
Cuivre	20	8954	383,1	386	Contre-plaqué pin	20	500	3000	0,15					
	400			363	Granite	20	2600	881	3					
Duralumin	20	2787	883	164	Gravier (vrac)	20	1800	889	0,7					
Etain	20	7304	226	64	Grès	20	2500	880	2,6					
Fer	20	7870	452	73	Lave	20	2350	881	1,1					
Fonte	20	7849	460	59	Marbre	20	2700	881	2,9					
Laiton 70%Cu, 30%Zn	20	8522	385	111	Parquet	20	700	3143	0,2					
	400			147	Plâtre	20			0,48					
Magnésie	38	270		0,067	Schiste	20	2400	879	2,2					
Or	20	1336	19300	129	Matériaux isolants									
Platine	20			72	Balsa	20	85		0,054					
Plomb	20	11373	130	35	Copeaux bois	23			0,059					
Sodium liquide	100			81,5	Coton	20	80	1300	0,06					
Titane	20			16	Kapok	30			0,035					
Tungstène	20	19350	134	163	Laine de roche	20	20	880	0,047					
Zinc	20	7144	384	112		20	55	880	0,038					
Zircone	20			4		20	135	880	0,041					
Matériaux divers														
Amiante	20			0,16	Laine de verre	20	8	875	0,051					
Asphalte	20	2115	920	0,062		20	10	880	0,045					
Caoutchouc (naturel)	20	1150		0,28		20	15	880	0,041					
Caoutchouc (vulcanisé)	20	1100	2010	0,13		20	40	880	0,035					
Carton	20	86	2030	0,048	Liège expansé	20	120	2100	0,044					
Cuir	20	998		0,159	Moquette	20	200	1300	0,06					
Glace	0	920	2040	1,88	Polyuréthane (mousse rigide)	20	32	1300	0,03					
Papier	20			0,48		20	50	1360	0,035					
Plexiglass	20	1190	1465	0,19		20	85	1300	0,045					
Sable	20	1515	800	0,2-1,0	PVC (mousse rigide)	20	30	1300	0,031					
Sciure	20					20	40	1300	0,041					
Terre mouillée	20	1900	2000	2		20	12	1300	0,047					
Terre sèche	20	1500	1900	1	Polystyrène expansé	20	14	1300	0,043					
Verre	20	2700	840	0,78		20	18	1300	0,041					
						20	28	1300	0,037					

A.1.1 : Propriétés physiques de l'air et de l'eau

Propriétés de l'eau à saturation							Propriétés de l'air à 1 atm						
θ	ρ	c_p	λ	$10^4 \cdot \mu$	$10^7 \cdot \alpha$	Pr	θ	ρ	c_p	λ	$10^5 \cdot \mu$	$10^5 \cdot \alpha$	Pr
(°C)	(kg/m³)	(J/kg.°C)	(W/m.°C)	(Pa.s)	(m²/s)		(°C)	(kg/m³)	(J/kg.°C)	(W/m.°C)	(Pa.s)	(m²/s)	
0	1002	4218	0,552	17,90	1,31	13,06	0	1,292	1006	0,0242	1,72	1,86	0,72
20	1001	4182	0,597	10,10	1,43	7,02	20	1,204	1006	0,0257	1,81	2,12	0,71
40	995	4178	0,628	6,55	1,51	4,34	40	1,127	1007	0,0272	1,90	2,40	0,70
60	985	4184	0,651	4,71	1,55	3,02	60	1,059	1008	0,0287	1,99	2,69	0,70
80	974	4196	0,668	3,55	1,64	2,22	80	0,999	1010	0,0302	2,09	3,00	0,70
100	960	4216	0,680	2,82	1,68	1,74	100	0,946	1012	0,0318	2,18	3,32	0,69
120	945	4250	0,685	2,33	1,71	1,45	120	0,898	1014	0,0333	2,27	3,66	0,69
140	928	4283	0,684	1,99	1,72	1,24	140	0,854	1016	0,0345	2,34	3,98	0,69
160	910	4342	0,680	1,73	1,73	1,10	160	0,815	1019	0,0359	2,42	4,32	0,69
180	889	4417	0,675	1,54	1,72	1,00	180	0,779	1022	0,0372	2,50	4,67	0,69
200	867	4505	0,665	1,39	1,71	0,94	200	0,746	1025	0,0386	2,57	5,05	0,68
220	842	4610	0,652	1,26	1,68	0,89	220	0,700	1028	0,0399	2,64	5,43	0,68
240	816	4756	0,635	1,17	1,64	0,88	240	0,688	1032	0,0412	2,72	5,80	0,68
260	786	4949	0,611	1,08	1,58	0,87	260	0,662	1036	0,0425	2,79	6,20	0,68
280	753	5208	0,580	1,02	1,48	0,91	280	0,638	1040	0,0437	2,86	6,59	0,68
300	714	5728	0,540	0,96	1,32	1,02	300	0,616	1045	0,0450	2,93	6,99	0,68

Corrélations entre 0 et 100 °C

(θ : température en °C , T température en K)

Pour l'air

- $\rho = \frac{353}{(\theta + 273)}$ kg m⁻³
- $c_p = 1008$ J kg⁻¹ °C⁻¹
- $\lambda = 7,57 \cdot 10^{-5} \theta + 0,0242$ W m⁻¹ °C⁻¹ $r^2 = 0,9999$
- $\mu = 10^{-5} (0,0046 \theta + 1,7176)$ Pa s $r^2 = 0,9997$
- $\alpha = 10^{-5} (0,0146 \theta + 1,8343)$ m² s⁻¹ $r^2 = 0,9986$
- $Pr = -2,54 \cdot 10^{-4} \theta + 0,7147$ $r^2 = 0,9767$
- $\beta \approx \frac{1}{T}$ K⁻¹

Pour l'eau

- $\rho = -0,00380 \theta^2 - 0,0505 \theta + 1002,6$ kg m⁻³ $r^2 = 0,9982$
- $c_p = 4180$ J kg⁻¹ °C⁻¹
- $\lambda = -9,87 \cdot 10^{-6} \theta^2 + 2,238 \cdot 10^{-3} \theta + 0,5536$ W m⁻¹ °C⁻¹ $r^2 = 0,9987$
- $\mu = 10^{-4} (0,00200 \theta^2 - 0,3389 \theta + 17,199)$ Pa s $r^2 = 0,9815$
- $\alpha = 10^{-7} (-0,00360 \theta + 1,340)$ m² s⁻¹ $r^2 = 0,9734$
- $Pr = 1,577 \cdot 10^{-3} \theta^2 - 0,261 \theta + 12,501$ $r^2 = 0,9796$
- $\frac{g \beta \rho^2 c_p}{\mu \lambda} = (0,0105 \theta^2 + 0,477 \theta - 0,0363) 10^9 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ m}^{-3}$ $r^2 = 0,9992$
- $\log_{10} [p_{sat}(T)] = 20,3182 - \frac{2795}{T} - 3,868 \log_{10}(T)$ mmHg $-50^\circ\text{C} < \theta > 200^\circ\text{C}$
- $Lv = 2495 - 2,346 \theta$ kJ.kg⁻¹ $0^\circ\text{C} < \theta < 100^\circ\text{C}$

A.2.1 : Valeur du coefficient de forme de conduction

Système	Schéma	Coefficient de forme	Domaine d'application
Cylindre isotherme de rayon r enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{r}\right)}$	$L \gg r$
Sphère isotherme de rayon r enterrée dans un milieu infini		$4\pi r$	
Sphère isotherme enterrée dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\frac{4\pi r}{1 - \frac{r}{2D}}$	
Conduction entre 2 cylindres isothermes enterré dans un milieu infini		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$
Cylindre horizontal au centre dans une plaque infinie		$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4D}{r}\right)}$	
Cylindre isotherme de rayon r placé dans un milieu semi-infini		$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{2L}{r}\right)}$	$L \gg 2r$
Parallélépipède rectangle isotherme enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$1.685 L \left[\log\left(1 + \frac{b}{a}\right) \right]^{-0.59} \left(\frac{b}{c} \right)^{-0.078}$	
Cylindre au centre d'un parallélépipède de section carrée		$\frac{2\pi L}{\ln\left(0.54 \frac{h}{r}\right)}$	$L \gg W$
Plaque rectangulaire mince enterrée dans milieus semi-infini à surface isotherme		$4r$ $8r$	$D = 0$ $D \gg 2r$
Sphère creuse		$\frac{4\pi r_0 r_1}{r_0 - r_1}$	

A.2.2 : Principales transformations intégrales : Laplace, Fourier, Hankel

Transformée de Laplace

Définition

$$L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) T(t) dt \quad \text{et} \quad L^{-1}[\theta(p)] = T(t) \quad (\text{Transformée inverse})$$

Propriétés

Linéarité	$L[a_1 T(t) + a_2 T(t)] = a_1 L[T(t)] + a_2 L[T(t)]$, idem pour L^{-1}
Translation	$L[\exp(at) T(t)] = \theta(p-a)$	$L^{-1}[\theta(p-a)] = \exp(at) T(t)$
		$L^{-1}[\exp(-at) \theta(p)] = T(t-a)$ si $t > a$ 0 si $t < a$
Changement d'échelle	$L[T(at)] = \frac{1}{a} \theta\left(\frac{p}{a}\right)$	$L^{-1}[\theta(a p)] = \frac{1}{a} T\left(\frac{t}{a}\right)$
Dérivation	$L[T'(t)] = p \theta(p) - T(0)$	$L^{-1}[\theta^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n T(t)$
	$L[T''(t)] = p^2 \theta(p) - pT(0) - T'(0)$	
Intégration	$L\left[\int_0^t T(u) du\right] = \frac{\theta(p)}{p}$	$L^{-1}\left[\int_p^\infty \theta(u) du\right] = \frac{F(t)}{t}$
Multiplication par t^n	$L[t^n T(t)] = (-1)^n \theta^{(n)}(p)$	$L^{-1}[p \theta(p)] = T'(t) - T(0) \delta(t)$
Division par t	$L\left[\frac{T(t)}{t}\right] = \int_p^\infty \theta(u) du$	$L^{-1}\left[\frac{\theta(p)}{p}\right] = \int_0^t T(u) du$
Fonctions périodiques (Période P)	$L[T(t)] = \frac{\int_0^P \exp(-pt) T(t) dt}{1 - \exp(-pP)}$	

Transformée de Fourier complexe

Définition

$$F[T(x)] = \theta(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} T(x) dx$$

$$T(x) = F^{-1}[\theta(\omega)] = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \theta(\omega) d\omega$$

Propriétés

$$F\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = -i\omega \theta(\omega)$$

$$F\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = -\omega^2 \theta(\omega)$$

A.2.2 Principales transformations intégrales : Laplace, Fourier, Hankel

Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Définitions

Sinus	Cosinus
$F_s[T(x)] = \theta_s(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} T(x) \sin[\omega x] dx$	$F_c[T(x)] = \theta_c(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} T(x) \cos[\omega x] dx$
$T(x) = F_s^{-1}[\theta_s(\omega)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \theta(\omega) \sin(\omega x) d\omega$	$T(x) = F_c^{-1}[\theta_c(\omega)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \theta(\omega) \cos(\omega x) d\omega$

Propriétés

$F_s\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = -\omega \theta_c(\omega)$	$F_c\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] = -\omega \theta_s(\omega) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(0)$
$F_s\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = -\omega^2 \theta_s(\omega) + \omega \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T(0)$	$F_c\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = -\omega^2 \theta_c(\omega) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{x=0}$

Transformée finie de Fourier en sinus et cosinus

Définitions

Si la température $T(x)$ n'est définie que sur l'intervalle $[0, L]$, on peut utiliser une transformation finie de Fourier en sinus ou en cosinus :

$$F_s[T(x)] = \theta_s(n) = \int_0^L T(x) \sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx \quad \text{ou} \quad F_c[T(x)] = \theta_c(n) = \int_0^L T(x) \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right] dx$$

$$T(x) = F_s^{-1}[\theta_s(n)] = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_s(n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{ou} \quad T(x) = F_c^{-1}[\theta_c(n)] = \frac{1}{L} \theta_c(0) + \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_c(n) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Propriétés

$$F_s\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \theta_s(n) = \frac{n\pi}{L} [T(0) - (-1)^n T(L)] - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \theta_s(n)$$

$$F_c\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \theta_c(n) = (-1)^n \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} - \frac{n^2\pi^2}{L^2} \theta_c(n)$$

Transformée de Hankel d'ordre v

Définition

Pour $v > -1/2$:

$$H_v[T(r)] = \theta_v(\sigma) = \int_0^{\infty} r J_v(\sigma r) T(r) dr \quad T(x) = H_v^{-1}[\theta_v(\sigma)] = \int_0^{\infty} \sigma J_v(\sigma r) \theta_v(\sigma) d\sigma$$

Propriété

$$H_v\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{v^2}{r^2} T\right] = -\sigma^2 \theta_v(\sigma) \quad ; \quad \text{à l'ordre 0 : } H_0[T(r)] = T_i = \int_0^{\infty} r J_0(\sigma r) dr = \frac{r}{\sigma} J_1(\sigma r)$$

A.2.3 : Transformation de Laplace inverse

Méthode analytique

La transformée de Laplace $\theta(p)$ de la fonction $T(t)$ est donnée par : $L[T(t)] = \theta(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) T(t) dt$

Il n'existe pas de formule analytique générale permettant de calculer $T(t)$ connaissant $\theta(p)$. On connaît cependant l'expression exacte de $T(t)$ pour certaines fonctions particulières $\theta(p)$, on en trouvera des exemples page suivante (cf. Spiegel pour des tables plus complètes). L'utilisation de ces tables associée aux propriétés particulières de la transformation de Laplace inverse rappelées en annexe A.2.2 peut permettre de résoudre un certain nombre de cas. On essaiera toujours de décomposer une fonction complexe en somme, produit, série... de fonctions simples plus facilement inversibles.

Méthodes numériques

Pour les cas de figure pour lesquels on ne peut pas trouver une solution analytique, on peut employer l'une des deux méthodes numériques suivantes :

Méthode de Stehfest

La transformée inverse de la fonction $\theta(p)$ peut se calculer par :

$$T(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^N V_j \theta_i\left(\frac{j \ln(2)}{t}\right)$$

$N = 20$ (double précision) :

$V1 = -5,511463844797178.10^{-6}$	$V2 = 1,523864638447972.10^{-1}$	$V3 = -1,174654761904762.10^2$
$V4 = 1,734244933862434.10^4$	$V5 = -9,228069289021164.10^5$	$V6 = 2,37740877871031810.7$
$V7 = -3,494211661953704.10^8$	$V8 = 3,241369852231879.10^9$	$V9 = -2,027694830723779.10^{10}$
$V10 = 8,946482982379724.10^{10}$	$V11 = -2,870209211471027.10^{11}$	$V12 = 6,829920102815115.10^{11}$
$V13 = -1,219082330054374.10^{12}$	$V14 = 1,637573800842013.10^{12}$	$V15 = -1,647177486836117.10^{12}$
$V16 = 1,22192455444226.10^{12}$	$V17 = -6,488065588175326.10^{11}$	$V18 = 2,333166532137059.10^{11}$
$V19 = -5,091380070546738.10^{10}$	$V20 = 5,091380070546738.10^9$	

$N = 10$ (simple précision):

$V1 = 1/12$	$V2 = -385/12$	$V3 = 1279$	$V4 = -46871/3$	$V5 = 505465/6$	$V6 = -473915/2$
$V7 = 1127735/3$	$V8 = -1020215/3$	$V9 = 328125/2$	$V10 = -65625/2$		

Méthode de Fourier

$$T(t) = \frac{\exp(ct)}{t_{\max}} \left[\frac{\theta(c)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re}[\theta(c + j\omega_k)] \cos(\omega_k t) - \operatorname{Im}[\theta(c + j\omega_k)] \sin(\omega_k t) \right) \right]$$

Avec $\omega_k = \frac{k\pi}{t_{\max}}$

La somme infinie est dans la pratique calculée pour un nombre de fini N de termes, on prendra en général $N > 100$. Cette méthode nécessite de choisir deux paramètres : c et t_{\max} . On doit s'assurer a posteriori que $\exp(-2c t_{\max}) T(2 t_{\max}) \approx 0$.

Choix d'une méthode et vérification des résultats

La méthode de Stehfest est plus simple à mettre en oeuvre car elle ne nécessite pas de choisir certains paramètres. La méthode de Fourier peut conduire à un meilleur résultat dans le cas d'inversion de certaines fonctions comme les fonctions périodiques par exemple (cf. Maillet).

L'étude du comportement de la fonction $\theta(p)$ aux temps longs ($t \rightarrow \infty$ soit $p \rightarrow 0$) et aux temps courts ($t \rightarrow 0$ soit $p \rightarrow \infty$) peut conduire à des formules approchées de $\theta(p)$ dont on peut alors trouver la transformée de Laplace inverse analytiquement. La comparaison de ces solutions analytiques avec les résultats de l'inversion numérique donne une indication sur la justesse de l'inversion numérique.

A.2.3 : Transformation de Laplace inverse

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$\Theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$	$\Theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{\ln(p)}{p}$	$- \ln(t) - \gamma ; \gamma = 0,57721$
1	$\delta(t)$ Dirac	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p+\beta}$	$e^{-\beta t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{ch}(\omega t)$
$\frac{b}{p(b + \sqrt{p})}$	$1 - \exp(b^2 t) \text{erfc}(b\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^n} \quad n = 1, 2, 3\dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$\Theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
e^{-qx}	$\frac{x}{2\sqrt{\pi\alpha t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p}$	$\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2\alpha}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - x \left(\frac{t}{\pi\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - h \alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\frac{1}{h} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \frac{1}{h} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p q (q+h)}$	$\frac{2}{h} \left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{1+h x}{h^2} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{1}{h^2} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$-2h \left(\frac{\alpha^3 t}{\pi}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha t}\right) + \alpha (1 + h x + 2 h^2 \alpha t) \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$

A.2.4 : Choix des transformations intégrales pour différentes configurations

n°	Condition limite $x=0$	Condition limite $x=e$	Equation transcendante	Fonctions propres	Norme
Cylindre creux de rayons R_1 et R_2					
1	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R_1)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n R_1)J_0(\alpha_n R_2) = 0$	$J_0(\alpha_n r)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n r)J_0(\alpha_n R_2)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_0^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n R_1)}$
2	$\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$J_1(\alpha_n R_1)Y_0(\alpha_n R_2) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n R_1) = 0$	$J_1(\alpha_n R_2)Y_0(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n r)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_0^2(\alpha_n R_1) - J_1^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n R_1)}$
3	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R_2)Y_1(\alpha_n R_1) - Y_0(\alpha_n R_2)J_1(\alpha_n R_1) = 0$	$J_0(\alpha_n r)Y_1(\alpha_n R_2) - Y_0(\alpha_n r)J_0(\alpha_n R_2)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_1^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n R_1)}$
4	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0$	$J_1(\alpha_n R_1)Y_1(\alpha_n R_2) - Y_1(\alpha_n R_1)J_1(\alpha_n R_2) = 0$	$J_1(\alpha_n R_2)Y_0(\alpha_n r) - Y_1(\alpha_n R_2)J_0(\alpha_n r)$	$\frac{2}{\pi^2} \frac{J_1^2(\alpha_n R_1) - J_0^2(\alpha_n R_2)}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n R_1)}$
Cylindre plein de rayon extérieur R					
5		$\phi = 0$	$J_0(\alpha_n R) = 0$	$J_0(\alpha_n R)$	$\frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n R)$
6		$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$J_1(\alpha_n R) = 0$	$J_0(\alpha_n R)$	$\frac{R^2}{2} J_0^2(\alpha_n R) \quad \text{si } \alpha_n \neq 0$ $\frac{R^2}{2} \quad \text{si } \alpha_n = \alpha_0 = 0$

A.2.4 : Choix des transformations intégrales pour différentes configurations

Plaque d'épaisseur e					
n°	Condition limite $x=0$	Condition limite $x=e$	Valeurs propres	Fonctions propres	Norme
1	$\phi = 0$	$\phi = 0$	$n\pi/e$	$\sin(\alpha_n x)$	$e/2$
2	$\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi/e$	$\sin(\alpha_n x)$	$e/2$
3	$\phi = 0$	$\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\sin(\alpha_n x)$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{he/\lambda}{(he/\lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
4	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\phi = 0$	$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi/e$	$\cos(\alpha_n x)$	$e/2$
5	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$n\pi/e$	$\cos(\alpha_n x)$	e pour $n = 0$ $e/2$ pour $n = 1, 2, \dots$
6	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	$\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	Racines positives de $\cotg(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\cos(\alpha_n x)$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{he/\lambda}{(he/\lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
7	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	$\phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = -\frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\sin[\alpha_n(e-x)]$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{he/\lambda}{(he/\lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
8	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h\phi = 0$	$\frac{d\phi}{dx} = 0$	Racines positives de $\cotg(\alpha_n e) = \frac{\lambda}{h} \alpha_n$	$\cos[\alpha_n(e-x)]$	$\frac{e}{2} \left[1 + \frac{he/\lambda}{(he/\lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} \right]$
9	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h_1 \phi = 0$	$-\lambda \frac{d\phi}{dx} + h_2 \phi = 0$	Racines positives de $\tan(\alpha_n e) = \frac{\lambda \alpha_n (h_1 + h_2)}{(\lambda \alpha_n)^2 - h_1 h_2}$	$\cos(\alpha_n x)$ $+ \frac{h_1}{\lambda \alpha_n} \sin(\alpha_n x)$	$\frac{1}{2 e \alpha_n^2} \left[\left((h_1 e/\lambda)^2 + (\alpha_n e)^2 \right) \left(1 + \frac{h_2 e / \lambda}{(h_2 e / \lambda)^2 + (\alpha_n e)^2} + \frac{h_1 e}{\pi} \right) \right]$

A.2.5 : Equations et fonctions de Bessel

Equations particulières de Bessel et leurs solutions

$$\begin{aligned} y'' + \frac{y'}{x} + m^2 y = 0 &\Rightarrow y = k_1 J_0(mx) + k_2 Y_0(mx) \\ x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 &\Rightarrow y = k_1 J_n(x) + k_2 Y_n(x) \quad (n \text{ entier}) \\ y'' + \frac{y'}{x} - m^2 y = 0 &\Rightarrow y = k_1 I_0(mx) + k_2 K_0(mx) \\ x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0 &\Rightarrow y = k_1 I_n(x) + k_2 K_n(x) \end{aligned}$$

J_n Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce non modifiée d'ordre n

I_n Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce modifiée d'ordre n

Y_n Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce non modifiée d'ordre n

K_n Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce modifiée d'ordre n.

(cf. Özisik pour la définition des fonctions de Bessel).

Principales propriétés des fonctions de Bessel

Récurrence

$$\begin{aligned} J_{n+1}(u) &= -J_{n-1}(u) + \frac{2n}{u} J_n(u) & Y_{n+1}(u) &= -Y_{n-1}(u) + \frac{2n}{u} Y_n(u) \\ I_{n+1}(u) &= I_{n-1}(u) - \frac{2n}{u} I_n(u) & K_{n+1}(u) &= K_{n-1}(u) - \frac{2n}{u} K_n(u) \end{aligned}$$

Dérivée

$$\begin{aligned} J'_n(u) &= J_{n-1}(u) - \frac{n}{u} J_n(u) = -J_{n+1}(u) + \frac{n}{u} J_n(u) & Y'_n(u) &= Y_{n-1}(u) - \frac{n}{u} Y_n(u) = -Y_{n+1}(u) + \frac{n}{u} Y_n(u) \\ I'_n(u) &= I_{n-1}(u) - \frac{n}{u} I_n(u) = I_{n+1}(u) + \frac{n}{u} I_n(u) & K'_n(u) &= -K_{n-1}(u) - \frac{n}{u} K_n(u) = -K_{n+1}(u) + \frac{n}{u} K_n(u) \end{aligned}$$

Limites des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{llll} J_0(u) \rightarrow 1 & J_1(u) \rightarrow 0 & Y_0(u) \rightarrow -\infty & Y_1(u) \rightarrow -\infty \\ I_0(u) \rightarrow 1 & I_1(u) \rightarrow 0 & K_0(u) \rightarrow +\infty & K_1(u) \rightarrow +\infty \end{array}$$

Si $u \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{llll} J_0(u) \rightarrow 0 & J_1(u) \rightarrow 0 & Y_0(u) \rightarrow 0 & Y_1(u) \rightarrow 0 \\ I_0(u) \rightarrow +\infty & I_1(u) \rightarrow +\infty & K_0(u) \rightarrow 0 & K_1(u) \rightarrow 0 \end{array}$$

Comportement asymptotique des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{llll} J_0(u) \rightarrow 1 & J_1(u) \rightarrow u/2 & Y_0(u) \rightarrow (2/\pi) \ln(u) & Y_1(u) \rightarrow 2/\pi u \\ I_0(u) \rightarrow 1 & I_1(u) \rightarrow u/2 & K_0(u) \rightarrow -\ln(u) & K_1(u) \rightarrow 1/x \end{array}$$

Si $u \rightarrow \infty$

$$\begin{array}{llll} J_0(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) & J_1(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right) & Y_0(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_1(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right) & I_0(u), I_1(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp(u) & K_0(u), K_1(u) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2u}} \exp(-u) \end{array}$$

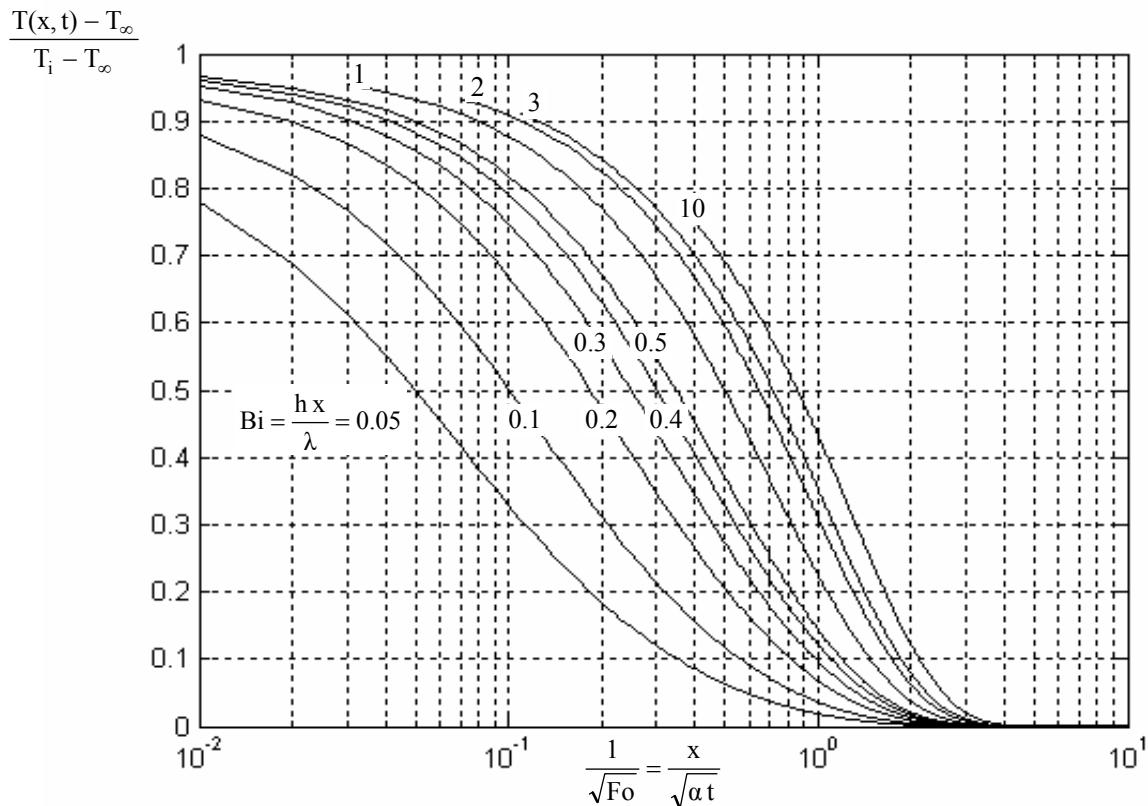
A.2.5 : Fonctions et équations de Bessel

x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	K ₀ (x)	K ₁ (x)	x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	K ₀ (x)	K ₁ (x)
0	1,0000	0,0000	∞	∞	3,0	4,881	3,953	0,035	0,041
0,1	1,0025	0,0501	2,427	9,849	3,1	5,294	4,326	0,031	0,036
0,2	1,01	0,1005	1,753	4,775	3,2	5,747	4,734	0,028	0,031
0,3	1,0226	0,1517	1,373	3,057	3,3	6,243	5,181	0,025	0,028
0,4	1,0404	0,204	1,115	2,185	3,4	6,785	5,67	0,022	0,025
0,5	1,0635	0,2579	0,924	1,656	3,5	7,378	6,206	0,019	0,022
0,6	1,092	0,3137	0,778	1,302	3,6	8,028	6,793	0,017	0,020
0,7	1,1263	0,3719	0,660	1,051	3,7	8,739	7,436	0,016	0,017
0,8	1,1665	0,4329	0,565	0,862	3,8	9,517	8,14	0,014	0,016
0,9	1,213	0,4971	0,487	0,716	3,9	10,369	8,913	0,013	0,014
1,0	1,2661	0,5652	0,421	0,602	4,0	11,3	9,76		
1,1	1,3262	0,6375	0,366	0,509	4,1	12,32	10,69		
1,2	1,3937	0,7147	0,319	0,435	4,2	13,44	11,71		
1,3	1,4693	0,7973	0,278	0,372	4,3	14,67	12,82		
1,4	1,5534	0,8861	0,243	0,320	4,4	16,01	14,05		
1,5	1,6467	0,9817	0,214	0,278	4,5	17,48	15,39		
1,6	1,75	1,0848	0,188	0,240	4,6	19,09	16,86		
1,7	1,864	1,1963	0,165	0,209	4,7	20,86	18,48		
1,8	1,9896	1,3172	0,146	0,182	4,8	22,79	20,25		
1,9	2,1277	1,4482	0,129	0,160	4,9	24,91	22,2		
2,0	2,28	1,591	0,113	0,140	5,0	27,24	24,34		
2,1	2,446	1,746	0,101	0,123	5,1	29,79	26,68		
2,2	2,629	1,914	0,090	0,108	5,2	32,58	29,25		
2,3	2,83	2,098	0,079	0,094	5,3	35,65	32,08		
2,4	3,049	2,298	0,071	0,083	5,4	39,01	35,18		
2,5	3,29	2,517	0,063	0,074	5,5	42,7	38,59		
2,6	3,553	2,755	0,055	0,066	5,6	46,74	42,33		
2,7	3,842	3,016	0,049	0,058	5,7	51,17	46,44		
2,8	4,157	3,301	0,044	0,050	5,8	56,04	50,95		
2,9	4,503	3,613	0,039	0,046	5,9	61,38	55,9		

A.2.6. : Valeur de la fonction erf

x	erf x	erfc x	ierf x	x	erf x	erfc x	ierf x
0	0,000000	1,000000	0,564190	1,1	0,880205	0,11980	1,760
0,05	0,056372	0,943628	0,518421	1,2	0,910314	0,08969	2,274
0,1	0,112463	0,887537	0,481106	1,3	0,934008	0,06599	2,972
0,15	0,167996	0,832004	0,452227	1,4	0,952285	0,04772	3,939
0,2	0,222703	0,777297	0,431755	1,5	0,966105	0,03390	5,302
0,25	0,276326	0,723674	0,419658	1,6	0,976378	0,02362	7,260
0,3	0,328627	0,671373	0,415910	1,7	0,983790	0,01621	10,124
0,35	0,379382	0,620618	0,420498	1,8	0,989091	0,01091	14,386
0,4	0,428392	0,571608	0,433440	1,9	0,992790	0,00721	20,842
0,45	0,475482	0,524518	0,454795	2	0,995322	0,00468	30,794
0,5	0,520500	0,479500	0,484684	2,1	0,997021	0,00298	46,409
0,55	0,563323	0,436677	0,523311	2,2	0,998137	0,00186	71,349
0,6	0,603856	0,396144	0,570983	2,3	0,998857	0,00114	111,901
0,65	0,642029	0,357971	0,628143	2,4	0,999311	0,00069	179,043
0,7	0,677801	0,322199	0,695397	2,5	0,999593	0,00041	292,257
0,75	0,711156	0,288844	0,773551	2,6	0,999764	0,00024	486,693
0,8	0,742101	0,257899	0,863656	2,7	0,999866	0,00013	826,860
0,85	0,770668	0,229332	0,967059	2,8	0,999925	0,00008	1433,158
0,9	0,796908	0,203092	1,085464	2,9	0,999959	0,00004	2534,205
0,95	0,820891	0,179109	1,221003	3	0,999978	0,00002	4571,677
1	0,842701	0,157299	1,376328				

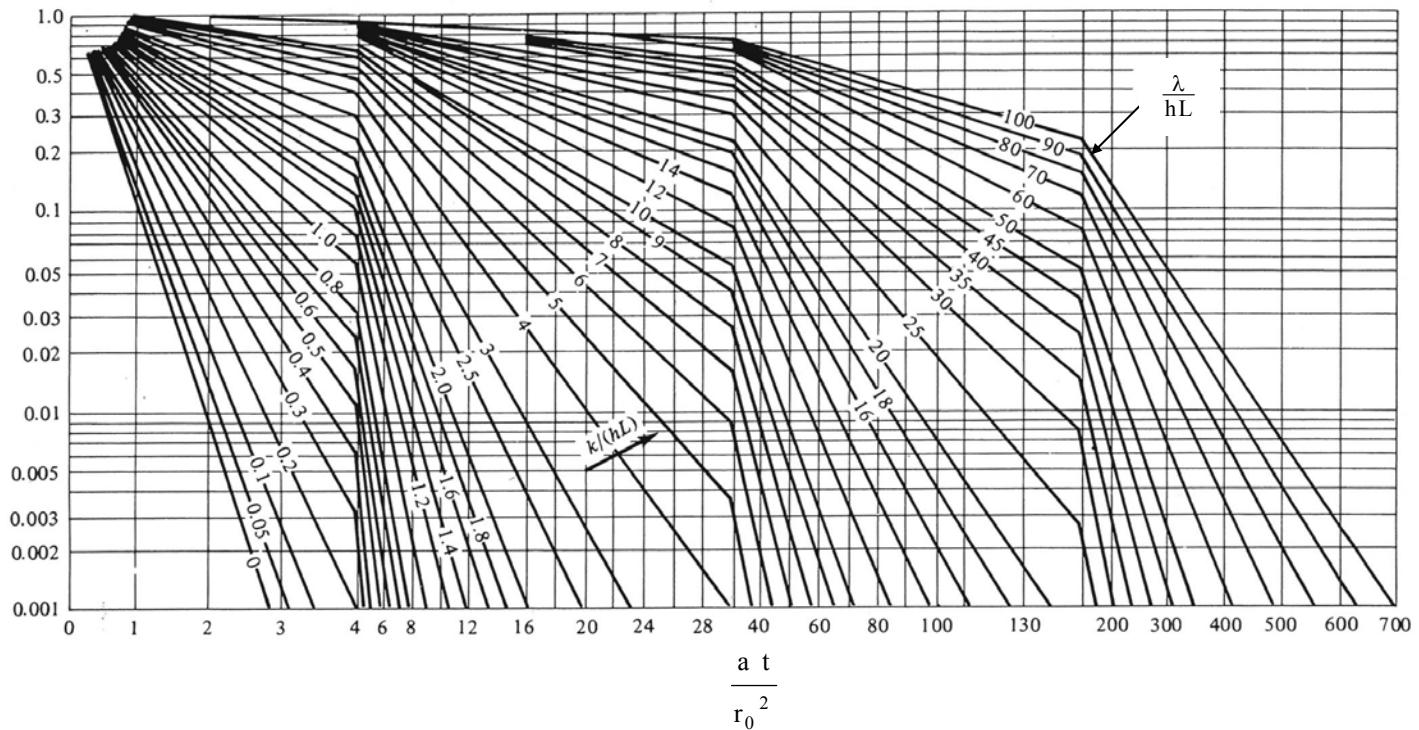
A.2.7 : Milieu semi-infini avec coefficient de transfert imposé



A.2.8 : Plaque avec coefficient de transfert imposé

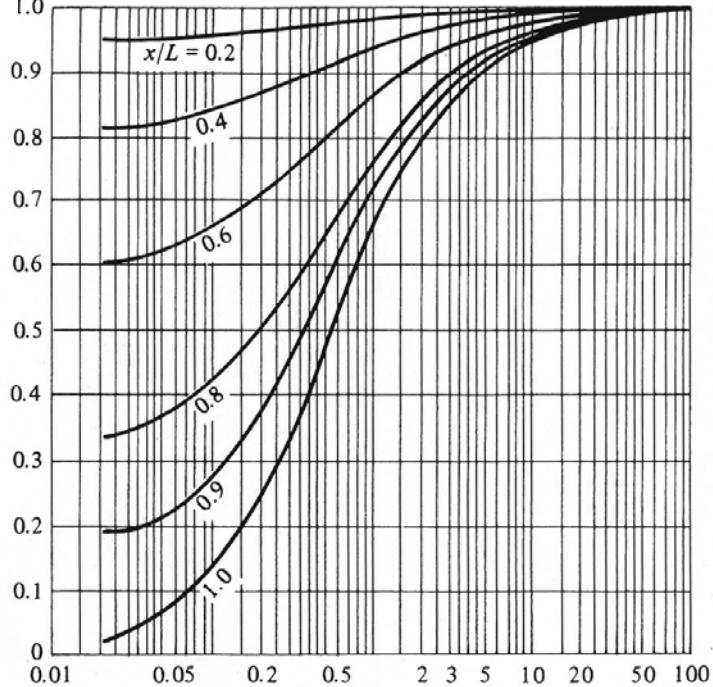
Température adimensionnelle θ_0 au centre de la plaque d'épaisseur $2L$

$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



Température adimensionnelle θ à la distance x du centre

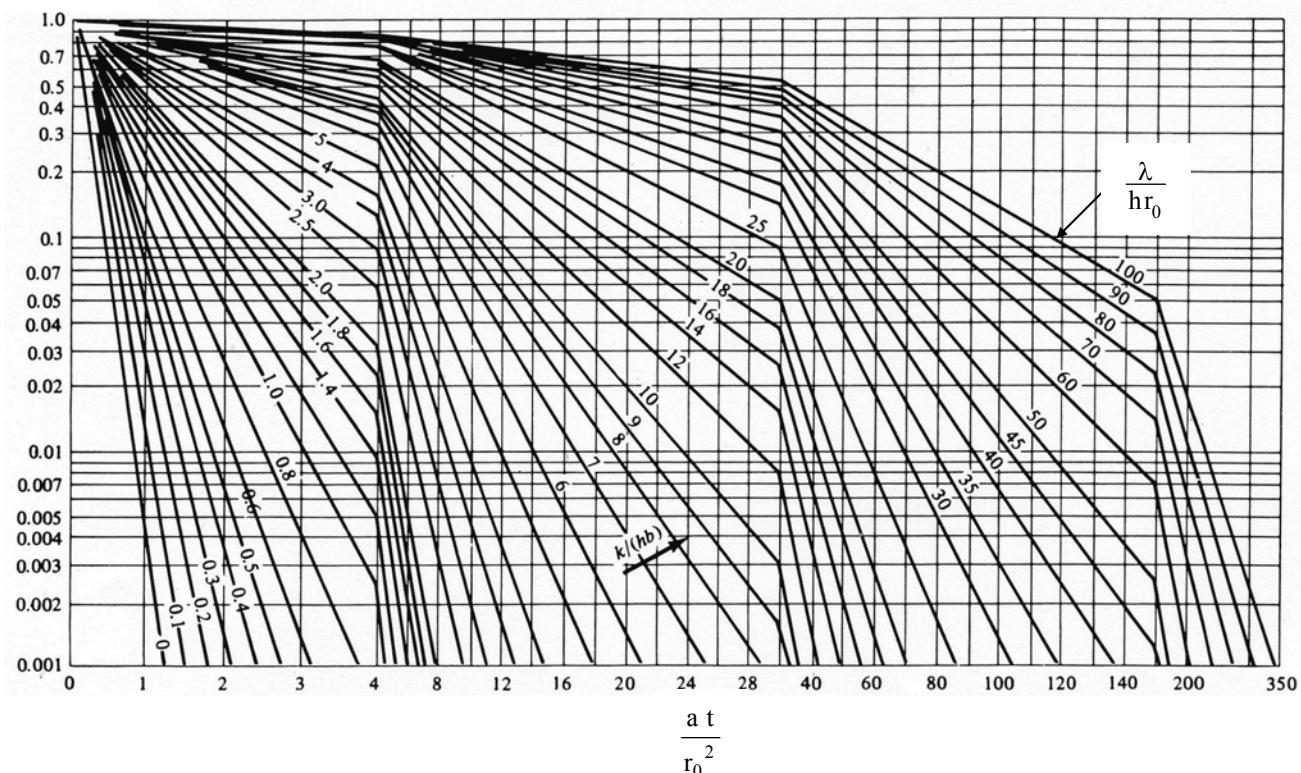
$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$



A.2.9 : Cylindre infini avec coefficient de transfert imposé

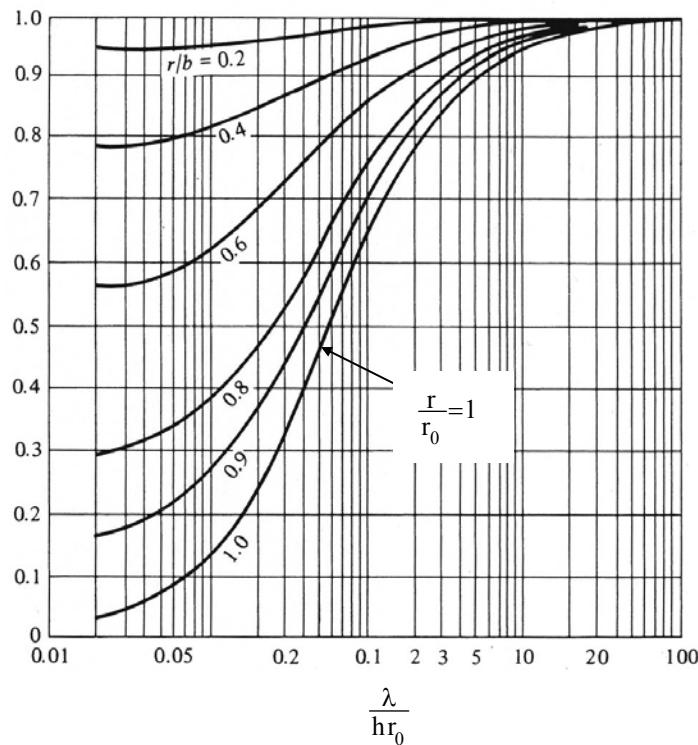
Température adimensionnelle θ_0 sur l'axe du cylindre de rayon r_0

$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



Température adimensionnelle θ à la distance r de l'axe

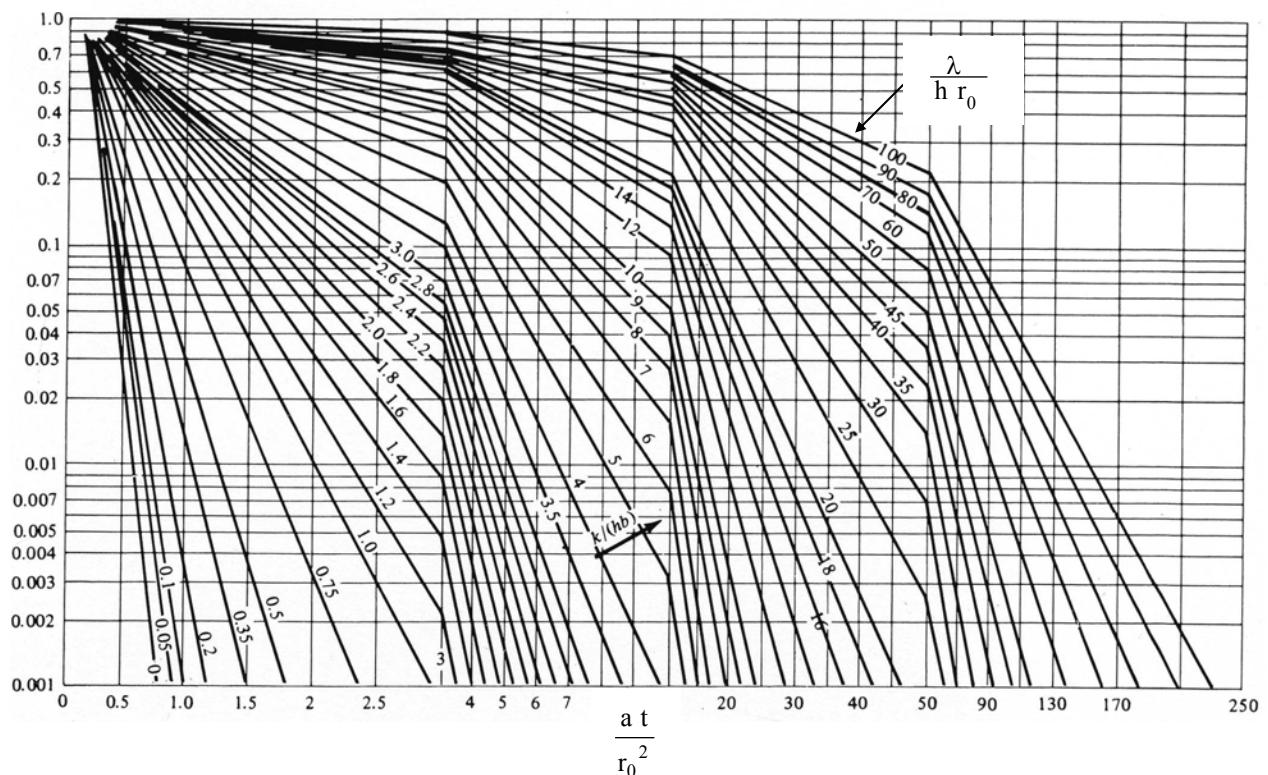
$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$



A.2.10 : Sphère avec coefficient de transfert imposé

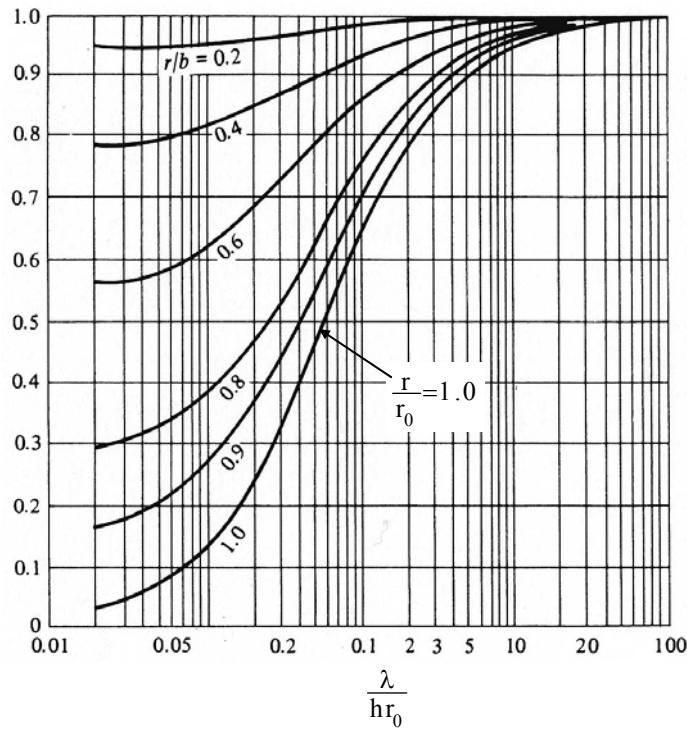
Température adimensionnelle θ_0 au centre de la sphère de rayon r_0

$$\theta_0 = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



Température adimensionnelle θ à la distance r du centre

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

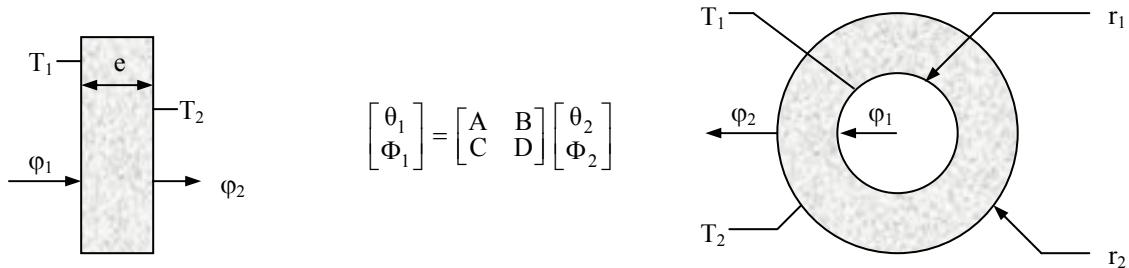


A.2.11 : Matrices quadripolaires pour différentes configurations

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}} \quad ; \quad I_0, I_1, K_0, K_1 : \text{Fonctions de Bessel cf. annexe A.2.5.}$$

Quadripôle associé à un transfert unidirectionnel dans un milieu sans génération d'énergie

Milieu d'épaisseur finie



	Mur plan d'épaisseur e	Cylindre creux de rayons r_1 et r_2	Sphère creuse de rayons r_1 et r_2
A	$\text{ch}(qe)$	$qr_2 [I_0(qr_1)K_1(qr_2) + I_1(qr_2)K_0(qr_1)]$	$\frac{r_2}{r_1} \text{ch}(p) - \frac{\text{sh}(p)}{qr_1}$
B	$\frac{\text{sh}(qe)}{\lambda q S}$	$\frac{1}{2\pi\lambda L} [I_0(qr_2)K_0(qr_1) - I_0(qr_1)K_0(qr_2)]$	$\frac{\text{sh}(p)}{4\pi\lambda qr_1 r_2}$
C	$\lambda q S \text{sh}(qe)$	$2\pi\lambda L qr_1 qr_2 \begin{bmatrix} I_1(qr_2)K_1(qr_1) \\ -I_1(qr_1)K_1(qr_2) \end{bmatrix}$	$4\pi\lambda r_2 \left[\left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \text{ch}(p) + \left(qr_1 - \frac{1}{qr_2} \text{sh}(p) \right) \right]$
D	$\text{ch}(qe)$	$qr_1 [I_0(qr_2)K_1(qr_1) + I_1(qr_1)K_0(qr_2)]$	$\frac{r_1}{r_2} \text{ch}(p) + \frac{\text{sh}(p)}{qr_2}$

Milieu semi-infini

La transformée de Laplace Φ du flux de chaleur φ s'écrit : $\Phi = \frac{\varphi}{Z}$ avec :

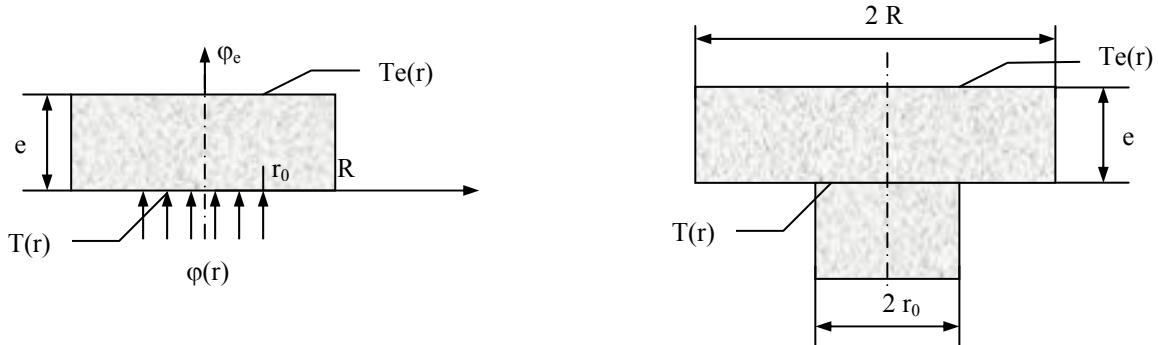
	Mur semi-infini	Cylindre semi-infini de rayon intérieur r_1	Sphère semi-infinie de rayon intérieur r_1
Z	$\frac{1}{SE\sqrt{p}}$	$\frac{1}{2\pi\lambda L} \frac{K_0(qr_1)}{qr_1 K_1(qr_1)}$	$\frac{1}{4\pi\lambda r_1 (1 + qr_1)}$

Où : $E = \sqrt{\lambda\rho c}$ est l'effusivité thermique.

A.2.12 : Matrices quadripolaires pour différentes configurations

Quadripôle associé à une résistance de constriction

(variation brusque de la section de passage du flux de chaleur)



Transfert d'un flux $\phi(r)$ à la surface d'un cylindre de rayon R et d'épaisseur e , avec $\phi(r)=0$ si $r>r_0$

(cf. Maillet p. 211-233)

	R et e infinis		R et e finis	
	$\Phi = \frac{\theta_{0-r_0}}{Rc}$		$\begin{bmatrix} \theta \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Rc \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{bmatrix}$	
	$T(r) = T_0$ pour $r < r_0$	$\phi(r) = \phi_0$ pour $r < r_0$	$T_e(r) = T_{e0}$	$\phi_e(r) = \phi_{e0}$
Rc	$\frac{1}{4\lambda r_0 \left(1 + \frac{\pi}{4} qr_0\right)}$	$\frac{8}{3\pi^2 \lambda r_0 \left(1 + \frac{8}{3\pi} qr_0\right)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \operatorname{th}(\gamma_n e)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\operatorname{th}(\gamma_n e)}$

$$A = D = \operatorname{ch}(qe) \quad F_n = \frac{4J_1^2(\alpha_n r_0)}{\lambda S r_0^2 \alpha_n^2 \gamma_n J_0^2(\alpha_n r_0)}$$

Avec : $B = \frac{1}{\lambda q \pi R^2} \operatorname{sh}(qe)$ et : $\text{avec } \alpha_n \text{ solution de } J_1(\alpha_n R) = 0 \text{ et } \gamma_n = \alpha_n^2 + \frac{p}{a}$

$$C = \lambda q \pi R^2 \operatorname{sh}(qe) \quad \text{Si } \frac{e}{R} > 1 \text{ alors } \operatorname{th}(\gamma_n e) = 1$$

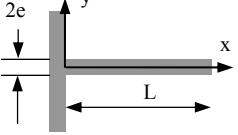
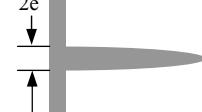
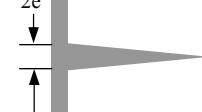
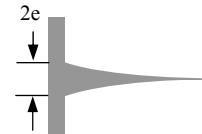
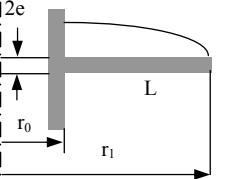
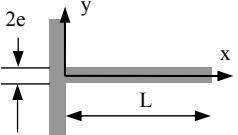
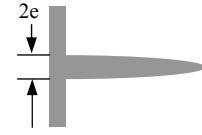
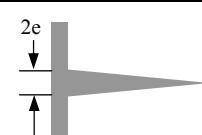
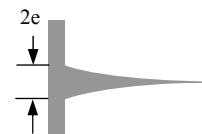
Quadripôle associé à un transfert unidirectionnel dans un milieu avec génération d'énergie

Température considérée = température moyenne de l'élément chauffant

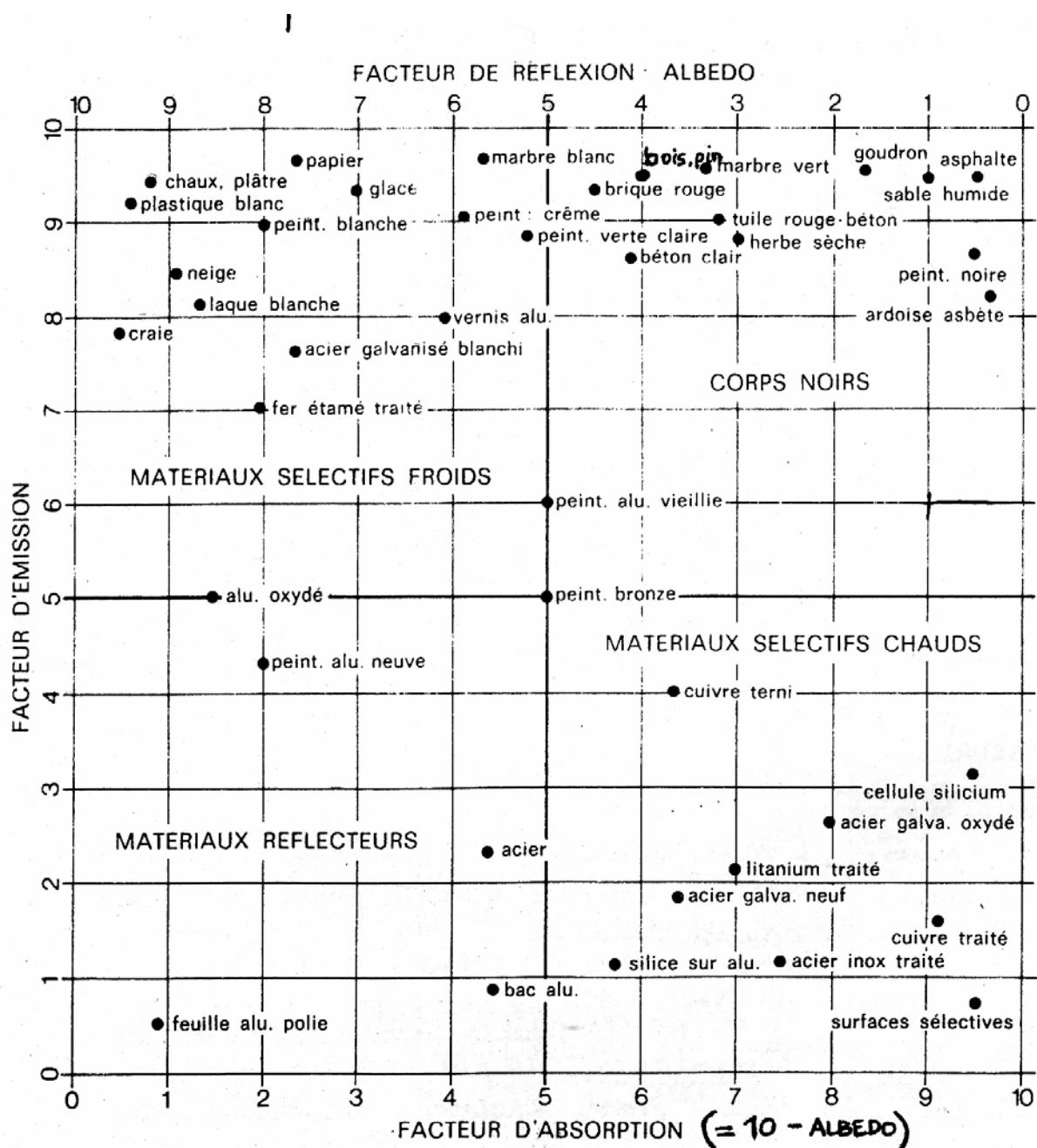
	Plaque d'épaisseur e	Cylindre plein de rayon r	Sphère pleine de rayon r
A	1	1	1
B	$\frac{1}{\lambda S e} - \frac{1}{\rho c S e p}$	$\frac{1}{2\pi\lambda L} \frac{I_0(qr)}{I_1(qr)} - \frac{1}{\rho c \pi r^2 L p}$	$\frac{1}{4\pi\lambda r[qr\operatorname{ch}(qr)-1]} - \frac{3}{4\rho c \pi r^3 p}$
C	$\rho c S e p$	$\rho c \pi r^2 L p$	$\frac{4}{3} \rho c \pi r^3 p$
D	$\frac{qe}{\operatorname{th}(qe)}$	$\frac{qr}{2} \frac{I_0(qr)}{I_1(qr)}$	$\frac{(qr)^2}{3[qr\coth(qr)-1]}$

A.2.12 : Efficacité des ailettes

Hypothèse : Flux nul à l'extrémité de l'ailette, vérifié si $\sqrt{\frac{h e}{\lambda}} \ll 1$ (d'après Whitaker).

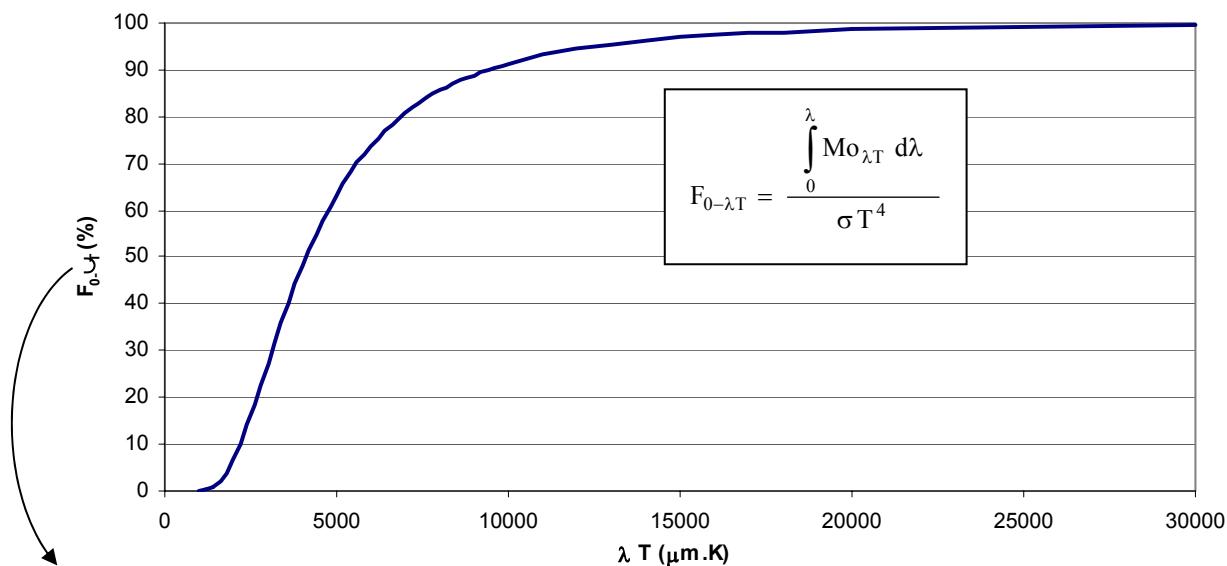
Ailette droite	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \operatorname{th}(\omega L)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{h}{\lambda e}}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_{2/3} \left(\frac{4}{3} \omega L\right)}{I_{-1/3} \left(\frac{4}{3} \omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_1(2 \omega L)}{I_0(2 \omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{4(\omega L)^2 + 1 + 1}}$
Ailette circulaire	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{2}{\omega L \left(\frac{r_1}{r_0} + 1\right)} \frac{I_1(\omega r_0) K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1) K_1(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1) K_0(\omega r_0)}$
	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\sqrt{2} \omega L} \operatorname{th}(\sqrt{2} \omega L)$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\eta = \frac{3}{2 \sqrt{2} \omega L} \frac{I_1 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} \omega L\right)}{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} \omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\omega L} \frac{I_2(2 \sqrt{2} \omega L)}{I_1(2 \sqrt{2} \omega L)}$
Aiguilles (section droite circulaire)	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{9} (\omega L)^2 + 1 + 1}}$

A.3.1 : Emissivité de certains corps



Albédo = facteur de réflexion par rapport au rayonnement solaire ($\lambda < 3 \mu\text{m}$)

A.3.2 : Fraction d'énergie $F_{0-\lambda T}$ rayonnée par un corps noir entre 0 et λ



a \ b	0	40	80	120	160	a \ b	0	40	80	120	160
1 000	0,03	0,05	0,08	0,11	0,16	7 800	84,80	84,97	85,14	85,30	85,47
1 200	0,21	0,29	0,38	0,49	0,62	8 000	85,63	85,78	85,94	86,10	86,25
1 400	0,78	0,96	1,17	1,41	1,68	8 200	86,40	86,55	86,69	86,83	86,98
1 600	1,97	2,30	2,66	3,06	3,48	8 400	87,12	87,25	87,39	87,52	87,66
1 800	3,94	4,42	4,94	5,49	6,07	8 600	87,80	87,92	88,04	88,17	88,29
2 000	6,68	7,31	7,97	8,65	9,36	8 800	88,41	88,53	88,65	88,77	88,88
2 200	10,09	10,84	11,61	12,40	13,21	9 000	88,89	89,11	89,22	89,33	89,44
2 400	14,03	14,86	15,71	16,57	17,44	9 200	89,55	89,65	89,76	89,86	89,96
2 600	18,32	19,20	20,09	20,99	21,89	9 400	90,06	90,16	90,26	90,35	90,45
2 800	22,79	23,70	24,61	25,51	26,42	9 600	90,54	90,63	90,72	90,81	90,90
3 000	27,33	28,23	29,13	30,03	30,92	9 800	90,99	91,08	91,16	91,25	91,33
3 200	31,81	32,70	33,58	34,45	35,32	10 000	91,42				
3 400	36,18	37,03	37,88	38,71	39,54						
3 600	40,36	41,18	41,98	42,78	43,56						
3 800	44,34	45,11	45,87	46,62	47,36						
4 000	48,09	48,81	49,53	50,23	50,92						
4 200	51,60	52,28	52,94	53,60	54,25						
4 400	54,88	55,51	56,13	56,74	57,34						
4 600	57,93	58,51	59,09	59,65	60,21						
4 800	60,66	61,30	61,83	62,35	62,87						
5 000	63,38	63,88	64,37	64,85	65,33						
5 200	65,80	66,26	66,72	67,16	67,60						
5 400	68,04	68,46	68,88	69,30	69,70						
5 600	70,11	70,50	70,89	71,27	71,65						
5 800	72,02	72,38	72,74	73,09	73,44						
6 000	73,78	74,12	74,45	74,78	75,10						
6 200	75,41	75,72	76,03	76,33	76,63						
6 400	76,92	77,21	77,49	77,77	78,05						
6 600	78,32	78,59	78,85	79,11	79,36						
6 800	79,61	79,86	80,10	80,34	80,58						
7 000	80,90	81,04	81,26	81,47	81,70						
7 200	81,92	82,13	82,34	82,55	82,75						
7 400	82,95	83,15	83,34	83,53	83,72						
7 600	83,91	84,09	84,27	84,45	84,62						

a \ b	0	200	400	600	800
10 000	91,42	91,81	92,19	92,54	92,87
11 000	93,18	93,48	93,76	94,02	94,27
12 000	94,50	94,73	94,94	95,14	95,33
13 000	95,51	95,68	95,84	96,00	96,14
14 000	96,29	96,42	96,54	96,67	96,78
15 000	96,89	97,00	97,10	97,19	97,29
16 000	97,37	97,46	97,54	97,62	97,69
17 000	97,77	97,83	97,90	97,96	98,02
18 000	98,08	98,14	98,19	98,24	98,29
19 000	98,34				
	98,38	98,43	98,47	98,51	

Utilisation :
 $\lambda T = a + b$

Exemple : $\lambda T = 2720 \mu\text{m.K}$
se lit à 2600 + 120
d'où : $F_{0-\lambda T} = 20,99 \%$

A.3.3 : Facteurs de forme géométrique de rayonnement

Configuration	Schéma	Valeur du facteur de forme
Surface élémentaire parallèle à un plan rectangulaire		$F_{dA1-A2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{B}{\sqrt{1+B^2}} \tan^{-1} \frac{C}{\sqrt{1+B^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \tan^{-1} \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \right]$ $B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}$
Source linéaire parallèle à un plan rectangulaire		$F_{dA1-A2} = \frac{1}{\pi B} \left[\frac{\sqrt{1+B^2}}{2} \tan^{-1} \left(\frac{C}{\sqrt{1+B^2}} \right) - \tan^{-1}(C) + \frac{BC}{\sqrt{1+C^2}} \tan^{-1} \left(\frac{B}{\sqrt{1+C^2}} \right) \right]$ $B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}$
Source linéaire parallèle et plan rectangulaire se coupant avec un angle ϕ		$F_{dA1-A2} = \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \tan^{-1} B + \frac{\sin^2 \phi}{2B} \ln \left[\frac{B^2 + X^2}{(1+B^2)X^2} \right] \\ - \frac{\sin 2\phi}{2B} \left[\frac{\pi}{2} - \phi + \tan^{-1} \left(\frac{C - \cos \phi}{\sin \phi} \right) \right] \\ + \frac{Y}{B} \left[\tan^{-1} \left(\frac{C - \cos \phi}{Y} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\cos \phi}{Y} \right) \right] \\ x \cos \phi + \frac{C \cos \phi - 1}{X} \tan^{-1} \left(\frac{B}{X} \right) \end{array} \right\}$ $B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}, \quad X = \sqrt{C^2 - 2C \cos \phi + 1}, \quad Y = \sqrt{B^2 + \sin^2 \phi}$
Deux plans parallèles rectangulaires de même aire		$F_{A1-A2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{BC} \ln \left(\frac{XY}{X+Y-1} \right) + \frac{2\sqrt{X}}{B} \tan^{-1} \left(\frac{C}{\sqrt{X}} \right) + \frac{2\sqrt{Y}}{C} \tan^{-1} \left(\frac{B}{\sqrt{Y}} \right) - \frac{2}{C} \tan^{-1}(B) - \frac{2}{B} \tan^{-1}(C) \right]$ $B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}, \quad X = 1 + B^2, \quad Y = 1 + C^2$
Deux bandes parallèles infinies de largeurs différentes		$F_{A1-A2} = \frac{1}{2B} \left[\sqrt{(B+C)^2 + 4} - \sqrt{(C-B)^2 + 4} \right]$ $F_{A2-A1} = \frac{1}{2C} \left[\sqrt{(B+C)^2 + 4} - \sqrt{(B-C)^2 + 4} \right]$ $F_{A1-A2} = F_{A2-A1} = \frac{1}{B} \left[\sqrt{B^2 + 1} - 1 \right] \text{ si } b = c$ $B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}$

A.3.3 : Facteurs de forme géométrique de rayonnement

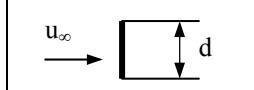
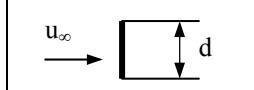
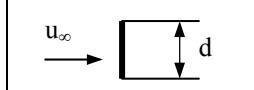
Configuration	Schéma	Valeur du facteur de forme
Deux plans rectangulaires perpendiculaires ayant un côté commun		$F_{A1-A2} = \frac{1}{\pi B} \left[\frac{1}{4} \ln \left[\frac{(1+B^2)(1+C^2)}{1+B^2+C^2} \right] \left[\frac{B^2(1+B^2+C^2)}{(1+B^2)(B^2+C^2)} \right]^{B^2} \right]$ $+ B \tan^{-1} \frac{1}{B} + C \tan^{-1} \frac{1}{C} - \sqrt{B^2+C^2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{B^2+C^2}} \right)$ $B = \frac{b}{a}, C = \frac{c}{a}; F_{A1-A2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c}{b} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} \right] \text{ si } a \rightarrow \infty$
Deux plans identiques ayant un côté commun		$F_{A1-A2} = F_{A2-A1} = 1 - \sin \frac{\theta}{2}$
Deux rectangles perpendiculaires		$F_{1-6} = \frac{A_6}{A_1} \left[\frac{1}{2A_6} \left[(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) F_{1234-56} - A_6 F_{6-24} \right] \right]$ $- \frac{1}{2A_6} \left[(A_3 + A_4) F_{34-56} - A_6 F_{6-4} - A_5 F_{5-3} \right]$
Deux rectangles parallèles		$F_{1-7} = \frac{1}{4A_1} \left(A_{1234} F_{1234-5678} + A_1 F_{1-5} \right)$ $+ A_2 F_{2-6} + A_3 F_{3-7} + A_4 F_{4-8} \right)$ $- \frac{1}{4A_1} \left(A_{12} F_{12-56} + A_{14} F_{14-58} + \right)$ $A_{34} F_{34-78} + A_{23} F_{23-67} \right)$
Un plan rectangulaire et un cylindre à axe situé dans le plan médian au rectangle		$F_{A1-A2} = \frac{2}{Y} \int_0^{Y/2} \left[\frac{X}{X^2 + \beta^2} - \frac{X}{\pi(X^2 + \beta^2)} \times \cos^{-1} \left(\frac{W}{V \sqrt{X^2 + \beta^2}} \right) \right. \\ \left. \left. \cos^{-1} \left(\frac{W}{V} \right) - \frac{1}{2Z} \left[\sqrt{V^2 + 4Z} \right] \right] \right] d\beta$ $X = \frac{a}{r}, Y = \frac{b}{r}, Z = \frac{c}{r}, V = X^2 + Z^2 + \beta^2 - 1, W = Z^2 - X^2 - \beta^2 + 1$

A.3.4 : Epaisseurs de gaz équivalentes vis-à-vis du rayonnement

Géométrie du volume	Dimension caractéristique	4 VS	Réquivalent
Hémisphère rayonnant vers son centre	Rayon R	R	R
Sphère rayonnant vers sa surface	Diamètre D	2/3 R	2/3 D
Cylindre de hauteur égale au diamètre rayonnant vers le centre de la base	Diamètre D	0,77D	0,71 D
Cylindre infini rayonnant vers sa surface	Diamètre D	D	0,95 D
Cylindre semi-infini rayonnant vers le centre de sa base	Diamètre D	D	0,90 D
Cylindre semi-infini rayonnant vers toute la base	Diamètre D	D	0,65 D
Cylindre de hauteur égale au diamètre rayonnant vers toute la surface	Diamètre D	2/3 D	0,60 D
Lame à faces parallèles	Epaisseur d	2 d	1,80 d
Cube rayonnant vers une face	Côté d	2/3 d	0,60 d
Parallélépipède rectangle l x l x h : Rayonnement vers toutes les faces Rayonnement vers l x l Rayonnement vers l x h	Plus petit côté d	8/9 d	0,81 d 0,71 d 0,82 d
Volume de gaz autour d'un faisceau de tubes et rayonnant sur un seul tube : - Disposition en triangle équilatéral : P = 2 D P = 3 D - Disposition en carré P = 2 D	Diamètre D du tube Pas p entre centres des tubes	3,4 (p - D) 4,45 (p - D) 4,1 (p - D)	3 (p - D) 3,8 (p - D) 3,5 (p - D)

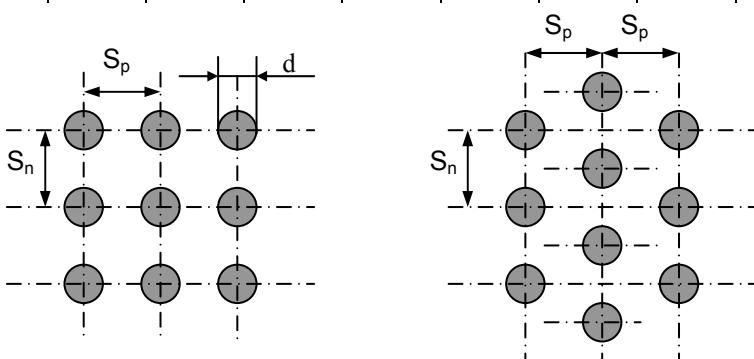
A.4.1 : Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée

$$\text{Caractéristiques du fluide calculée à } \theta_f = \frac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$$

Géométrie	Corrélation																		
Ecoulement sur un plan	<p>$\text{Nu}(x)$: Nu à la distance x du bord du plan $\overline{\text{Nu}}_L$: Nu moyen sur la longueur L du plan</p> <p><u>Ecoulement turbulent :</u></p> $\text{Nu}(x) = 0,0288 \text{ Re}(x)^{0,8} \text{ Pr}^{1/3}$ $\overline{\text{Nu}}_L = 0,035 \text{ Re}_L^{0,8} \text{ Pr}^{1/3} \quad \text{Re} > 5 \cdot 10^5 \text{ et } \text{Pr} \geq 0,5$ <p><u>Ecoulement laminaire :</u></p> $\text{Nu}(x) = 0,324 \text{ Re}(x)^{0,5} \text{ Pr}^{1/3}$ $\overline{\text{Nu}}_L = 0,628 \text{ Re}_L^{0,5} \text{ Pr}^{1/3} \quad \text{Re} < 5 \cdot 10^5 \text{ et } 10 \geq \text{Pr} \geq 0,5$																		
Ecoulement dans un tube	<p><u>Ecoulement turbulent :</u> $\text{Nu} = 0,023 \text{ Re}^{0,8} \text{ Pr}^n$</p> <p>$n = 0,3$ si $\theta_{\text{fluide}} > \theta_{\text{paroi}}$ $n = 0,4$ si $\theta_{\text{fluide}} < \theta_{\text{paroi}}$ $\text{Re} > 5000$ et $0,6 < \text{Pr} < 100$</p> <p>Re calculé pour $D_H = 4S / P$ où : S = section de passage du fluide P = périmètre de contact fluide/paroi</p> <p><u>Ecoulement laminaire :</u> $\text{Nu} = 1,86 (\text{Re} \text{ Pr})^{1/3} \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_p} \right)^{0,14}$</p> <p>Valable pour $\text{Re} \text{ Pr} \frac{D}{L} \geq 10$, μ_p calculé à θ_p</p>																		
Ecoulement perpendiculaire à un cylindre circulaire	<p>$\text{Nu} = C \text{ Re}^n \text{ Pr}^{1/3}$, vitesse u_∞ calculée en amont du tube</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Re</th> <th>C</th> <th>n</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,4 – 4</td> <td>0,989</td> <td>0,330</td> </tr> <tr> <td>4 – 40</td> <td>0,911</td> <td>0,385</td> </tr> <tr> <td>40 – 4000</td> <td>0,683</td> <td>0,466</td> </tr> <tr> <td>4000 – 40000</td> <td>0,193</td> <td>0,618</td> </tr> <tr> <td>40000 - 250000</td> <td>0,0266</td> <td>0,805</td> </tr> </tbody> </table>	Re	C	n	0,4 – 4	0,989	0,330	4 – 40	0,911	0,385	40 – 4000	0,683	0,466	4000 – 40000	0,193	0,618	40000 - 250000	0,0266	0,805
Re	C	n																	
0,4 – 4	0,989	0,330																	
4 – 40	0,911	0,385																	
40 – 4000	0,683	0,466																	
4000 – 40000	0,193	0,618																	
40000 - 250000	0,0266	0,805																	
Ecoulement perpendiculaire à un cylindre non circulaire	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Géométrie</th> <th>Re</th> <th>C</th> <th>n</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>$5 \cdot 10^3 - 10^5$</td> <td>0,102</td> <td>0,675</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$</td> <td>0,228</td> <td>0,731</td> </tr> </tbody> </table>	Géométrie	Re	C	n		$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,102	0,675		$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$	0,228	0,731						
Géométrie	Re	C	n																
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,102	0,675																
	$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$	0,228	0,731																

A.4.1 : Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée

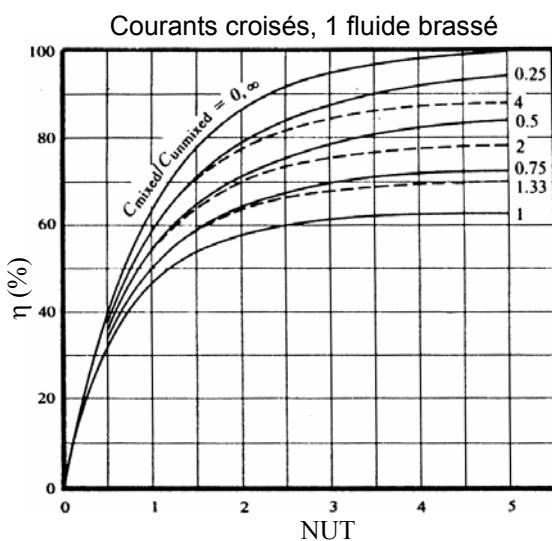
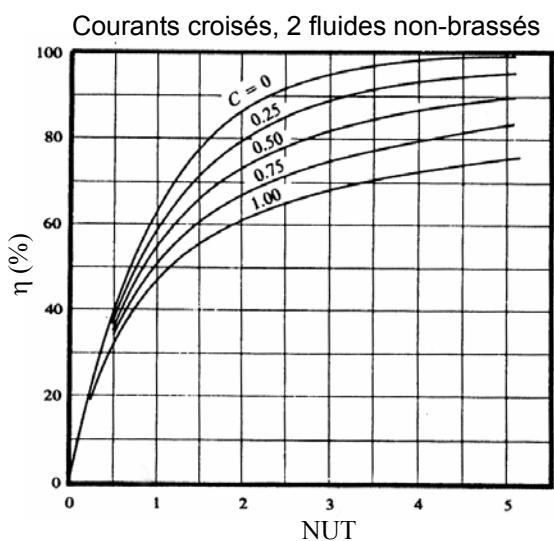
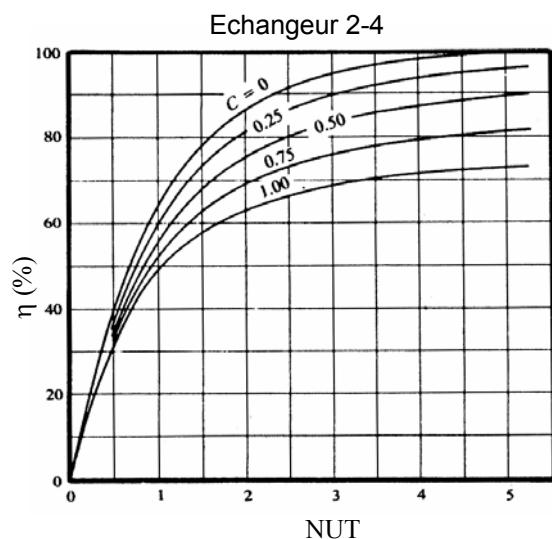
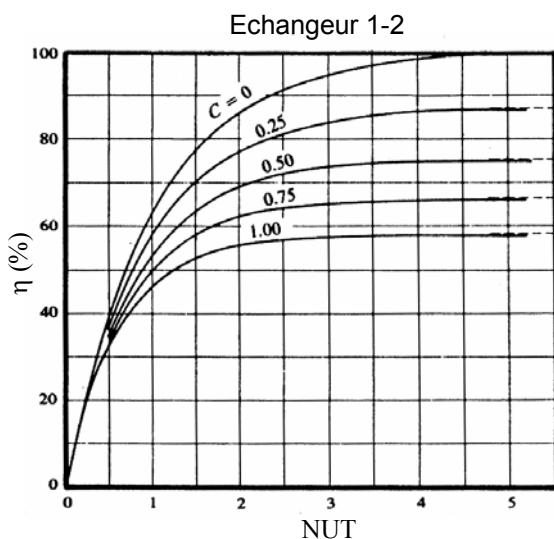
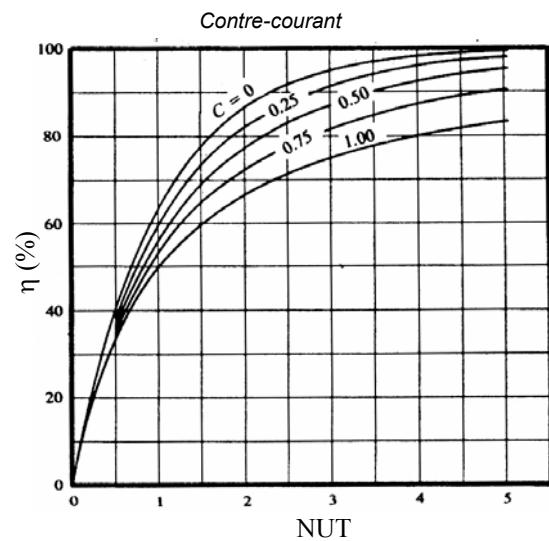
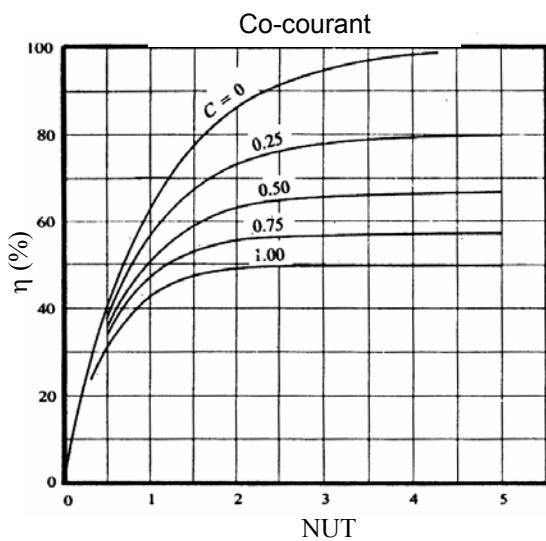
$$\text{Caractéristiques du fluide calculée à } \theta_f = \frac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$$

Géométrie	Corrélation																																																																							
		$Nu = C Re^n Pr^{1/3}$, vitesse u_∞ calculée en amont du tube																																																																						
		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th colspan="8">$\frac{S_n}{d}$</th> </tr> <tr> <th>$\frac{S_p}{d}$</th> <th colspan="2">1,25</th> <th colspan="2">1,5</th> <th colspan="2">2,0</th> <th colspan="2">3,0</th> </tr> <tr> <th></th> <th>C</th> <th>n</th> <th>C</th> <th>n</th> <th>C</th> <th>n</th> <th>C</th> <th>n</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1,25</td> <td>0, 38 6</td> <td>0,592</td> <td>0,305</td> <td>0,608</td> <td>0,111</td> <td>0,704</td> <td>0,070</td> <td>0,752</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>0,407</td> <td>0,586</td> <td>0,278</td> <td>0,620</td> <td>0,112</td> <td>0,702</td> <td>0,075</td> <td>0,744</td> </tr> <tr> <td>2,0</td> <td>0,464</td> <td>0,570</td> <td>0,332</td> <td>0,602</td> <td>0,254</td> <td>0,632</td> <td>0,220</td> <td>0,648</td> </tr> <tr> <td>3,0</td> <td>0,322</td> <td>0,601</td> <td>0,396</td> <td>0,584</td> <td>0,415</td> <td>0,581</td> <td>0,317</td> <td>0,608</td> </tr> </tbody> </table>									$\frac{S_n}{d}$								$\frac{S_p}{d}$	1,25		1,5		2,0		3,0			C	n	C	n	C	n	C	n	1,25	0, 38 6	0,592	0,305	0,608	0,111	0,704	0,070	0,752	1,5	0,407	0,586	0,278	0,620	0,112	0,702	0,075	0,744	2,0	0,464	0,570	0,332	0,602	0,254	0,632	0,220	0,648	3,0	0,322	0,601	0,396	0,584	0,415	0,581	0,317	0,608
	$\frac{S_n}{d}$																																																																							
$\frac{S_p}{d}$	1,25		1,5		2,0		3,0																																																																	
	C	n	C	n	C	n	C	n																																																																
1,25	0, 38 6	0,592	0,305	0,608	0,111	0,704	0,070	0,752																																																																
1,5	0,407	0,586	0,278	0,620	0,112	0,702	0,075	0,744																																																																
2,0	0,464	0,570	0,332	0,602	0,254	0,632	0,220	0,648																																																																
3,0	0,322	0,601	0,396	0,584	0,415	0,581	0,317	0,608																																																																
		Disposition en ligne																																																																						
Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de 10 tubes		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>0, 6</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>0,236</th> <th>0,636</th> </tr> <tr> <th>0,9</th> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0,495</td> <td>0,571</td> <td>0,445</td> <td>0,581</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,0</th> <td>-</td> <td>-</td> <td>0,552</td> <td>0,558</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,125</th> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0,531</td> <td>0,565</td> <td>0,575</td> <td>0,560</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,25</th> <td>0,575</td> <td>0,556</td> <td>0,561</td> <td>0,554</td> <td>0,576</td> <td>0,556</td> <td>0,579</td> <td>0,562</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,5</th> <td>0,501</td> <td>0,568</td> <td>0,511</td> <td>0,562</td> <td>0,502</td> <td>0,568</td> <td>0,542</td> <td>0,568</td> <td></td> </tr> </thead> </table>									0, 6	-	-	-	-	-	-	0,236	0,636	0,9	-	-	-	-	0,495	0,571	0,445	0,581		1,0	-	-	0,552	0,558	-	-	-	-		1,125	-	-	-	-	0,531	0,565	0,575	0,560		1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562		1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568				
	0, 6	-	-	-	-	-	-	0,236	0,636																																																															
0,9	-	-	-	-	0,495	0,571	0,445	0,581																																																																
1,0	-	-	0,552	0,558	-	-	-	-																																																																
1,125	-	-	-	-	0,531	0,565	0,575	0,560																																																																
1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562																																																																
1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568																																																																
		Disposition en quinconce																																																																						
		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>0, 6</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>-</th> <th>0,236</th> <th>0,636</th> </tr> <tr> <th>0,9</th> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0,495</td> <td>0,571</td> <td>0,445</td> <td>0,581</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,0</th> <td>-</td> <td>-</td> <td>0,552</td> <td>0,558</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,125</th> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0,531</td> <td>0,565</td> <td>0,575</td> <td>0,560</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,25</th> <td>0,575</td> <td>0,556</td> <td>0,561</td> <td>0,554</td> <td>0,576</td> <td>0,556</td> <td>0,579</td> <td>0,562</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1,5</th> <td>0,501</td> <td>0,568</td> <td>0,511</td> <td>0,562</td> <td>0,502</td> <td>0,568</td> <td>0,542</td> <td>0,568</td> <td></td> </tr> </thead> </table>									0, 6	-	-	-	-	-	-	0,236	0,636	0,9	-	-	-	-	0,495	0,571	0,445	0,581		1,0	-	-	0,552	0,558	-	-	-	-		1,125	-	-	-	-	0,531	0,565	0,575	0,560		1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562		1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568				
	0, 6	-	-	-	-	-	-	0,236	0,636																																																															
0,9	-	-	-	-	0,495	0,571	0,445	0,581																																																																
1,0	-	-	0,552	0,558	-	-	-	-																																																																
1,125	-	-	-	-	0,531	0,565	0,575	0,560																																																																
1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562																																																																
1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568																																																																
																																																																								
		<p style="text-align: center;">Disposition en ligne Disposition en quinconce</p>																																																																						
Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de n rangées de tubes ($n \leq 10$)		$N = \frac{h_n}{h_{10}}$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>Nombre rangées</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>9</th> <th>10</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>N en ligne</td> <td>0,64</td> <td>0,80</td> <td>0,87</td> <td>0,90</td> <td>0,92</td> <td>0,94</td> <td>0,96</td> <td>0,98</td> <td>0,99</td> <td>1,0</td> </tr> <tr> <td>N en quinconce</td> <td>0,68</td> <td>0,75</td> <td>0,83</td> <td>0,89</td> <td>0,92</td> <td>0,95</td> <td>0,97</td> <td>0,98</td> <td>0,99</td> <td>1,0</td> </tr> </tbody> </table>								Nombre rangées	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N en ligne	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,0	N en quinconce	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,0																														
Nombre rangées	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																														
N en ligne	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,0																																																														
N en quinconce	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,0																																																														

A.4.2 : Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection naturelle

Corrélations valables pour tous fluides : $Nu = C (Gr Pr)^m$			
Géométrie	Gr Pr	C	m
Plaques et cylindres verticaux	$10^4 - 10^9$ $10^9 - 10^{13}$	0,59 0,021	1/4 2/5
Cylindres horizontaux	$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
	$10^{-2} - 10^2$	1,02	0,148
	$10^2 - 10^4$	0,850	0,188
	$10^4 - 10^7$	0,480	0,25
	$10^7 - 10^{12}$	0,125	0,33
Face supérieure d'une plaque chaude ou face inférieure d'une plaque froide	$2 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^6$ $8 \cdot 10^6 - 10^{11}$	0,54 0,15	0,25 0,33
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	$10^5 - 10^{11}$	0,27	0,25
Cellule fermée rectangulaire inclinée	$Nu = 1 + 1,44 \left(1 - \frac{1708}{Gr Pr \cos \varphi} \right) \left[1 - \frac{1708 (\sin(1,8 \varphi))^{1,6}}{Gr Pr \cos \varphi} \right] +$ $\left[\left(\frac{Gr Pr \cos \varphi}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad \text{si } 0 < \varphi < \varphi^*$ $Nu = (\sin \varphi)^{1/4} Nu(90^\circ) \quad \text{si } \varphi^* < \varphi < 90^\circ$ $Nu = 1 + [Nu(90^\circ) - 1] \sin \varphi \quad \text{si } 90^\circ < \varphi < 180^\circ$ <p>Avec $\varphi^* = \tan^{-1}(4800 \Pr)$</p>		
Relations simplifiées pour de l'air à pression atmosphérique			
Géométrie	Laminaire $10^4 < Gr Pr > 10^9$	Turbulent $Gr Pr > 10^9$	
Plaque ou cylindre vertical	$h = 1,42 \left(\frac{\Delta \theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,31 (\Delta \theta)^{1/3}$	
Cylindre horizontal	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta \theta}{D} \right)^{1/4}$	$h = 1,24 (\Delta \theta)^{1/3}$	
Face supérieure d'une plaque horizontale chaude ou face inférieure d'une plaque froide	$h = 1,32 \left(\frac{\Delta \theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,52 (\Delta \theta)^{1/3}$	
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	$h = 0,59 \left(\frac{\Delta \theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 0,59 \left(\frac{\Delta \theta}{L} \right)^{1/4}$	

A.5.1 : Abaques NUT = f(η) pour les échangeurs



EXERCICES

Transfert de chaleur par conduction

1. Une résistance électrique de très grande longueur, de rayon $R = 3$ mm, est constituée d'un fil dont la résistivité vaut $70 \mu\Omega/\text{cm}$. Elle est plongée dans un bassin d'huile en circulation qui maintient la surface du fil à 50°C . Evaluer la température maximale dans le fil (cuivre) si le courant qui le traverse a une intensité $I = 200\text{A}$.
2. Un fusible est constitué d'un fil cylindrique en plomb de rayon r et de longueur L traversé par un courant d'intensité I . Le fil est enfermé dans une capsule remplie d'un isolant thermique. Ses deux extrémités sont serties dans des plots métalliques massifs qui sont à une température T_0 constante (ambiante).
 - a) Donner l'expression de la température le long du fil.
 - b) Déterminer le diamètre du fil pour qu'il fonde pour une intensité égale à 5A .

Données : $\lambda = 34 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $I = 5 \text{ A}$; $\rho = 22,1 \mu\Omega \cdot \text{cm}$; $L = 5 \text{ cm}$; $T_0 = 25^\circ\text{C}$; $T_{\text{fusion}} = 328^\circ\text{C}$.

3. Une ailette en aluminium de longueur $7,5$ cm et d'épaisseur 3 mm est encastrée dans un mur. La base de l'aillette est maintenue à 300°C , la température ambiante est de 30°C et le coefficient de transfert est de $10 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Calculer son efficacité et le flux extrait.
4. Des ailettes en aluminium de longueur $1,5$ cm et d'épaisseur 1 mm sont disposées sur un tube de $2,5$ cm de diamètre pour le refroidir. La température de surface du tube est de 170°C et la température ambiante est de 25°C . Calculer le flux transféré si $h = 130 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.
5. La paroi d'un tunnel de congélation est constituée par :
 - un enduit ciment $e_1 = 2 \text{ cm}$, $\lambda_1 = 0,9 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
 - une épaisseur de parpaing $e_2 = 20 \text{ cm}$, $\lambda_2 = 0,7 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
 - une couche de polystyrène $e_3 = 24 \text{ cm}$, $\lambda_3 = 0,033 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
 - un enduit ciment $e_4 = 2 \text{ cm}$, $\lambda_4 = 0,9 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

La température de l'air extérieur est de 35°C , la température à l'intérieur du tunnel est de -40°C . Les coefficients de transfert de chaleur par convection air/paroi ont pour valeurs respectives $20 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ à l'extérieur et $8 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ à l'intérieur.

Calculer :

- a) Le coefficient global d'échange thermique h .
- b) Le flux de chaleur par unité de surface φ .
- c) Les températures de surface intérieure et extérieure de la paroi.

6. Une paroi de chambre froide est constituée par :
 - Un mur de briques creuses $e_1 = 10 \text{ cm}$, $\lambda_1 = 0,5 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
 - Un isolant en polystyrène expansé e_2 , $\lambda_2 = 0,03 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
 - Un enduit intérieur $e_3 = 3 \text{ cm}$, $\lambda_3 = 1,2 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Les coefficients de convection sont : $h_i = 7 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $h_e = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Les températures de part et d'autre de la paroi sont : $\theta_i = -10^\circ\text{C}$ et $\theta_e = +30^\circ\text{C}$.

- a) Calculer l'épaisseur d'isolation à mettre en place de façon à limiter la puissance thermique transmise par unité de surface à 10 W m^{-2} .
 - b) La surface de la paroi est égale à 40 m^2 , calculer la puissance thermique transmise.
 - c) Calculer la quantité de chaleur qui traverse cette paroi en 24h .
7. a) Déterminer l'épaisseur minimale d'isolation permettant d'éviter la condensation sur la surface extérieure d'un bac à eau glacée.

Les conditions sont les suivantes :

- température eau du bac +2°C.
- température du local +30°C.
- humidité relative du local 40%.
- isolant $\lambda = 0,047 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.
- coefficient de convection externe $h_e = 8 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.
- coefficient de convection interne $h_i = 200 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Nota : on négligera la tôle de l'enveloppe.

- b) Sachant que l'on désire maintenir un flux de chaleur surfacique de 9 W m^{-2} , quelle sera l'épaisseur d'isolant réellement mise en place ?

8. De la vapeur d'eau à 240°C circule à l'intérieur d'un tuyau en acier. Ce tuyau est isolé par une couche de laine minérale de 80 mm d'épaisseur. La température de l'air ambiant est égale à 20°C . La longueur du tuyau est de 30 mètres.

Calculer la quantité de chaleur perdue en une heure. Le régime est supposé permanent.

Données :

- Diamètre intérieur du tuyau $d_i = 120 \text{ mm}$, épaisseur $e = 5 \text{ mm}$.
- Conductivité thermique laine minérale : $\lambda_l = 0,098 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.
- Coefficient de convection externe $h_e = 14 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.
- Coefficient de convection interne $h_i = 11\,600 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

9. Les murs d'une pièce climatisée sont constitués par :

- un enduit ciment $e_1 = 2 \text{ cm}$, $\lambda_1 = 1 \text{ kcal h}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
- une épaisseur d'agglomérés pleins $e_2 = 10 \text{ cm}$, $\lambda_2 = 1,2 \text{ kcal h}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
- une couche de carreaux de plâtre $e_3 = 5 \text{ cm}$, $\lambda_3 = 0,4 \text{ kcal h}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
- un enduit plâtre $e_4 = 1,5 \text{ cm}$, $\lambda_4 = 0,4 \text{ kcal h}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

La température extérieure est de 35°C , la température intérieure est maintenue à 22°C . Les coefficients de transfert de chaleur externe et interne ont pour valeur respectives $h_e = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ et $h_i = 5 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

- a) Calculer la densité de flux de chaleur ϕ_1 entrant dans la pièce.
- b) On intercale dans le mur une couche de 4,5 cm de laine de verre. Calculer la nouvelle valeur ϕ_2 de la densité de flux.
- c) De combien (en %) ont été réduit les apports de chaleur ?
- d) Il est admis par les physiologistes que, dans le cas des murs, l'écart de température entre le milieu ambiant est la paroi interne du mur doit être inférieur à 3°C pour que l'échange de chaleur par rayonnement entre notre corps et la paroi s'effectue normalement, sans impression de froid ni de chaud, quelle que soit la température intérieure. Montrer que seule la paroi isolée thermiquement permet d'obtenir le confort thermique.

10. Une conduite d'eau à 60°C de 40 mm de diamètre extérieur et de 50 m de long est placée dans une ambiance à 35°C . On veut réduire ses pertes de chaleur à 500 kcal/h grâce à une couronne isolante en mousse de polyuréthane. Calculer l'épaisseur à donner à cette couronne.

11. Une paroi plane est constituée d'un matériau homogène dont le coefficient de conductivité thermique peut être représenté par : $\lambda = \lambda_0 (1 + a\theta)$, λ_0 étant la conductivité thermique à 0°C . Les faces sont soumises aux températures θ_1 et θ_2 .

- a) Quelle est la densité de flux de chaleur traversant le mur d'épaisseur e ?
- b) Comment varie la température en fonction de x ?

- c) Le flux est-il inférieur ou supérieur à celui calculé avec $\lambda = \lambda_0$?

Données : $\theta_1 = 20^{\circ}\text{C}$; $\theta_2 = 35^{\circ}\text{C}$; $a = 0,005 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$; $\lambda_0 = 0,03 \text{ kcal h}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$; $e = 20 \text{ cm}$.

12. Un tube cylindrique en acier inoxydable de 2 cm de diamètre intérieur et de 5 cm de diamètre extérieur est recouvert d'une couche de 3 cm de laine de verre. Calculer le flux perdu par mètre de longueur si la face interne de l'isolant est à 300°C et sa face externe à 100°C .

13. Soit un tube cylindrique de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 constitué d'un matériau de conductivité thermique λ_1 . Supposons que l'on veuille l'isoler avec un manchon de rayon externe r_3 et de conductivité thermique λ_2 . Soient h_i et h_e les coefficients de transfert interne et externe.

- a) Calculer la résistance thermique du tube seul.
- b) Calculer la résistance thermique de l'ensemble tube + manchon.
- c) Déterminer les conditions pour lesquelles l'adjonction d'un manchon permet bien de diminuer les pertes thermiques.

Données : $r_2 = 1,5 \text{ cm}$; $\lambda_2 = 0,1 \text{ W m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$; $h_e = 6 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

14. On considère une chambre froide cubique de côté intérieur $l = 3 \text{ m}$ à une température intérieure de -18°C . Les parois sont constituées de 15 cm de polystyrène et de 10 cm de béton. La température extérieure est de 35°C , les coefficients de transfert interne et externe valent respectivement $h_e = 15 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ et $h_i = 10 \text{ m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. En supposant que le sol est parfaitement isolé, calculer le flux de chaleur entrant dans l'enceinte.
15. Une pièce en acier de grandes dimensions est initialement à la température uniforme de 35°C . On soumet la pièce à un flux de chaleur :
 - a) en augmentant brutalement la température de surface à 250°C .
 - b) par un flux de densité constante : $\phi = 3,2 \cdot 10^5 \text{ W m}^2$.

Calculer dans les deux cas la température à une profondeur de 2,5 cm au bout de 30 secondes.

16. Une pièce en aluminium de grandes dimensions est à la température uniforme de 200°C . On abaisse brutalement sa température de surface à 70°C . Quelle est la chaleur perdue par unité de surface par la pièce quand la température à une profondeur de 4 cm a chuté de 120°C ?
17. Un cylindre semi-infini en aluminium de diamètre (cm est initialement à la température uniforme de 200°C . On lui impose brutalement un coefficient de transfert de convection de $525 \text{ W m}^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ dans un milieu à 70°C . Calculer la température à un rayon de 1,25 cm et à 10 cm de l'extrémité du cylindre au bout d'une minute.
18. Le traitement thermique d'un train d'atterrissement consiste à refroidir rapidement la pièce pour obtenir une structure métallique et des caractéristiques mécaniques satisfaisantes. On sait par ailleurs que la structure obtenue est satisfaisante pour tout point ayant atteint ou dépassé une vitesse de refroidissement critique de $800 \text{ }^{\circ}\text{C s}^{-1}$ au voisinage de 250°C . Quelle est l'épaisseur de la couche traitée thermiquement si l'on admet que le refroidissement est réalisé en imposant une température constante de 20°C à la surface de la pièce initialement portée à la température uniforme de 470°C ? La pièce est en aluminium et on l'assimilera à un cylindre de 60 cm de diamètre et de 3 m de haut. On abordera les calculs en supposant l'épaisseur de la couche traitée très petite devant le rayon du cylindre (on vérifiera cette hypothèse a posteriori).
19. Deux tubes sont enterrés dans le sol et maintenus respectivement à 300°C et à 125°C . Leurs diamètres sont de 8 cm et de 16 cm, la distance entre leurs axes est de 40 cm. Calculer le flux échangé par mètre de longueur si la conductivité thermique de la terre est de $0,7 \text{ W.m}^{-1} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Transfert de chaleur par rayonnement

20. En supposant que le soleil rayonne comme un corps noir à la température de 5762 K et en ne considérant que les échanges radiatifs Terre / Soleil :
 - a) Calculer la fraction de flux émise dans le domaine du rayonnement visible.
 - b) Calculer l'éclairement solaire sur 1 m^2 de la surface de la terre.
 - c) Calculer la température moyenne de la terre.
- Données : Rayon du Soleil : 696 700 km ; Distance Terre / Soleil : 149 637 000 km.
21. Quel est le flux de chaleur par mètre de longueur que reçoit un tube en métal de 8 cm de diamètre extérieur à 200°C placé dans un tunnel en briques réfractaires à 1200°C , ce tunnel ayant une section
 - a) Très grande par rapport au diamètre du tube.
 - b) Carrée de 12 cm de côté.
22. Quelle erreur commet-on en utilisant pour mesurer le rayonnement total d'une source de température 2780K un détecteur de pouvoir absorbant voisin de 1 dans la bande spectrale $0,8 - 5 \mu\text{m}$ et nul en dehors de cette bande ? La source sera assimilée à un corps noir.

23. Une plaque de verre de 100 cm^3 est utilisée pour observer le rayonnement provenant d'un four. Le facteur de transmission du verre est nul excepté dans la bande $0,2 \text{ à } 3,5 \mu\text{m}$ où il vaut $0,8$. Le facteur d'émission est pris égal à $0,3$ jusqu'à $3,5 \mu\text{m}$ et $0,9$ au-delà. En admettant que le four est un corps noir à 1800°C , calculer l'énergie totale absorbée par le verre et l'énergie transmise.
24. Deux surfaces cylindriques coaxiales très longues, grises et diffusantes ont les caractéristiques suivantes :
 - S_1 : rayon $R_1 = 0,20 \text{ m}$; $\varepsilon_1 = 0,25$; $\theta_1 = 500^\circ\text{C}$.
 - S_2 : rayon $R_2 = 0,40 \text{ m}$; $\varepsilon_2 = 0,80$; $\theta_2 = 60^\circ\text{C}$.
 a) Calculer le flux net radiatif échangé par mètre de longueur des cylindres.
 b) On interpose entre S_1 et S_2 un écran noir S_3 de rayon $R_3 = 0,3 \text{ m}$. Calculer la valeur du nouveau flux et de la température θ_3 de S_3 .
 c) Que deviennent ces résultats si l'écran est maintenant supposé gris et diffusant ?
25. Une plaque en aluminium poli est exposée sur une face à un ensoleillement de 800 W m^{-2} , l'autre face étant parfaitement isolée. Evaluer la température d'équilibre de la plaque :
 - a) En considérant uniquement ses pertes radiatives avec un environnement à 35°C .
 - b) En supposant de plus que la plaque échange de la chaleur par convection avec l'extérieur avec un coefficient d'échange $h = 15 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.
 - c) Reprendre les questions a) et b) si la plaque est recouverte d'une couche de peinture noir mat ($\varepsilon = 0,9$).
26. Un local parallélépipédique de dimensions $6 \times 4,5 \text{ m}$ au sol par 3 m de hauteur est chauffé par son plancher porté à 35°C . Les murs et le plafond étant à 20°C , évaluer le flux net échangé :
 - Entre le plancher et un élément de surface de 1 m^2 placé au centre du plafond.
 - Entre le plancher et le plafond.
 - Entre le plancher et l'ensemble des murs et du plafond.
27. Le local de l'exercice précédent a maintenant des murs parfaitement isolés. Le sol est à 35°C , le plafond à 20°C . Calculer le flux radiatif net échangé entre le plancher et le plafond ainsi que la température, supposée uniforme, de la surface intérieure des quatre murs verticaux.
28. Influence du rayonnement sur les mesures de température.
 - a) Un thermomètre de diamètre d_t ayant une émissivité $\varepsilon_t = 0,8$ est utilisé pour mesurer la température d'un gaz transparent s'écoulant dans une grande conduite dont les parois sont à 250°C . La température réelle du gaz est 500°C .
 - b) Calculer la température indiquée par le thermomètre sachant que le coefficient d'échange convectif est de $122 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.
 - c) Recalculer cette température si le thermomètre est recouvert de papier d'aluminium d'émissivité $0,1$.
 - d) On considère maintenant que le thermomètre précédent est protégé contre le rayonnement par un écran cylindrique mince de diamètre $d_e = 4 d_t$ et de facteur d'émission $\varepsilon_e = 0,3$. En admettant pour T_p , T_g , ε_t et h_e les mêmes valeurs numériques qu'en a) et pour h_e (coefficient de transfert par convection sur chaque côté de l'écran) la valeur $114 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, évaluer la nouvelle valeur de la température indiquée par le thermomètre.
29. Un mélange de 40% de CO_2 et 60% de H_2O en volume est contenu dans une enceinte cubique de 1 m de côté, le mélange est à 1 atm et à 800 K . Les parois de l'enceinte sont à 400 K et ont une émissivité $\varepsilon_p = 0,8$. Calculer le flux de refroidissement nécessaire pour maintenir les parois à 400 K .

Transfert de chaleur par convection

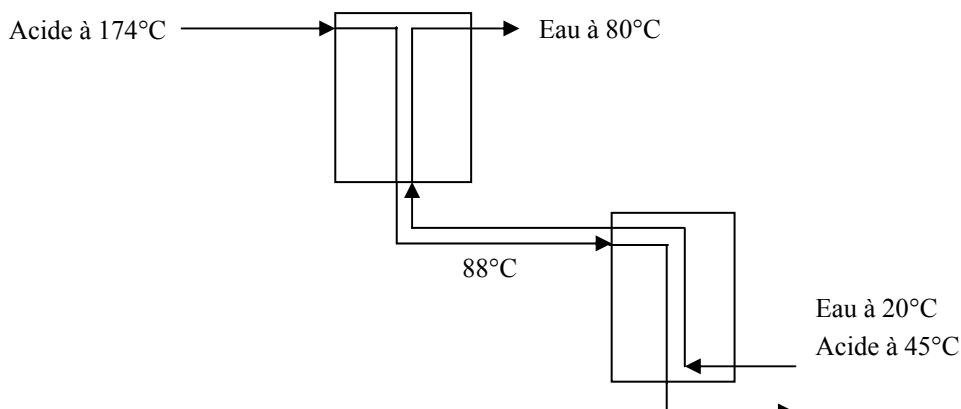
30. Un fluide s'écoule parallèlement à une paroi plane de $0,4 \text{ m}$ de long et de $0,1 \text{ m}$ de large. Hors de la couche limite, la vitesse est de 1 m.s^{-1} et la température du fluide est supérieure de 20°C à la température de la paroi supposée constante.
 - a) Calculer et comparer les coefficients de transfert de convection locaux obtenus pour l'air et pour l'eau en $x = 0,1 \text{ m}$.

- b) Calculer les coefficients de transfert de convection moyens obtenus pour l'air et pour l'eau entre $x = 0$ et $x = 0,1$ m .
 - c) Calculer les coefficients de transfert de convection (local et moyen) obtenus en $x = 0,2$ m avec de l'eau circulant à la vitesse de 10 m.s^{-1} . Comparer avec les coefficients obtenus en $x = 0,2$ m pour une vitesse d'écoulement d'eau de 1m.s^{-1} .
 - d) Calculer la force locale et moyenne exercée par le fluide sur la paroi en $x = 0,2$ m dans le cas d'un écoulement d'eau à une vitesse de 1 m.s^{-1} .
 - e) Quelle devrait-être la vitesse de circulation de l'air pour que le régime deviennent turbulent sur la paroi ?
31. De l'eau à 60°C circule dans un tube de verre.
- a) Tracer la courbe donnant les variations du coefficient de transfert par convection h en fonction du diamètre du tube, celui-ci variant de 10 à 50 mm, le débit étant maintenu constant à $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$.
 - b) L'eau, dans les mêmes conditions de température et de débit circule maintenant dans l'espace annulaire compris entre deux tubes de diamètres respectifs 20/27 mm. Déterminer le coefficient h' au niveau de la paroi interne du tube externe. Comparer au coefficient h relatif à la circulation dans un tube de diamètre tel que la vitesse de l'eau soit la même que ci-dessus.
32. De l'air pénètre dans un tuyau de section carrée, de côté 15 cm et de 9 m de longueur. L'air entrant est à une température de 32°C et à une pression de 1 atm. La température des parois est de 65°C . Le débit d'air est de $0,25 \text{ kg.s}^{-1}$.
Calculer la température de l'air à la sortie.
33. De l'air circule dans un conduit rectangulaire de largeur 1 m, de hauteur 10 cm et de longueur 6 m. La vitesse de l'air est de 2 m.s^{-1} , sa température de 30°C .
- a) Calculer le coefficient de transfert par convection h entre l'air et la paroi supérieure du conduit.
 - b) Calculer le flux échangé avec la paroi supérieure si celle-ci est maintenue à 50°C et si les autres parois sont parfaitement isolées.
34. Une conduite en acier inoxydable de diamètre intérieur $d_i = 30$ mm et de diamètre extérieur $d_e = 40$ mm est parcourue par un courant d'eau à la vitesse moyenne de 3 m.s^{-1} et à la température de 80°C . Sa paroi interne est recouverte d'un mince dépôt conduisant à une résistance thermique de $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$ appelée résistance thermique d'enrassement. A l'extérieur du tube d'acier circule normalement à la conduite de l'air à la vitesse de 8 m.s^{-1} et à la température de 20°C .
- a) Calculer les coefficients d'échange par convection intérieur h_i et extérieur h_e .
 - b) Calculer chaque résistance thermique séparant l'eau et l'air et donner le schéma électrique équivalent.
 - c) Calculer la température sur la partie externe du dépôt et sur les parois externes et internes du tube d'acier.
 - d) Calculer le refroidissement subi par l'eau après un parcours de 10m dans le tube si la température de l'air reste constante. Qu'en pensez-vous si le but est de refroidir l'eau (radiateur de voiture) ?
35. De l'air à 16°C est au contact d'une plaque plane verticale de hauteur L maintenue à 60°C .
- a) Tracer la courbe donnant les variations du coefficient de convection naturelle h_c avec la hauteur L de la plaque dans le domaine 0 - 1 m.
 - b) Comparer les valeurs de h ainsi trouvées avec celles que formules approchées suivantes applicables pour de l'air à température ordinaire et à la pression atmosphérique normale :
- laminaire : $h_c = 1,42 (\Delta T / L)^{0,25}$
 turbulent : $h_c = 1,31 (\Delta T)^{0,33}$
- c) Pour les mêmes conditions de température (on suppose les parois de l'enceinte à 16°C), on déterminera le coefficient superficiel de rayonnement h_r en fonction de ϵ_p , coefficient total d'émission de la plaque.
 - d) Pour une plaque de hauteur $L = 0,6$ m, on tracera la courbe $\frac{h_r}{h_c} = f(\epsilon_p)$. Conclusion ?
36. Une théière a la forme d'un cylindre de 10cm de diamètre et de 20cm de hauteur. Elle contient de l'eau bouillante à 100°C . La température des parois de la théière sera supposée égale à 100°C , la température du milieu environnant est de 27°C . On supposera que les pertes thermiques par le fond de la théière sont négligeables, l'émissivité des parois sera prise égale à 0,8.
- a) Calculer le flux de chaleur perdu par convection naturelle.
 - b) Calculer le flux de chaleur perdu par rayonnement.

- c) Reprendre le calcul si la théière est réfléchissante d'émissivité 0,1.
 - d) Reprendre le calcul si les parois sont constituées de deux cylindres métalliques co-axiaux d'émissivité 0,1 et de diamètre respectifs 0,2m et 0,21m (type vase Dewar). On a réalisé un vide poussé entre les deux cylindres qui permet d'abaisser le coefficient de convection à $0,5 \text{ W.m}^{-2}.^{\circ}\text{C}^{-1}$. On considérera que la température de la paroi externe est peu différente de la température du milieu environnant. On justifiera cette hypothèse a posteriori.
37. Le mur d'une maison a 6 m de haut et 10 m de long. Sous l'échauffement du soleil, sa température de paroi atteint 40°C . La température ambiante extérieure étant de 20°C , calculer le flux net échangé par convection naturelle entre le mur et l'extérieur.
38. Déterminer le coefficient d'échange vapeur-paroi lors de la condensation de 60 kg h^{-1} de vapeur d'un fluide synthétique pour le transfert de chaleur sur un tube de 60 mm de diamètre extérieur et 1,5 m de long. Le fluide a les caractéristiques suivantes à la température de paroi (264°C) :
- $\lambda = 0,15 \text{ kcal.h}^{-1}.^{\circ}\text{C}^{-1}$; $\mu = 0,3.10^{-3} \text{ Pl}$; $\rho = 850 \text{ kg.m}^{-3}$; $\Delta H = 60 \text{ kcal.kg}^{-1}$
- Température de rosée : 320°C .
- On déterminera h successivement pour un tube vertical et pour un tube horizontal.

Les échangeurs de chaleur

39. On considère un échangeur tubulaire simple constitué de deux tubes cylindriques coaxiaux de caractéristiques suivantes :
- Tube intérieur : rayons $r_1 = 1,5 \text{ cm}$ et $r_2 = 1,75 \text{ cm}$, $\lambda = 0,67 \text{ W.m}^{-1}.^{\circ}\text{C}^{-1}$.
 - Tube extérieur : rayon $r_3 = 2,1 \text{ cm}$
- Les tubes sont parcourus par de l'eau. Les débits intérieurs et extérieurs sont respectivement 200 kg h^{-1} et 1000 kg h^{-1} . Les températures d'entrée de l'eau sont 60°C et 25°C , l'eau chaude circule dans le tube intérieur.
- Calculer le coefficient global d'échange h de l'échangeur.
 - Calculer l'efficacité de cet échangeur dans le cas d'une utilisation à co-courant puis à contre-courant.
- Données : $L = 1,5 \text{ m}$; $\theta_{1e} = 60^{\circ}\text{C}$; $\theta_{2e} = 25^{\circ}\text{C}$.
40. De l'acide sulfurique circule avec un débit de 4500 kg h^{-1} dans un circuit qui comprend deux réservoirs en série où il est en contact, par agitation, avec des serpentins à contre-courant de l'acide. Sachant que le 1^{er} réservoir traversé par l'acide a un coefficient global de transfert $h_1 = 1000 \text{ kcal h}^{-1} \text{ m}^{-2}.^{\circ}\text{C}^{-1}$ et le second un coefficient $h_2 = 630 \text{ kcal.h}^{-1}. \text{m}^{-2}.^{\circ}\text{C}^{-1}$, calculer la surface totale de refroidissement.
- Données :
- Acide sulfurique : $c_p = 0,36 \text{ kcal.kg}^{-1}.^{\circ}\text{C}^{-1}$
 - Les températures aux différents points du circuit sont indiquées dans le schéma ci-après :

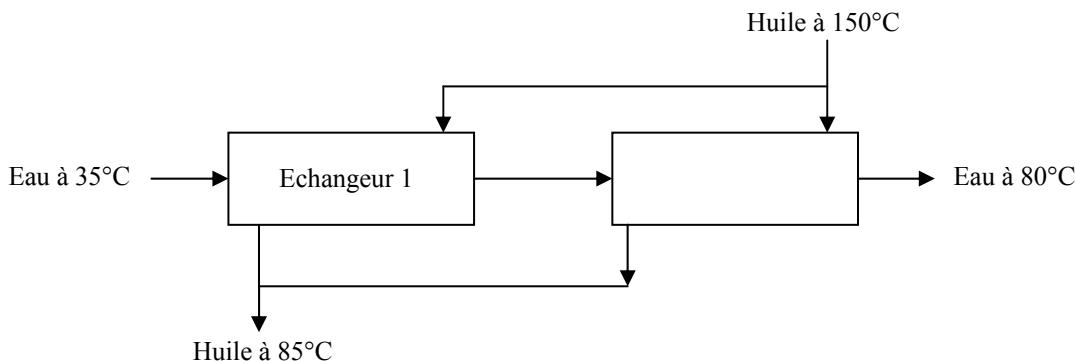


41. Du benzène à la température de 70°C circule avec un débit de 3000 kg.h^{-1} dans un échangeur tubulaire simple où il va être refroidi par de l'eau qui entre à 15°C avec un débit de 2000 kg.h^{-1} .

- a) Fonctionnement à co-courant :
- Déterminer la température limite que l'on obtiendrait avec un échangeur de longueur infinie.
 - En s'imposant une température de sortie du benzène de 37°C, déterminer la température de sortie de l'eau ainsi que la surface d'échange nécessaire.
- b) Fonctionnement à contre-courant :
- Pour les mêmes conditions de température, déterminer la surface d'échange nécessaire.
 - Calculer l'efficacité de l'échangeur
 - On dispose d'un échangeur de surface identique à celle calculée en a). Calculer la température de sortie du benzène et l'efficacité dans ce cas.
- c) En utilisant ce même échangeur de façon préférentielle à co-courant, quel pourcentage d'énergie (défini par rapport à l'énergie qu'on aurait pu tirer dans les meilleures conditions d'utilisation, c'est à dire en contre-courant) gaspille-t-on ?
- Données :
- benzène : $c_p = 0,44 \text{ kcal.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$
 - échangeur : $h = 750 \text{ kcal.h}^{-1}.\text{m}^{-2}$

42. Un échangeur tubulaire à contre-courant est utilisé pour chauffer 1,25 kg.s⁻¹ d'eau de 35 à 90°C en refroidissant une huile ($c_p = 2,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$) de 150 à 85°C. Le coefficient global de transfert de l'échangeur est $h = 850 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$.

On veut comparer les performances de cet échangeur avec celles de deux petits échangeurs à contre-courant, les circuits d'eau étant placés en série et les circuits d'huile en parallèle :



Le débit d'huile est le même dans les deux petits échangeurs. Le coefficient global de transfert est également identique et vaut $h = 850 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$.

Si le m² d'un petit échangeur coûte 20% de plus que le m² du grand échangeur, quelle est la solution la plus économique : un grand échangeur ou deux petits ?

43. Une vapeur sèche et saturée circulant à l'intérieur de tubes doit assurer par condensation à 108°C le chauffage de 6000 kg.h⁻¹ de benzène ($c_p = 0,44 \text{ kcal.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$) de 20 à 75°C.
- La détermination du coefficient global de transfert à l'entrée et à la sortie du condenseur donne respectivement $h_e = 120 \text{ kcal.h}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$ et $h_s = 380 \text{ kcal.h}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$. Calculer la surface d'échange nécessaire.
 - Le coefficient global de transfert h (en $\text{kcal.h}^{-1}.\text{m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$) varie en fait avec la température du benzène selon les valeurs indiquées dans le tableau suivant :

°C	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
h	120	158	196	234	256	276	296	318	332	350	364	380

- Déterminer la surface d'échange nécessaire.
- En admettant cette valeur comme plus correcte, quel erreur (en pourcentage) est induite par l'application de la formule utilisée en a) ?

44. Déterminer pour chacun des cas suivants la surface d'échange nécessaire pour refroidir en continu 30000 kg.h⁻¹ d'une solution de 66°C à 39°C en utilisant 29500 kg.h⁻¹ d'eau de refroidissement à une température de 12°C.

- a) Echangeur tubulaire simple à co-courant
- b) Echangeur tubulaire simple à contre-courant
- c) Echangeur de type 1-2
- d) Echangeur de type 2-4
- e) Echangeur à courants croisés à 2 fluides non brassés.

Données : c_p solution = 0,9 kcal.kg⁻¹.°C⁻¹; coefficient global de transfert : $h = 2100$ kcal.h⁻¹.m⁻².°C⁻¹

45. L'air vicié extrait d'un bâtiment à 20°C à raison de (50 000 kg h⁻¹ traverse un échangeur économiseur servant à prérefroidir l'air neuf admis avec un débit identique. L'échangeur est un appareil à plaques planes et à courants croisés sans brassage. Sa surface d'échange est de 50 m² et son coefficient global de transfert est de 2000 W.m².°C⁻¹.

- a) Calculer l'efficacité de l'échangeur et la température de sortie de l'air neuf si sa température d'entrée est de 35°C.
- b) Calculer la température de sortie de l'air vicié et la puissance thermique récupérée dans cet échangeur.

46. Après un essai de fonctionnement fait sur un échangeur à un passage en enveloppe et deux passages en tubes, on dispose des données suivantes :

- Intérieur des tubes : huile en écoulement turbulent :

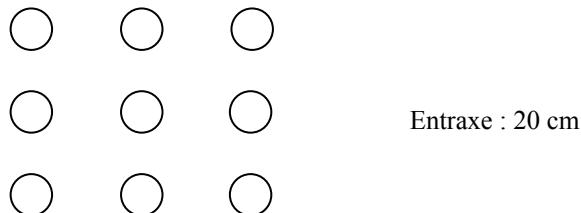
$\text{débit} = 2270 \text{ kg.h}^{-1}$; $c_p = 0,5 \text{ kcal.kg}^{-1}.^{\circ}\text{C}^{-1}$; $\theta_{\text{entrée}} = 71^{\circ}\text{C}$; $\theta_{\text{sortie}} = 38^{\circ}\text{C}$.

- Extérieur des tubes : eau : $\theta_{\text{entrée}} = 16^{\circ}\text{C}$; $\theta_{\text{sortie}} = 27^{\circ}\text{C}$.

On souhaite prédire le fonctionnement de cet échangeur avec un débit d'huile réduit au $\frac{3}{4}$ du précédent et une température d'entrée de 98°C.

Calculer la température de sortie d'huile pour un débit et une température d'eau identique. On supposera que le coefficient de transfert côté huile est faible devant celui côté eau.

47. On considère un échangeur tubulaire, supposé parfaitement isolé, comportant 100 tubes de cuivre de 2,4 m de long, de 10 mm de diamètre intérieur et 13 mm de diamètre extérieur, répartis dans la section de l'échangeur comme indiqué sur le schéma ci-après :



A l'intérieur des tubes se vaporise un fluide frigorigène, à l'extérieur des tubes et parallèlement à ceux-ci circule de l'air à refroidir.

- a) Calculer le diamètre équivalent D_e côté air.
- b) Pour quelle valeur du débit d'air y a-t-il passage du laminaire au turbulent ? Quel type d'écoulement choisira-t-on ?
- c) Un débit d'air de 2500 kg.h⁻¹ pénètre à 30°C dans l'échangeur et on veut qu'il en sorte à 10°C. Quelle doit être la température d'évaporation du fluide frigorigène ?

48. On souhaite dimensionner un échangeur gaz-liquide à courants croisés parcouru par un débit d'eau de 8,33 kg.s⁻¹ que l'on chauffe de 20 à 90°C à partir de 41,67 kg.s⁻¹ d'air à 300°C.

On dispose pour cela de tubes de diamètre extérieur 50 mm et d'épaisseur 5 mm que l'on souhaite monter en quinconce équilatérale avec un entraxe de 75 mm. L'eau circule à l'intérieur des tubes et l'air chaud circule perpendiculairement aux tubes.

Calculer pour une longueur maximale de tubes de 6 m :

- a) le nombre de nappes de tubes.
- b) Le nombre de tubes par nappe.