

# 1 DENSIFICATION DE CANEVAS

## 1 ÉTABLISSEMENT DES CANEVAS PLANIMÉTRIQUES

La densité du canevas géodésique (environ un point pour 10 km<sup>2</sup>) est insuffisante pour rattacher les travaux topographiques nécessaires à la réalisation d'autoroutes, de tunnels, du TGV, au cadastre, au remembrement etc. d'une part ; d'autre part il se peut que pour certains travaux, la précision du canevas géodésique soit insuffisante.

Le topomètre est alors amené à asseoir le réseau polygonal qu'il réalise sur des points d'appui judicieusement répartis qui forment le canevas d'ensemble, canevas réduit mais de précision homogène.

Selon la précision désirée, le réseau créé est donc rattaché au canevas géodésique ou indépendant.

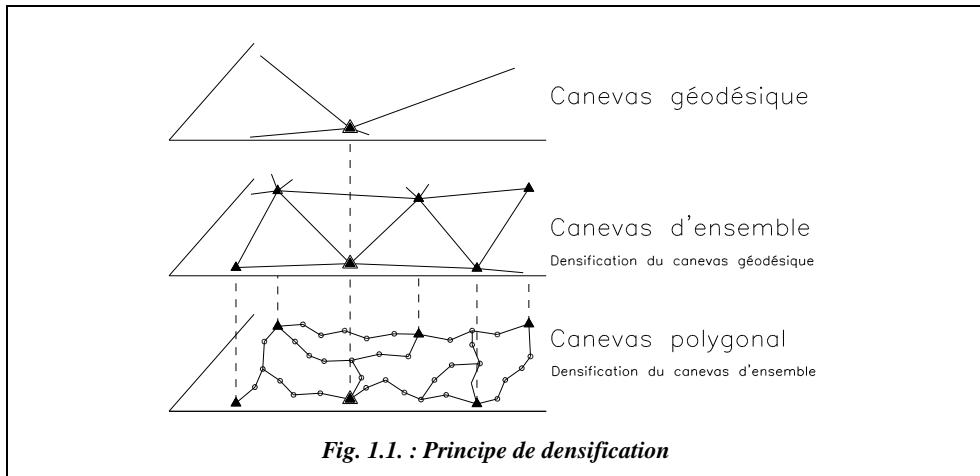
### 1.1 Définition

Un canevas est un ensemble discret de points judicieusement répartis sur la surface à lever, dont les positions relatives sont déterminées avec une précision au moins égale à celle que l'opérateur attend du levé. Ces points servent d'appui au lever des détails, implantations, etc.

Le canevas s'exprime par les coordonnées de ces points dans un même système.

### 1.2 Principe de densification

En topométrie, le principe fondamental consiste à « aller de l'ensemble aux détails ».



### 1.3 Canevas d'ensemble

Le canevas d'ensemble est un canevas planimétrique déterminé par des opérations de mesures sur le terrain, matérialisé de façon durable par des bornes ou des repères et suffisamment dense pour étayer le réseau sur lequel s'appuie le lever de détails.

Le canevas d'ensemble est en général appuyé sur le réseau géodésique ; on distingue :

- le **canevas d'ensemble ordinaire**, dont la tolérance sur l'erreur en distance entre deux points est égale à 20 cm. Il est parfaitement adapté aux travaux en zones rurales. Pour les travaux cadastraux, le canevas d'ensemble est un canevas ordinaire. Il est donc rare, dans la pratique, de considérer un canevas de précision si ce n'est pour des travaux autres que cadastraux car un maître d'ouvrage peut avoir mis dans le cahier des charges un canevas de précision ;
- le **canevas d'ensemble de précision**, dont la tolérance sur l'erreur en distance entre deux points est égale à 4 cm. Il est plutôt adapté aux travaux en zones urbaines et périurbaines.

Le canevas est indépendant si la précision du canevas géodésique d'appui est insuffisante, mais son orientation et son origine moyenne doivent être ramenées dans le système Lambert.

Ils doivent satisfaire à la gamme de tolérances fixées par l'arrêté du 21 janvier 1980 .

#### 1.3.1 Canevas ordinaire

Le **canevas ordinaire** est caractérisé par sa possibilité de densification par **points isolés**. Un tel point est déterminé par les mesures suivantes :

- angulaires : intersection, relèvement, recouplement (procédés dits de triangulation) ;

- de distances : multilatération (procédé de trilateration) ;
- mixtes : insertion.

Il peut également être :

- un point nodal de cheminements à longs côtés (voir chap. 2, § 2.) ;
- déterminé par localisation satellitaire (GPS, voir tome 1, chap 7.).

### 1.3.1.1 *La triangulation*

La triangulation est une technique permettant de déterminer les éléments d'une figure en la décomposant en triangles adjacents dont l'opérateur mesure les angles au théodolite, dont il assure les fermetures angulaires et dont un côté au moins est connu ou déterminé. Elle peut avoir deux finalités, à savoir :

- servir à densifier un réseau de triangulation déjà existant, par exemple le réseau géodésique : c'est le cas de canevas d'ensemble. Les mesures angulaires suffisent, mais il est possible d'améliorer la mise à l'échelle du réseau de triangulation en mesurant quelques **bases** ;
- être locale : outre la mesure des angles, il faut alors effectuer impérativement la mesure de la longueur d'au moins une base du réseau de triangulation.

Par extension du premier type, on appelle triangulation complémentaire une densification du canevas par les procédés de l'intersection, du relèvement ou du recouplement, où l'opérateur mesure des angles sans assurer la fermeture des triangles.

#### ◆ *intersection*

Un point intersecté  $M$  est un point non stationné que l'opérateur vise depuis des points anciens connus en coordonnées  $A, B, C, D$ , encore appelés points d'appui, de manière à déterminer les gisements des visées d'intersection (fig. 1.2-a.). On ne pourra connaître précisément ces gisements que si on détermine les  $G_o$  des points d'appui.

La figure 1.2-a. représente la réalisation d'une intersection.

Toutes les lectures angulaires  $L_A, L_B, L_C$ , et  $L_D$  doivent être corrigées de la correction de réduction à la projection,  $dv$  (voir tome 1, chap. 2).

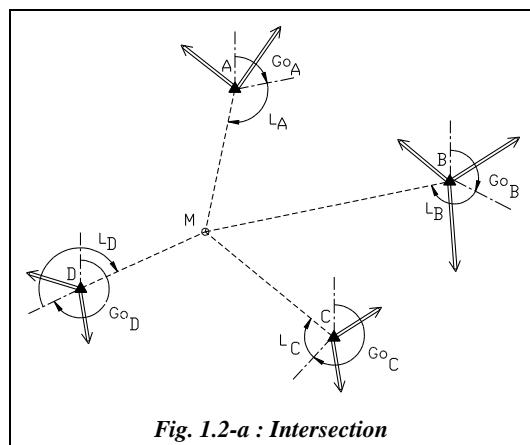
Les gisements observés sont :

$$G_{AM \text{ obs}} = G_o_A + L_A$$

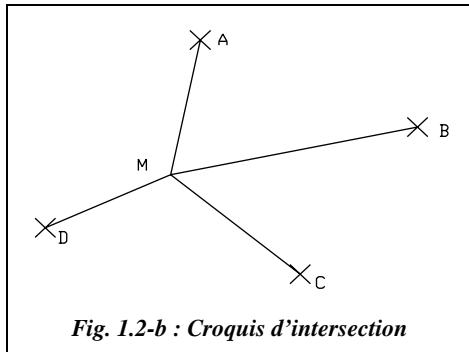
$$G_{BM \text{ obs}} = G_o_B + L_B$$

$$G_{CM \text{ obs}} = G_o_C + L_C$$

$$G_{DM \text{ obs}} = G_o_D + L_D$$



Les croquis sont représentés sur les « mappes d'observation » à très petite échelle (1/100 000 ou 1/200 000) par les désignations conventionnelles suivantes :



- visée d'intersection désignée par une croix ;
- points indiqués par leur numéro.

Le point M se situe sur chaque demi-droite matérialisant chaque visée : ces demi-droites sont les lieux géométrique de M ; il se situe donc à leur intersection.

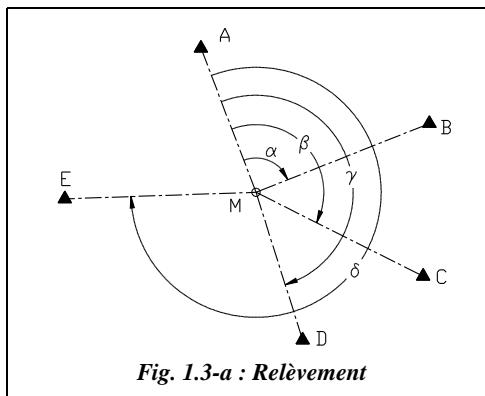
Dans ce procédé de l'intersection, on appelle lieux-droites du point M les demi-droites matérialisant les visées.

Deux lieux sont donc nécessaires et suffisants pour déterminer le point M ; en topographie, pour le contrôle, une visée supplémentaire est nécessaire et pour que le point M soit déterminé avec sécurité, il est conseillé d'effectuer une quatrième visée :

**M est donc déterminé par quatre lieux, quel que soit le procédé utilisé.** Dans notre cas, quatre lieux-droites seront nécessaires.

**Les calculs d'une intersection** sont détaillés au paragraphe 5.

◆ **Relèvement**



Un point relevé est un point stationné depuis lequel l'opérateur effectue un tour d'horizon sur des points anciens connus (fig. 1.3-a.). L'opérateur lit les angles suivants :

$$AMB = \alpha = L_B - L_A$$

$$AMC = \beta = L_C - L_A$$

$$AMD = \gamma = L_D - L_A$$

$$AME = \delta = L_E - L_A$$

Sur les mappes d'observation, une visée de relèvement est représentée par un cercle (fig. 1.3-b.).

L'opérateur voit l'arc AB sous un angle  $\alpha$  ; le point M se situe donc sur un arc de cercle passant par A, M et B : il est appellé **arc capable AMB** ; c'est un lieu géométrique du point M. Deux arcs capables sont donc nécessaires et suffisants pour déterminer par leur intersection le point M. Mais on sait qu'en topographie quatre lieux sont nécessaires pour le contrôle et la sécurité. Il faut donc quatre arcs capables.

Deux points donnent un arc capable d'angle associé  $\alpha$ .

Trois points donnent trois arcs capables d'angles associés  $\beta$  et  $(\beta - \alpha)$ . Mais l'arc AMC, par exemple, passe forcément par l'intersection de AMB et BMC : on dit qu'il est dépendant. Donc trois points donnent seulement deux arcs capables indépendants. On dit que M est un point triple.

Il faut donc cinq points pour obtenir quatre arcs capables indépendants c'est-à-dire les quatre lieux indépendants nécessaires.

Le tableau suivant donne le nombre de lieux indépendants possibles et le nombre de points triples en fonction du nombre de points d'appui.

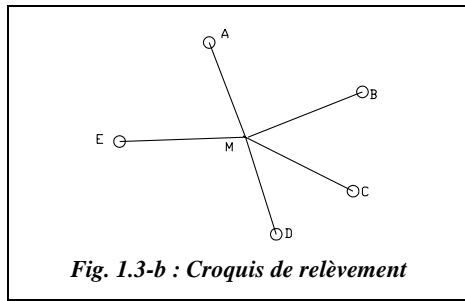


Fig. 1.3-b : Croquis de relèvement

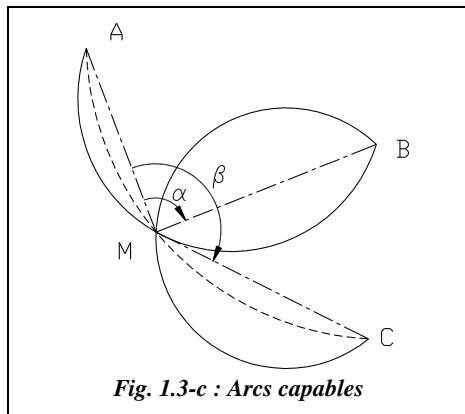


Fig. 1.3-c : Arcs capables

Nombre de points	Nombre d'arcs	Lieux indépendants	Lieux dépendants	Nbre de points triples
2 : A et B	1 : AB	1 : AB		
3 : A, B et C	3 : AB, AC et BC	2 : AB et AC par exemple	1 : BC	1
4 : A, B, C et D	6 : AB, AC, AD, BC, BD et CD	3 : AB, AC et AD par exemple	3 : BC, BD et CD	4
5 : A, B, C, D et E	10 : AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE et DE	4 : AB, AC, AD, AE par exemple	6 : BC, BD, BE, CD, CE, DE	10
6	15	5	10	20

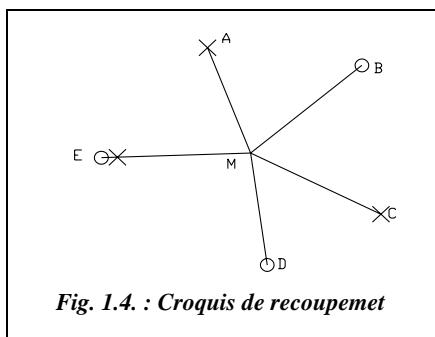
Le nombre d'arcs est une combinaison de  $n$  éléments pris deux à deux soit :

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le nombre de points triples, intersections de trois arcs capables, est une combinaison de  $n$  points pris trois à trois, c'est à dire :  $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ .

La construction d'un arc capable est détaillée au chapitre 4, paragraphe 6.4. Le calcul d'un relèvement est détaillé au paragraphe 6.

◆ **Recouplement**



Le recouplement est le procédé qui utilise simultanément l'intersection et le relèvement pour la détermination d'un point.

Le point M de la figure 1.4. est déterminé par recouplement à partir de trois visées d'intersection et trois visées de relèvement.

- Pour obtenir les quatre lieux nécessaires, il faut au minimum soit :
- une visée d'intersection et quatre de relèvement soit  $1 + 3 = 4$  lieux indépendants ;
- deux visées d'intersection et trois de relèvement soit  $2 + 2 = 4$  lieux indépendants ;
- trois visées d'intersection et deux de relèvement soit  $3 + 1 = 4$  lieux indépendants.

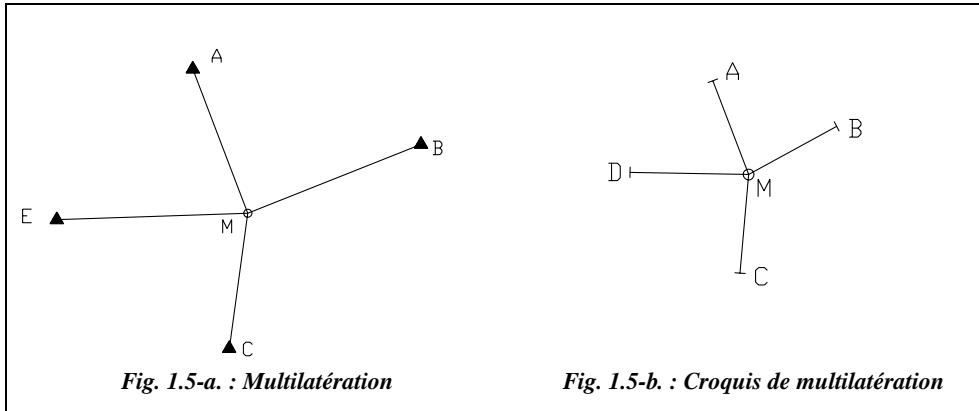
Le recouplement est pratique quand les points d'appui sont peu nombreux et stationnaires.

Le calcul d'un recouplement est détaillé au paragraphe 8.

**1.3.1.2 Trilateration**

Le procédé utilisé est la multilateration. On observe les distances sur au moins quatre points éloignés correctement répartis ; les distances doivent être homogènes et les points situés dans les quatre quadrants, si possible autour du point nouveau à déterminer (point M, fig. 1.5-a.).

Le point M de la figure 1.5-b. est déterminé à partir de quatre mesures de distance  $D_{AMobs}$ ,  $D_{BMobs}$ ,  $D_{CMobs}$ ,  $D_{DMobs}$  sur quatre points anciens connus.



Les distances doivent être réduites au plan de projection (voir tome 1, chap. 4., § 7.).

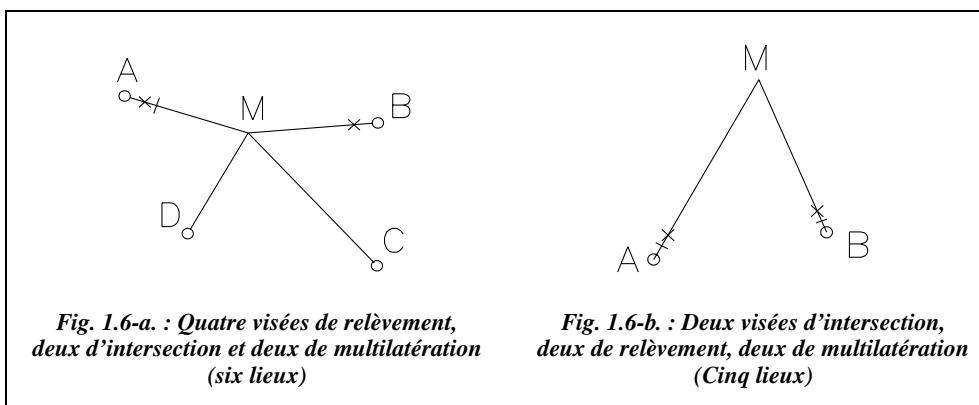
Les lieux sont ici des cercles centrés sur les points connus et dont les rayons sont les distances mesurées réduites. Deux cercles sont nécessaires et suffisants pour déterminer le point M, mais il faut quatre lieux, donc quatre cercles, c'est-à-dire quatre points anciens connus.

Les distances mesurées sont indiquées par un trait perpendiculaire à la visée.

Le calcul d'une multilatération est détaillé au paragraphe 4.

### 1.3.1.3 *Insertion*

L'insertion est un procédé qui utilise l'intersection, le relèvement et la multilatération pour la détermination d'un point.



On note :

- I une visée d'intersection ;
- R une visée de relèvement ;
- M une visée de multilatération.

Les combinaisons suivantes permettent d'obtenir les quatres lieux nécessaires :

- $1 \times I + 3 \times R + 1 \times M = 1 + 2 + 1 = 4$  lieux
- $1 \times I + 2 \times R + 2 \times M = 1 + 1 + 2 = 4$  lieux
- $2 \times I + 2 \times R + 1 \times M = 2 + 1 + 1 = 4$  lieux

Ces combinaisons ne sont données qu'à titre d'exemples, car il paraît évident que si une mesure de distance est possible sur un nouveau point, une visée d'intersection l'est aussi ; donc il y a autant de visées d'intersection que de multilatérations.

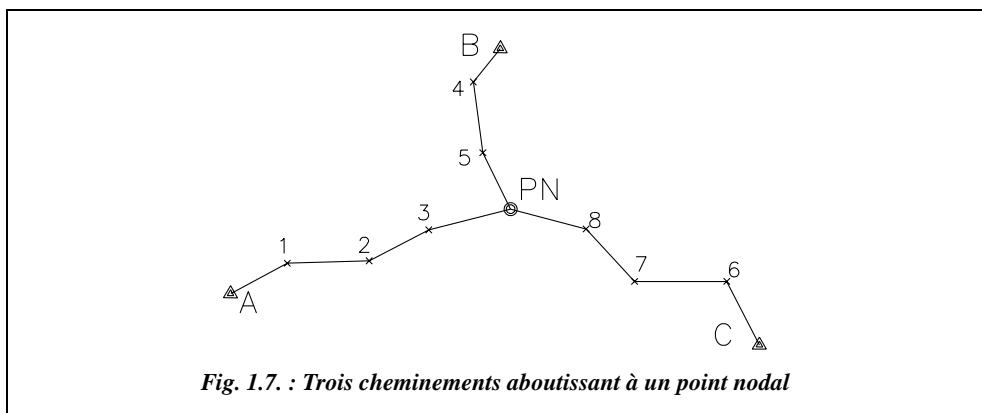
L'insertion présente l'intérêt d'être opérationnelle avec un petit nombre de points d'appui stationnables.

Le calcul d'une insertion est détaillé au paragraphe 9.

#### 1.3.1.4 **Point nodal, intersection d'au moins trois cheminement à longs côtés**

Cette méthode permet de remplacer les méthodes précédentes quand la nature du terrain interdit la réalisation d'un réseau de triangles.

Seuls les points noraux, définis comme les points de rencontre d'au moins trois cheminement à longs côtés, remplacent les points du canevas que l'on aurait déterminés par triangulation ou trilateration.



Les points A, B et C de (fig. 1.7.) sont connus et stationnables.

PN est le point nodal.

1, 2, 3, etc. sont des points intermédiaires.

Les côtés des cheminements ont une longueur de 500 m sans être inférieurs à 200 m.

Le calcul d'un point nodal est détaillé dans le chapitre 2 au paragraphe 2.

### 1.3.1.5 *Canevas établi par localisation satellitaire (réseau GPS)*

La densification du canevas géodésique s'effectue de plus en plus par GPS (voir tome 1, chap. 7., § 1.), surtout depuis que le nouveau Réseau Géodésique Français (RGF, voir tome 1, chap. 2., § 5.) commence à être diffusé par l'IGN.

## 1.3.2 **Opérations annexes de « rattachement »**

Les procédés classiques de détermination de points de canevas sont subordonnés à l'intervisibilité, contrairement au GPS, et il est rare que l'opérateur puisse tout observer d'un ou sur un point à cause de la présence de masques : arbres, immeubles, relief, etc. d'où la nécessité de s'excenter par rapport au point de station.

D'une manière générale, en dehors des procédés étudiés précédemment, la détermination d'un point nouveau du canevas d'ensemble par rapport à un ou plusieurs autres s'appelle rattachement.

### 1.3.2.1 *Rattachement simple*

Le rattachement simple est une opération annexe du canevas d'ensemble qui consiste à déterminer, au voisinage d'un repère A connu en coordonnées rectangulaires, les coordonnées d'un point M qui présente de plus grandes facilités d'utilisation ou de meilleures chances de conservation. Cette opération s'effectue généralement par rayonnement planimétrique.

Par exemple, B et C (fig. 1.8.) sont des points éloignés connus. L'opérateur stationne le point A connu où l'on détermine un  $G_0$  de station .

Si  $L_M$  est la lecture sur le point M, on peut écrire :  $G_{AM} = G_0 + L_M$

La lecture de  $L_M$  au mgon suffit puisque la distance  $L_M$  ne dépasse pas 100 m ; or 1 mgon correspond à un déplacement de 1,57 mm à l'extrémité d'une visée de 100 m.

Puis on mesure la distance AM :  $Dh_{AM}$ .

On en déduit :  $E_M = E_A + Dh_{AM} \cdot \sin G_{AM}$

$$N_M = N_A + Dh_{AM} \cdot \cos G_{AM}$$

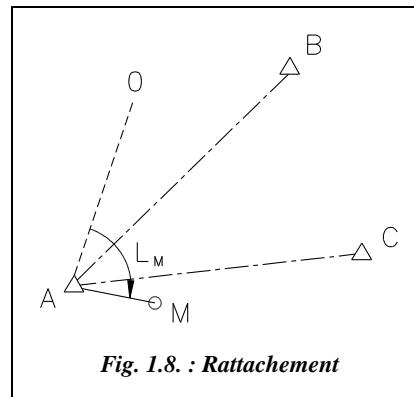


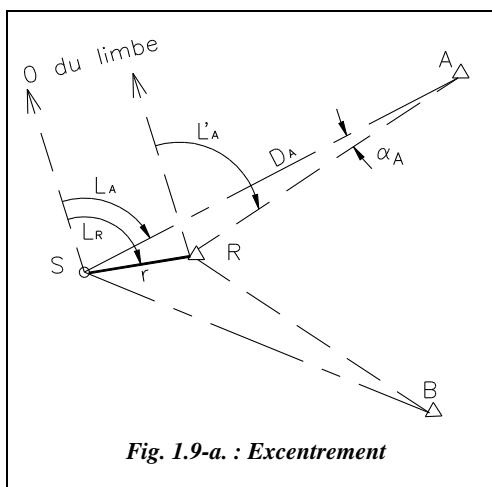
Fig. 1.8. : *Rattachement*

En général, pour plus de sûreté, on double la mesure des observations (angle et distance). Par exemple, dans le cas d'un tour d'horizon au point A, on effectue la lecture sur le point M à la fin de deux séquences.

On peut rencontrer ce cas lors du relèvement d'un point nouveau P ; le point connu A n'est pas visible mais un point M à proximité muni d'une balise est visible de P.

### 1.3.2.2 Station excentrée

En travaux de canevas, il arrive souvent que les observations angulaires ne puissent être effectuées directement du point connu ou à déterminer appelé repère ou signal R.

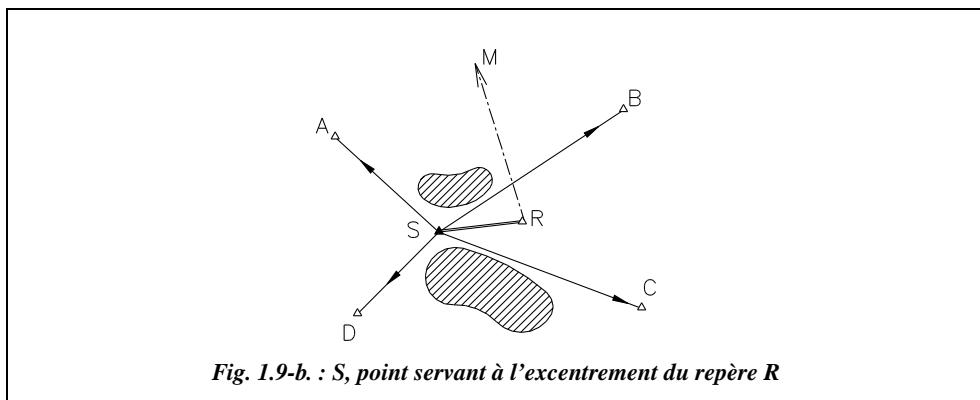


L'opérateur effectue donc les observations à partir d'une station S située à proximité du repère R, généralement à une courte distance de celui-ci.

Le calcul du paragraphe 10.1. permet de déterminer les corrections à apporter aux éléments observés à la station excentrée S pour ramener les observations à ce qu'elles auraient été si l'on avait stationné le repère R.

#### Remarque

- On peut rencontrer ce cas lors de visées d'intersection sur un point M inconnu (fig. 1.9-b.) si tous les points connus autour du repère R et nécessaires au calcul du  $Go_R$  ne sont visibles que du signal S situé à quelques mètres de R.



- D'un point R à relever, seules deux ou trois visées sur points connus sont possibles ; en revanche, d'autres visées sont réalisables d'un point voisin S : B, C, D. Il est souhaitable (voir calculs au paragraphe 10.1.) qu'un point commun E soit visible (fig. 1.9-c.). On utilise une station excentrée S visible depuis le repère R.

Depuis le point S on voit les points manquants (A, B, C, D dans le premier cas, B, C, D dans le second). La connaissance de la distance d'excentrement RS et des distances entre le point R et les points connus J permettra de résoudre les triangles JSR et d'en déduire les visées que l'on aurait dû faire de R sur les points J : c'est la **réduction au repère R**.

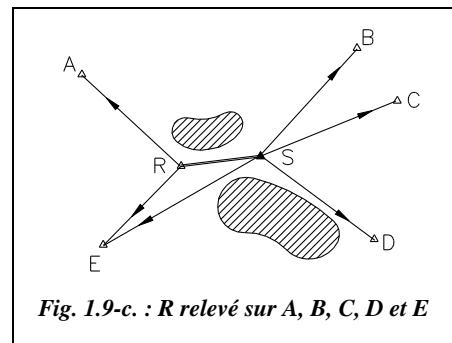


Fig. 1.9-c. : R relevé sur A, B, C, D et E

#### ◆ Application : recouplement excentré

La station de relèvement  $M_R$  (en général une borne) est placée dans le voisinage immédiat du signal intersecté  $M_I$ , une balise en général, lequel par exemple n'est pas stationnable. On revient au calcul précédent (station excentrée) c'est-à-dire qu'on l'on réduit les observations de la station  $M_R$  au signal  $M_I$  intersecté après avoir déterminé les éléments de l'excentrement : le rayon  $r$  et la lecture azimutale  $L_R$ . Pour que le calcul soit réalisable il faut que  $M_I$  soit connu pour calculer les distances  $M_{IJ}$  : on détermine les coordonnées du point approché  $M_{0I}$  à partir de deux visées d'intersection. On démontre dans le calcul de la station excentrée au paragraphe 10.1.3. qu'il est suffisant de connaître les distances au mètre près ; la connaissance des coordonnées approchées suffit donc.

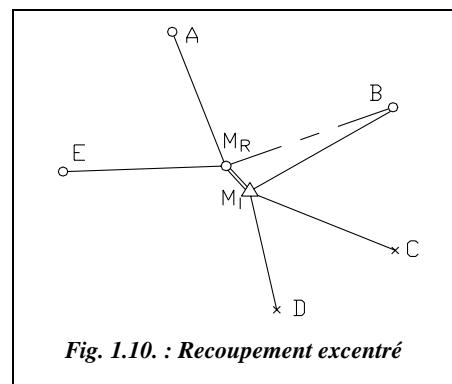


Fig. 1.10. : Recouplement excentré

#### 1.3.2.3 Rabattement d'un point au sol

Ce cas se présente lors d'un rabattement d'un point élevé : pylône, antenne, clocher, château d'eau, etc. souvent non stationnable. Le point rabattu peut servir ensuite de point de départ à l'élaboration d'un canevas.

1 - S'il est stationnable, cas d'une terrasse par exemple, l'opérateur procède comme pour un rattachement, la distance inclinée étant mesurable.

2 - S'il est inaccessible (fig. 1.11-a.), l'opérateur construit deux bases (AB et BC) au sol sensiblement égales formant avec le point inaccessible visible R deux triangles à peu près

équilatéraux. De l'un des trois points au sol, il faut nécessairement viser un point connu éloigné P. De ce même point ou de l'un des deux autres, il est intéressant de pouvoir viser un deuxième point connu éloigné Q, de manière à apporter une vérification au calcul et à déterminer le gisement moyen de l'un des côtés RA, RB ou RC (voir paragraphe 10.2. pour le calcul).

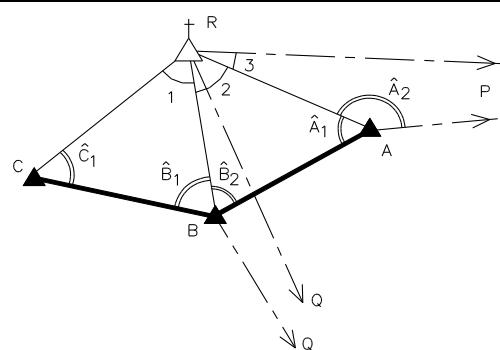


Fig. 1.11-a. : Rabattement d'un point

Si l'emplacement est réduit, on peut construire les deux triangles accolés du même côté de RA (fig. 1.11-b.).

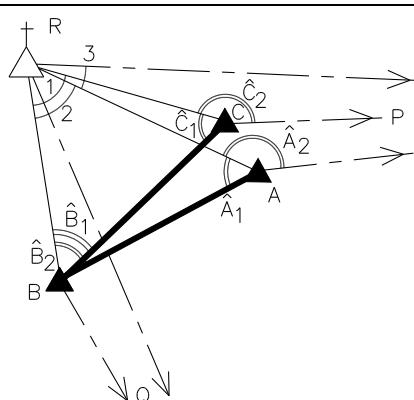


Fig. 1.11-b. : Triangles accolés

### 1.3.3 Canevas de précision

Ce canevas étant plus précis que le canevas ordinaire, il est soumis à des tolérances plus strictes. Les méthodes relatives au canevas ordinaire décrites aux paragraphes précédents (1.3.1. et 1.3.2.) sont applicables en canevas de précision.

Si le réseau géodésique local est d'une précision insuffisante, le topomètre crée son propre réseau indépendant, constitué de figures simples composées de triangles juxtaposés les plus équilatéraux possibles et tels qu'aucun angle ne soit inférieur à 40 gon.

Nous supposerons les triangles suffisamment petits pour que l'on puisse négliger leur excès sphérique et la zone triangulée suffisamment restreinte pour qu'il ne soit pas nécessaire d'utiliser un système de projection. En effet, le problème de la triangulation d'une vaste zone fait partie de la géodésie.

Le réseau se compose généralement de figures simples ou de réseaux de figures simples ; les coordonnées des sommets de ces figures sont déterminées après avoir mesuré avec une grande précision, la totalité des angles ainsi que la longueur et l'orientation d'un ou de deux côtés appelés bases.

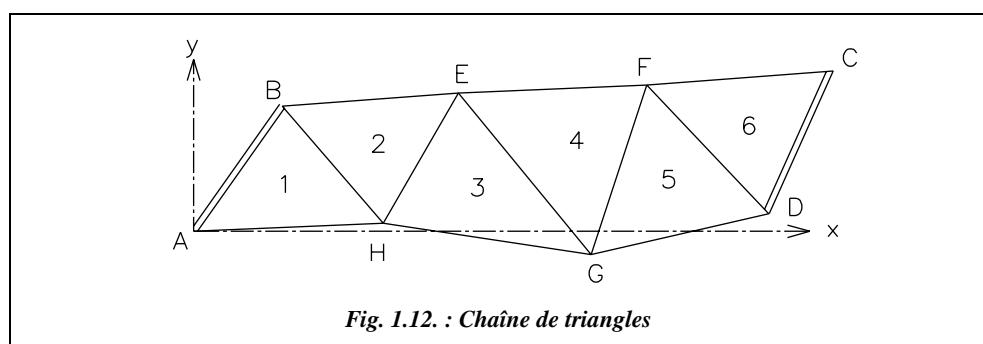
La « fermeture de la somme des angles des triangles » et « l'accord des bases » sont soumis à des tolérances indiquées sur l'arrêté interministériel de 1980.

Examinons quatre cas classiques de triangulation, à savoir :

- une chaîne de triangles accolés ;
- un polygone à point central ;
- un quadrilatère ;
- la mesure et l'orientation d'une base.

#### 1.3.3.1 *Chaîne de triangles*

Deux bases sont nécessaires (fig. 1.12.) s'il y a plus de cinq triangles, ce qui permet « l'accord des bases », soumis à tolérance. Les angles de tous les triangles sont observés et la fermeture de chaque triangle est soumise à tolérance.



Ces chaînes sont parfaitement adaptées pour des travaux en longueur (réseaux de communication).

### 1.3.3.2 **Polygone à point central**

Si le polygone est complet, n'importe quel côté peut servir de base, (par exemple le côté OA, fig. 1.13.). Les angles des triangles sont observés et la fermeture soumise à tolérance.

Si le point central n'est pas stationnable, un clocher par exemple, les angles en ce point sont dit conclus c'est-à-dire calculés par différence à 200 gon de la somme des deux angles mesurés dans chaque triangle.

Si le polygone est incomplet (fig. 1.13. à droite), il faut mesurer deux bases et l'angle qu'elles forment au point central. Ces figures sont mieux adaptées à un lever « en surface ».

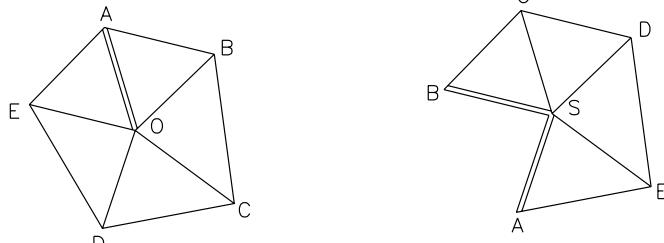


Fig. 1.13. : Polygones

### 1.3.3.3 **Quadrilatère à deux diagonales**

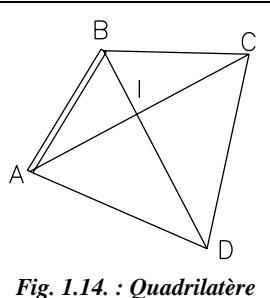


Fig. 1.14. : Quadrilatère

Il est assimilé à un polygone à point central complet dont les angles en I sont conclus.

La base AB est mesurée ; en chaque sommet A, B, C, D, les deux angles que forment respectivement la diagonale avec les deux côtés du quadrilatère sont observés. Huit angles sont donc mesurés.

### 1.3.3.4 **Mesure et orientation d'une base**

Le côté AB choisi pour base est mesuré directement à l'aide d'un distancemètre au minimum par deux mesures indépendantes, à intervalle de temps de six heures ; l'écart entre les deux valeurs doit être inférieur à la tolérance, égale à :

$$T_{\text{cm}} = 3 + L_{\text{km}}.$$

Si la portée du distancemètre est insuffisante, il faut mesurer une base CD plus courte formant, avec le côté cherché AB, les diagonales d'un quadrilatère dont les angles sont déterminés avec précision (fig. 1.15-a.).

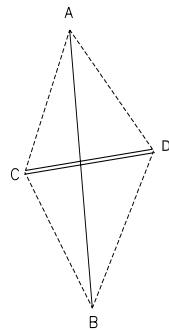


Fig. 1.15-a. : Base

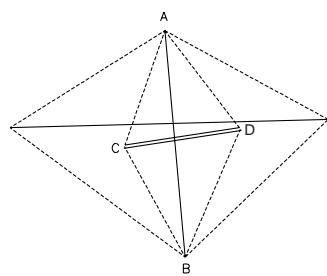


Fig. 1.15-b. : Base amplifiée

Si nécessaire une seconde amplification peut être effectuée (fig. 1.15-b.). De simples résolutions de triangles fournissent alors le côté cherché.

L'orientation d'une base (nécessaire dans le cas d'une triangulation locale) est réalisée en stationnant l'extrémité de la base avec un théodolite : on détermine son azimut par une visée astronomique sur le soleil ou de préférence sur la polaire.

### 1.3.4 Méthodes de calcul

Les résultats devant être obligatoirement compatibles avec les tolérances, des méthodes de calcul s'imposent en fonction de la précision du canevas.

#### Remarque

Les calculs de détermination des coordonnées de points observés par GPS sont détaillés au chapitre 7 du tome 1.

#### 1.3.4.1 *En canevas d'ensemble de précision*

Tous les points sont calculés en « bloc » et compensés par la méthode des moindres carrés à l'aide de logiciels : le calcul matriciel fait intervenir l'ensemble des mesures.

Lorsque le réseau géodésique n'est pas assez précis, on fait cohabiter deux systèmes de coordonnées, à savoir :

- **un système indépendant** qui, ramené en système Lambert moyen, garde sa précision ;
- **un système adapté** : on « adapte » le canevas existant au canevas géodésique national. La méthode la plus employée est la transformation de Helmert (voir § 10.3.), le nombre de points géodésiques devant être supérieur à deux.

#### 1.3.4.2 *En canevas d'ensemble ordinaire*

Le canevas ordinaire est caractérisé par sa possibilité de densification par points isolés ou point par point ; le calcul point par point est un calcul enchaîné c'est-à-dire que les coordonnées d'un point ne pourront être calculées que si les observations sont effectuées sur ou depuis des points connus : ainsi le premier ne peut s'appuyer que sur des points anciens (points géodésiques par exemple) ; ce premier point devient donc un point ancien pour les suivants et ainsi de suite.

Rien n'empêche de calculer plusieurs points isolés en bloc ; mais si l'on considère le point pris séparément, ses coordonnées sont déterminées par la méthode graphique ou méthode de Hatt (étudiée en détail dans la suite de ce chapitre).

#### Remarque

Les moyens informatiques actuels permettent le calcul en bloc et la compensation par la méthode des moindres carrés ; le calcul tient compte de toutes les observations simultanément donc l'opérateur ne se préoccupe pas d'un ordre quelconque de calcul. Il en découle que le mode de calcul envisagé influe au préalable sur la mappe des observations (voir § 1.3.5.1.).

#### 1.3.4.3 *Cheminement à longs côtés*

Les méthodes de calcul sont exposées au paragraphe 1 du chapitre 2.

### 1.3.5 **Méthodes opératoires pour l'établissement du canevas**

Les méthodes opératoires pour l'établissement d'un canevas observé par GPS sont détaillées au chapitre 7 du tome 1.

#### 1.3.5.1 *Techniques préparatoires*

##### ◆ *Étude d'un projet à l'aide de cartes et de photographies aériennes*

Pour l'exécution de la mission qui lui est confiée, le géomètre dispose des éléments suivants :

- une copie de l'arrêté d'ouverture des travaux ;
- une carte au 1/50 000 ;
- une carte au 1/25 000 ;
- une liste des coordonnées des points géodésiques et des sommets des triangulations cadastrales susceptibles d'être utilisés comme points d'appui, accompagnée de leur fiche signalétique.

Sur cartes, après avoir défini le périmètre des opérations, le géomètre trace les lignes caractéristiques du terrain : lignes de crêtes en rouge, lignes de talwegs en bleu ; puis il

choisit sur la carte l'emplacement des points du CEO (canevas d'ensemble ordinaire) en respectant la densité imposée :

- le CEO étant plutôt adapté aux zones rurales, la densité est généralement d'environ un point par  $\text{km}^2$  ou un point pour 100 ha ;
- le CEP étant plutôt adapté aux zones urbaines ou périurbaines, il est préconisé deux à quatre points par  $\text{km}^2$  en zone urbaine et environ deux points par  $\text{km}^2$  en zone périurbaine.

Le choix est effectué aussi en fonction des différentes techniques possibles que sont les procédés de triangulation et de trilateration, l'insertion et les cheminements à longs côtés : dans une zone de plaine, on adopte plutôt les cheminements à longs côtés pour déterminer les points nodaux qui sont les points du canevas ; en revanche, dans une zone plus vallonnée, la triangulation et la trilateration sont des méthodes plus efficaces.

Puis le géomètre établit la mappe des observations :

- en traçant les cheminements dans le premier cas ;
- en schématisant les visées avec leur symbole dans le second cas.

Dans le second cas, il faut songer aux calculs futurs. En effet, s'il choisit d'effectuer un calcul point par point, il faut choisir un premier point appuyé uniquement sur des repères géodésiques ; le deuxième peut s'appuyer sur le premier et d'autres points géodésiques, etc. : on dit que le calcul est enchaîné. L'ordre est très important et les visées doivent être suffisantes et correctement réparties pour une détermination satisfaisante des points.

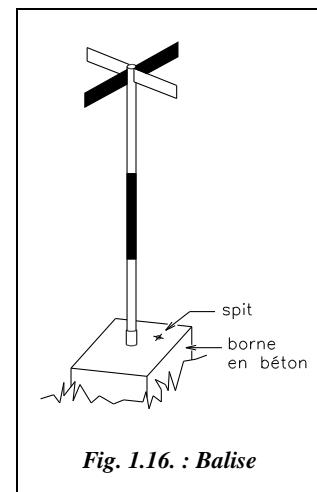
En revanche, si le géomètre prévoit un calcul en bloc, l'ordre n'a pas d'importance.

#### ◆ **Reconnaissance et établissement du projet**

La reconnaissance sur le terrain a pour objet de fixer l'emplacement des sommets et de choisir les visées qu'il y a lieu d'effectuer pour obtenir une détermination satisfaisante de ces sommets ; l'implantation des points se traduit par l'établissement du projet.

L'opérateur vérifie l'existence des points anciens et il s'assure qu'ils n'ont pas bougé.

Les points sont matérialisés de façon durable à l'aide de bornes gravées sur leur sommet, par exemple. Ils peuvent être également des massifs en béton dans lesquels est prévue une réservation permettant la mise en place d'une balise (fig. 1.16.) ; ces points peuvent ainsi être stationnés et relevés. La balise est un tube métallique ou en PVC d'une hauteur de 1,50 à 2,00 m environ (fig. 1.16.).



Ils peuvent être aussi des repères fixés sur des terrasses de bâtiment, des antennes, des clochers, des sommets de pylônes, etc.

Ils sont numérotés et repérés par trois ou quatre repères auxiliaires à l'aide de croquis cotés permettant le rétablissement des points détruits sans observations nouvelles.

#### ◆ *Numérotation des points du canevas*

Chaque géomètre a sa propre façon de numérotter les stations de canevas ; le cahier des charges peut néanmoins imposer la numérotation.

Pour un chantier donné, aucun numéro identique ne doit apparaître pour plusieurs sommets. Ils doivent tous être distincts selon la nature du canevas à laquelle ils appartiennent ; le tableau ci-après donne un exemple de numérotation :

	<b>Précision</b>	<b>Ordinaire</b>	<b>N° des cheminements</b>
<b>Triangulation et Trilateration (de 5 en 5)</b>	1 à 495	5000 à 5495	
<b>Excentrements, rabattements, etc.</b>	une unité de plus que le point connu, 256 par exemple	idem  5316 par exemple	
<b>Cheminements principaux*</b>	500 à 999	5500 à 5999	1 à 199
<b>Points nodiaux principaux*</b>	NP 1000 à NP 1099	NP 6000 à NP 6099	
<b>Cheminements secondaires*</b>	1100 à 1599	6100 à 6599	200 à 399
<b>Points nodiaux secondaires*</b>	NS 1600 à NS 1699	NS 6600 à NS 6699	

\* Voir les définitions au paragraphe 1.4.1.1.

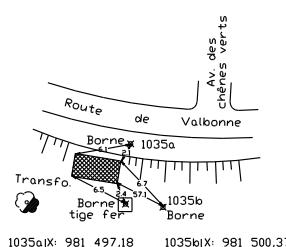
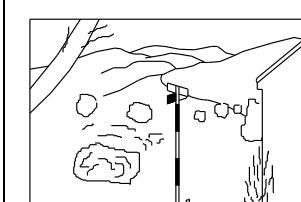
#### ◆ *Fiches signalétiques des sommets*

L'opérateur établit pour tous les sommets une fiche signalétique, qui comprend :

- d'une part des renseignements concernant la nature du point, le propriétaire de l'îlot de propriété où est implantée la borne et les références cadastrales ;
- les coordonnées du point et la zone Lambert de rattachement ;
- d'autre part, trois croquis :
  - le croquis de situation, qui a pour objet de permettre à toute personne n'ayant pas participé aux travaux de retrouver rapidement l'emplacement approximatif de la borne à partir d'un détail caractéristique du terrain ou de la carte : donnez au moins trois cotes par rapport à des points durs facilement repérables ;
  - le croquis visuel est une vue perspective schématique du point ;
  - le croquis de repérage, qui permet de retrouver le repère souterrain d'une borne disparue et de la réimplanter à sa position exacte. Ce croquis n'est établi que s'il existe dans un rayon d'une cinquantaine de mètres des détails fixes et durables. Les

cotes figurant sur ce croquis doivent être relevées avec précision et pouvoir être appliquées sur le terrain malgré la disparition éventuelle de la borne.

La fiche signalétique suivante est issue de la triangulation complémentaire de Biot (06).

Département des Alpes-Maritimes Mairie de BIOT (Service de l'urbanisme)		<b>FICHE SIGNALÉTIQUE</b> Établie en juillet 1990
<b>Références cadastrales</b>	<b>Visées de référence</b>	<b>Caractéristiques du point</b>
Commune : BIOT Lieu-dit : Pin Montard Section : AA Numéro : 2 Propriétaire : Commune de BIOT	Matricole Gisement (gon) Centre Hélio Marin (ou IGN 35a).....221,5500 1034.....232,0822	N° : 1035 Nature : borne en béton E = 981 495,39 m N = 159 086,11 m H = 119,6 (sur béton) + 26 cm sur la tige Réseau de rattachement : – Planimétrie : Lambert III – Altimétrie : NGF
<b>Croquis de repérage</b>	<b>Plan de situation (carte IGN)</b>	<b>Visuel (croquis ou photo)</b>
		

### 1.3.5.2 Mesures sur le terrain

Il convient de choisir le matériel et la méthodologie adéquats pour respecter les tolérances légales imposées. En canevas ordinaire, on préconise les recommandations du tableau suivant :

Triangulation	Trilateration	Cheminements à longs cotés
<b>Types d'appareils</b>		
La tolérance angulaire $\epsilon$ sur une direction a été déterminée à partir de travaux réel ; elle vaut 1,5 mgon pour une paire de séquences soit un écart type de $15 \times \sqrt{2}/(2,66) = 8$ dmgon pour une visée. Un théodolite au dmgon (type T2) est nécessaire.	Théodolites au dmgon et distance-mètre. (Type T 2002 + DI 1000).  Tachéomètre électronique au dmgon (Type TC 2002).	Théodolites au dmgon et distancemètre.  Tachéomètre électronique au dmgon (Type TC 2002).
<b>Mesures sur le terrain</b>		
Angles horizontaux.	Angles zénithaux. Distances inclinées.	Angles horizontaux. Angles zénithaux. Distances inclinées.
<b>Modes opératoires</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>4 visées d'intersection ou 5 de relèvement ou 2 d'intersection + 3 de relèvement (recouplement) ;</li> <li>visées bien réparties de 3 km de moyenne ;</li> <li>2 paires de séquences (0-100,50-150) ;</li> <li>1 pointé.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>au minimum 4 visées bien réparties ;</li> <li>visée moyenne de 3 km si possible ;</li> <li>mesurage indépendant de chaque distance<sup>(1)</sup>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>seuls les points nodaux sont des points du canevas d'ensemble ;</li> <li>côtés supérieurs à 500 m en moyenne ;</li> <li>aucun côté ne doit être inférieur à 200 m</li> <li>centrage forcé<sup>(2)</sup> ;</li> <li>2 paires de séquences ;</li> <li>1 pointé.</li> </ul>
<b>Contrôle sur le terrain</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>fermeture de chaque séquence :</li> </ul> $T_{\text{mgon}} = 2,8 \text{ mgon}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>écart des lectures :</li> </ul> $T_{\text{mgon}} = 1,3 \text{ mgon}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>écart sur référence :</li> </ul> $T_{\text{mgon}} = 0,8 \text{ mgon}$	tolérance de mesurage sur chaque distance : $T_{\text{cm}} = (3 + L_{\text{km}})$	Comme la triangulation et la trilateration ; si le nombre de côtés est supérieur à 6, un contrôle de l'orientation sur points connus éloignés dont $T(x) = 20 \text{ cm}$ est nécessaire.

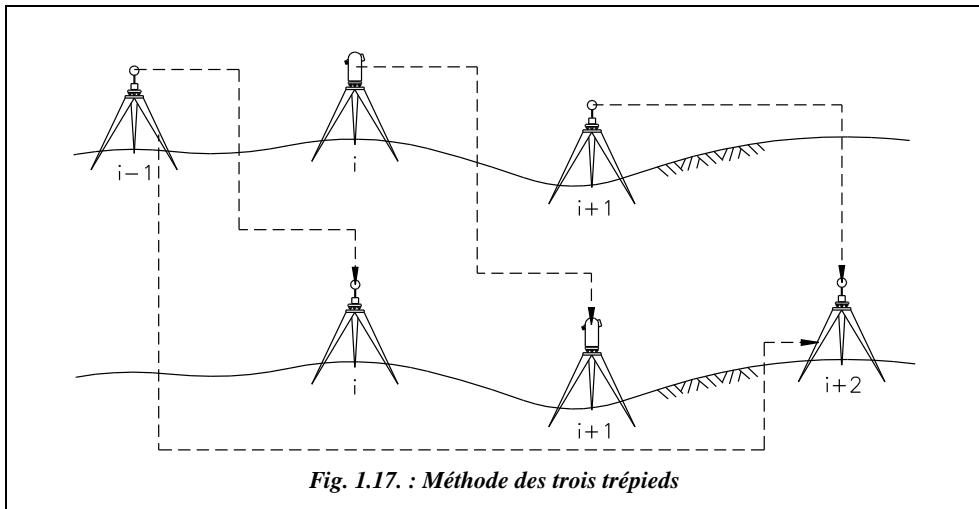
<sup>(1)</sup> Mesurages indépendants : remise en station de l'appareil entre deux mesures de la distance.

<sup>(2)</sup> Le centrage forcé est utilisé dans la méthode dite « des trois trépieds » (fig. 1.17.).

**La méthode des trois trépieds** citée dans le tableau précédent, est mise en œuvre comme suit :

- le théodolite est en station  $i$  (fig. 1.17.), les voyants aux sommets  $i-1$  et  $i+1$  sont placés dans des **embases à centrage forcé** ; on mesure l'angle au sommet  $i$  ;
- le voyant  $i-1$  vient dans l'embase du théodolite en  $i$ , le trépied et son embase en  $i-1$  sont mis en station au sommet  $i+2$  et le voyant  $i+1$  y est placé ;
- le théodolite va dans l'embase  $i+1$ , on mesure l'angle au sommet  $i+1$ , etc.

Les erreurs de centrage sont ainsi réduites au minimum.

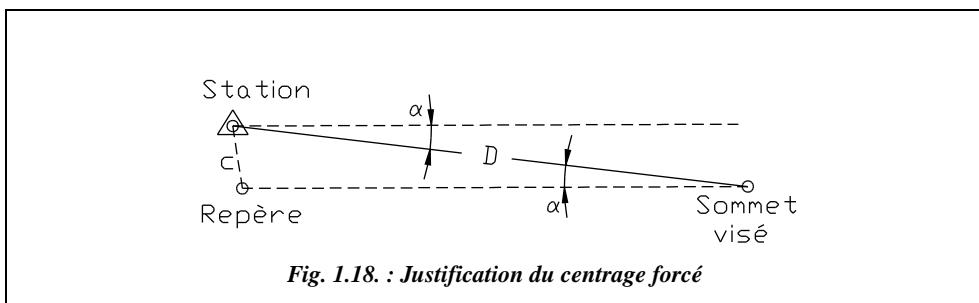


### L'utilisation du centrage forcé se justifie ainsi :

L'arrêté ministériel du 20 Janvier 1980 impose une tolérance sur un angle du cheminement de 1,4 mgon, soit 1 mgon sur une direction aussi bien en canevas ordinaire que de précision ; l'écart type correspondant est 1 mgon / 2,66  $\approx$  0,4 mgon. Pour une visée de l'ordre de 500 m, la précision de centrage  $c$  (fig. 1.18.) doit être de :  $c = 1,57 \times 0,500 \times 0,4 \approx 3$  mm (en utilisant la sensibilité, voir § 5.2.5.). Le centrage doit être réalisé avec une précision de  $3 / \sqrt{2}$  mm, soit 2 mm environ en considérant que les écarts de centrage de l'appareil  $c_1$  et du réflecteur  $c_2$  sont égaux à  $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Cette précision est difficile à obtenir sans centrage forcé.



Embase Wild : Centrage forcé



**En canevas de précision, il est préconisé :**

Triangulation	Trilateration	Cheminements à longs cotés.
<b>Types d'appareils</b>		
<p>La tolérance angulaire <math>\epsilon</math> sur une direction a été déterminée à partir de travaux réel et vaut 1,16 mgon pour une paire de séquences, soit un écart type de</p> $11,6 \times \sqrt{2}/(2,66) = 6 \text{ dmgon}$ <p><b>pour une visée.</b></p> <p>Un théodolite au dmgon (type T2) est nécessaire.</p>	<p>Théodolites au dmgon et distancemètre. (Type T 2002 + DI 1000)</p> <p>Tachéomètre électronique au dmgon (type TC 2002).</p>	<p>Théodolites au dmgon et distancemètre.</p> <p>Tachéomètre électronique au dmgon (type TC 2002).</p>
<b>Mesures sur le terrain</b>		
Angles horizontaux	Angles zénithaux. Distances inclinées.	Angles horizontaux. Angles zénithaux. Distances inclinées.
<b>Modes opératoires</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>4 visées d'intersection ou 5 de relèvement ou 2 d'intersection + 3 de relèvement (recouplement) ;</li> <li>visées bien réparties de 1,5 km de moyenne ;</li> <li>4 paires de séquences : (0-100, 50-150, 25-125, 75-175) ;</li> <li>2 pointés.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>4 visées au minimum bien réparties ;</li> <li>visée moyenne de 3 km si possible ;</li> <li>double mesurage indépendant de chaque distance.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Seuls les points nodaux sont des points du canevas d'ensemble ;</li> <li>6 côtés au maximum et supérieurs à 500 m en moyenne ;</li> <li>aucun côté ne doit être inférieur à 200 m ;</li> <li>centrage forcé ;</li> <li>4 paires de séquences.</li> <li>2 pointés.</li> </ul>
<b>Contrôle sur le terrain</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>fermeture de chaque séquence : <math>T_{\text{mgon}} = 1,5 \text{ mgon}</math></li> <li>écart des lectures : <math>T_{\text{mgon}} = 1,2 \text{ mgon}</math></li> <li>écart sur référence : <math>T_{\text{mgon}} = 0,7 \text{ mgon}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>tolérance de mesurage sur chaque distance : <math>T_{\text{cm}} = (3 + L_{\text{km}})</math>.</li> </ul>	Comme la triangulation et la trilateration.

### Tenue des carnets d'observations

La saisie des données est la phase la plus importante ; les carnets d'observation doivent être facilement exploitables.

À cet effet, ils doivent présenter :

- la date et l'heure,
- le nom de l'opérateur,
- le numéro du carnet,

- le type et le numéro de l'appareil,
- la visibilité,
- la température et la pression,
- la hauteur de l'axe des tourbillons dans certains cas.

Et l'opérateur doit faire apparaître :

- la fermeture angulaire de chaque séquence,
- les écarts des lectures,
- les écarts sur la référence,
- l'écart entre deux mesurages indépendants des distances.

## 1.4 Canevas polygonal

Le canevas polygonal est une suite de cheminements en général encadrés appuyés sur le canevas d'ensemble ; ils constituent un trait d'union entre le canevas d'ensemble et le lever de détails. Les calculs sont détaillés dans le chapitre 2.

Comme en canevas d'ensemble, on distingue :

- les canevas polygonaux ordinaires plutôt adaptés aux zones rurales dont la densité des points à déterminer est environ d'une trentaine au  $\text{km}^2$  dans les conditions les plus défavorables ;
- les canevas polygonaux de précision plutôt adaptés aux besoins des villes et dont la densité des points est environ d'une quarantaine au  $\text{km}^2$  en zone périurbaine, et est d'une soixantaine au  $\text{km}^2$  en zone urbaine, dans les conditions les plus défavorables<sup>1</sup>.

### 1.4.1 Méthodes opératoires d'établissement du canevas polygonal

#### 1.4.1.1 Établissement d'un avant-projet

Un avant-projet est réalisé sur carte ou sur plan ; le canevas est constitué de cheminements encadrés et de points nodaux. On a l'habitude :

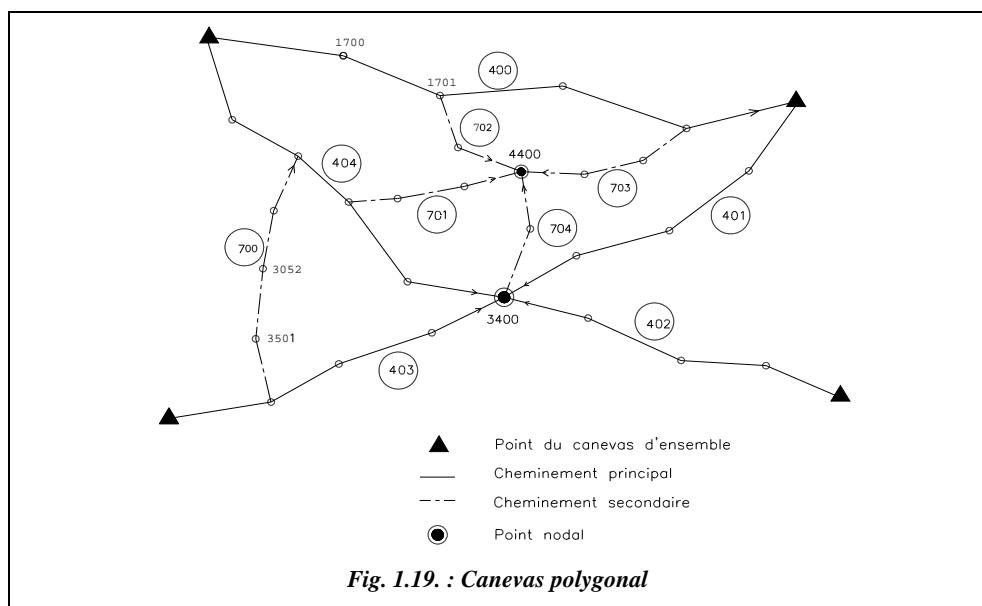
- d'éviter les antennes ;
- de les rendre le plus tendus possible, c'est-à-dire se rapprochant de la droite qui joint l'origine à l'extrémité et qui représente la direction générale du cheminement ; toutefois un cheminement infléchi présente moins d'inconvénients qu'un cheminement à côtés courts ;

<sup>1</sup> Les instruments modernes (tachéomètres électroniques et *talkie-walkies*) favorisent la limitation des stations par l'augmentation des portées, donc une diminution de la densité préconisée ci-dessus.

- d'avoir des côtés homogènes, les distances des côtés devant être sensiblement les mêmes ; limiter le nombre de côtés à une dizaine environ.

**Remarque**

Du fait qu'on vérifie la fermeture planimétrique  $fp = \sqrt{fx^2 + fy^2} = \sqrt{fl^2 + fd^2}$  et non chaque composante (longitudinale et transversale), et du fait de la généralisation des calculs en blocs, le respect du caractère tendu du cheminement n'est plus impératif. Dans ces conditions, un cheminement parfaitement tendu n'a aucune raison d'être plus précis qu'un cheminement infléchi.



Les cheminements doivent être proches des détails à lever ; les sommets successifs sont implantés de manière à être visibles l'un de l'autre et permettre d'apercevoir le maximum de points de détails ; il faut donc éviter de placer un sommet près d'un obstacle créant un angle mort.

Pour respecter au mieux les caractéristiques du terrain (emplacement des points de canevas d'ensemble, voies de communications, etc.), et pour fixer l'ordre chronologique des calculs, il est préférable que le topomètre distingue (fig. 1.19.) :

- **les cheminements principaux** qui relient les points du canevas d'ensemble ou encore un de ces points avec un point nodal principal ;
- **les cheminements secondaires**, c'est-à-dire tous les autres, qui s'appuient sur les premiers et sont donc calculés dans une seconde phase ;
- les points noraux principaux ou secondaires.

La distinction entre cheminements principaux et secondaires permet de définir clairement l'ordre chronologique des calculs des cheminements mais il est sans objet au regard des tolérances puisque tous les points doivent avoir une même précision.

Sur le projet de canevas, doivent figurer les cheminements avec leur sens de calcul et les points nœuds ; les cheminements principaux sont tracés en rouge, les secondaires en bleu.

#### 1.4.1.2 *Numérotation des points du canevas*

<b>Exemple de numérotation des points d'un canevas</b>	<b>Précision</b>	<b>Ordinaire</b>	<b>N° des cheminements</b>
<b>Cheminements principaux</b>	1700 à 3399	6700 à 8399	400 à 699
<b>Points nœuds principaux</b>	3400 à 3499	8400 à 8499	
<b>Cheminements secondaires</b>	3500 à 4399	8500 à 9399	700 à 899
<b>Points nœuds secondaires</b>	4400 à 4499	9400 à 9499	
<b>Antennes (points lancés)</b>	4500 à 4599	9500 à 9599	900 à 999
<b>Points de détails (lever)</b>	à partir de 10000		

Lorsque les calculs de compensation sont effectués en bloc par les moindres carrés, la hiérarchie des observations et des calculs exposée ci-dessus n'a plus lieu d'être.

#### 1.4.1.3 *Repérage et matérialisation*

Un croquis de repérage doit être effectué de sorte que le point puisse être réimplanté sans ambiguïté en cas de disparition. Le sommet doit être coté par rapport à trois éléments stables, précis et durables : angle de bâtiment, lampadaire ou pylône, angle d'une plaque d'eau, EDF, etc. Il faut éviter les cotes sur les routes, et les cotes supérieures à la longueur du ruban, bien que celles-ci puissent être prises au distancemètre lors des observations.

Le croquis doit comporter en plus :

- la nature du point ;
- sa situation sans équivoque (lieu-dit, nom de la rue et numéro de l'habitation la plus proche par exemple) ;
- les directions des sommets voisins.

Toute une gamme de matériel est à la disposition du géomètre ; suivant le type de sol, on peut citer :

- des piquets en bois ou en acier (40 cm de long environ) enfouis à refus ;
- des bornes à ancrage ;
- une borne en béton coulé en place (cube de 40 cm d'arête environ) ; des tirefonds, spits et rondelles, etc.

## 1.4.2 Établissement d'un avant-projet de canevas polygonal

Pour l'établissement d'un avant-projet de canevas polygonal, sont préconisés :

Canevas ordinaire	Canevas de précision
<b>Types d'appareils</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• théodolite d'écart-type 1 mgon<sup>(1)</sup> ;</li> <li>• ruban possible ;</li> <li>• théodolite au mgon et distancemètre ou tachéomètre électronique.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• théodolite d'écart-type 0,5 mgon et distancemètre<sup>(1)</sup> ;</li> <li>• ou tachéomètre électronique au dmgon. (Type TC 2002)</li> </ul>
<b>Mesures sur le terrain</b>	
Angles horizontaux, angles zénithaux et distances inclinées.	Angles horizontaux, angles zénithaux et distances inclinées.
<b>Modes opératoires</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• centrage ordinaire<sup>(2)</sup> ;</li> <li>• 1 paire de séquences : 0,100 ;</li> <li>• 1 pointé ;</li> <li>• 1 mesure directe et 1 mesure inverse des distances.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• centrage forcé ;</li> <li>• 1 ou 2 paires de séquences ;</li> <li>• 2 pointés ;</li> <li>• 2 mesures directes et 2 mesures inverses des distances.</li> </ul>
<b>Contrôle sur le terrain</b>	
Mise en évidence de l'erreur d'index.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• mise en évidence de l'erreur d'index ;</li> <li>• en présence de 2 paires, les vérifications de la fermeture des séquences, de l'écart des lectures et de l'écart sur la référence sont nécessaires ;</li> <li>• si le nombre de côtés du cheminement est supérieur à 6, le contrôle de l'orientation sur des points éloignés dont <math>T(x) = 4</math> cm est souhaitable.</li> </ul>

<sup>(1)</sup> Les tolérances légales sur les angles du cheminement sont de 6 mgon et 10 mgon respectivement en canevas polygonal de précision et ordinaire soit des écarts types sur une direction de  $6 / 2,66 / \sqrt{2} \approx 1,6$  mgon et  $10 / 2,66 / \sqrt{2} \approx 2,7$  mgon.

<sup>(2)</sup> En canevas ordinaire, le centrage forcé est recommandé pour des côtés du cheminement inférieurs à 80 m environ. En effet, si on suppose des écarts de centrage ordinaire de l'appareil et du réflecteur de 3 mm (ce qui est déjà correct), on obtient une imprécision angulaire sur la direction de  $\sqrt{0,3^2 + 0,3^2} / (1,57 \times 0,08) \approx 3,4$  mgon supérieure à 2,7 mgon (voir fig. 1.18.).

## 1.5 Charpente planimétrique

La charpente planimétrique est un canevas particulier établi essentiellement en zone urbaine et périurbaine dont les points sont implantés sur des façades permettant aux utilisateurs d'y appuyer, à l'aide d'opérations topographiques simples, tous les levers ponctuels qu'ils ont à effectuer. Ils sont situés sur les façades si possible à une hauteur constante et permettant d'effectuer pratiquement à l'horizontale des visées de nivellation. La densité est de l'ordre de 40 à 70 points par kilomètre de corps de rue.

Les points sont matérialisés par des plaques de repérage, par des clous plantés dans les façades, par des gravures ou simplement identifiés par la fiche signalétique.

Ils sont déterminés par rayonnement (cas le plus fréquent) ou intersection (angles et distances) en une paire de séquence avec deux pointés sur chaque visée et un double mesurage indépendant des distances.

Les coordonnées sont obtenues par calcul simple selon le mode de mesure (rayonnement ou intersection) à partir du canevas de base.

## 1.6 Contenu d'un dossier de canevas

Les éléments composant le dossier de canevas d'ensemble et polygonal sont listés ci-après :

- un schéma définitif du canevas dressé sur fond de plan ;
- un tableau récapitulatif des coordonnées des points nouveaux ;
- un croquis de repérage ;
- un carnet d'observation ;
- une liste après traitement des saisies ;
- un état des calculs des coordonnées de chaque point.

# 2 ÉTABLISSEMENT DES CANEVAS ALTIMÉTRIQUES

Le canevas altimétrique est un ensemble de repères déterminés en altitudes normales par niveling direct ou indirect. Si la densité des repères du réseau national IGN 69 est insuffisante, de nouveaux points sont créés.

En effet, reprenons l'exemple du quart sud-est de la feuille au 1/50 000 de Grasse (voir tome 1, chap. 2, § 6.5., fig. 2.52.). On remarque qu'il n'existe des points IGN 69 que le long de la ligne de chemin de fer Marseille - Vintimille, points du premier ordre I'.M le long de la D.35 Antibes – Grasse, points du troisième ordre I'.c.a<sub>3</sub>s<sub>3</sub> tous les 400 à 800 m environ, et quelques points du quatrième ordre Ma.k<sub>3</sub> dans le cœur d'Antibes. On remarque que de nouvelles zones très urbanisées, en particulier autour de Vallauris, de Sophia-Antipolis sur les communes de Valbonne et Biot, ne possèdent aucun repère. On est donc amené dans de telles zones à densifier le réseau altimétrique national IGN 69.

Le nombre d'opérations enchaînées étant considérable, il est indispensable d'opérer de manière à éviter une trop grande accumulation des erreurs. Il faut donc, comme en planimétrie, décomposer le canevas altimétrique en différents ordres de précisions dégressives.

## 2.1 Principe de densification

Nous exposons ci-après les méthodes et les techniques de réalisation des canevas utilisées par les Services techniques des grandes villes de France.

Il existe trois sortes de canevas décrits ci-après.

### 2.1.1 Canevas altimétrique d'ensemble

Les repères sont définis par l’Institut Géographique National et appartiennent au réseau IGN 69. Ils sont en général implantés sur des édifices publics : mairies, gares, églises, sur des ponts, rarement sur des immeubles privés.

Dans le cas d'une densité insuffisante, c'est-à-dire inférieure à quatre points au km<sup>2</sup>, de nouveaux points sont créés pour atteindre une densité de quatre à huit points au km<sup>2</sup>.

Les points sont établis par un niveling de haute précision avec des niveaux de très haute précision comme le Wild N3.

### 2.1.2 Canevas altimétrique

Il densifie le canevas précédent par des repères scellés tous les 200 à 500 m environ suivant les zones. Les points sont établis par un niveling de haute précision avec des niveaux de précision comme le NA2 avec micromètre.

### 2.1.3 Charpente altimétrique

Il s’agit en général des points de la charpente planimétrique dont on a déterminé l’altitude à partir des repères du canevas altimétrique ; ces points ont une densité de 40 à 70 points par km de voie. Ils sont établis par un niveling direct ou indirect.

## 2.2 Densité de points préconisée

Le tableau suivant donne des valeurs indicatives de densité de points à respecter.

↓ Zone	Canevas altimétrique d'ensemble	Canevas altimétrique	Charpente altimétrique
	points par km <sup>2</sup>	points par km de voie	points par km de voie
urbaine	4 à 8	5 (tous les 200 m)	60 à 70 (tous les 15 m)
périurbaine	4	3 (tous les 350 m)	40 à 50 (tous les 20 à 25 m)
rurale	2	2 (tous les 500 m)	15 à 20 (tous les 50 à 60 m)

## 2.3 Méthodes opératoires pour l'établissement du canevas

### 2.3.1 Techniques préparatoires

#### 2.3.1.1 Documentation à rassembler

Les documents à rassembler sont les suivants :

- un tableau des mailles de nivellation ;
- un fond de carte (quart de feuille en général) et un calque de repérage ;
- un répertoire des points de nivellation ;

#### 2.3.1.2 Choix de l'implantation des points

Ce choix consiste à définir dans un avant-projet l'emplacement des points en respectant les densités et les conditions topographiques.

Les repères de nivellation sont généralement situés le long des voies de communication (lignes de chemin de fer, routes, chemins, le long des rivières et canaux éventuellement etc.) puisque, leur altitude étant déterminée par nivellation direct de haute précision, il est nécessaire que les pentes des cheminements soient relativement faibles.

#### 2.3.1.3 Reconnaissance sur le terrain

La reconnaissance sur le terrain permet de :

- vérifier l'existence des points anciens connus et s'assurer qu'ils n'ont pas bougé de façon importante ;
- vérifier la faisabilité des observations à effectuer ;
- vérifier et la stabilité du terrain sur lequel les points seront implantés.

#### 2.3.1.4 Matérialisation

La photographie ci-contre est celle d'un repère du cadastre scellé dans un mur.



#### 2.3.1.5 Repérage et identification

Le repérage et l'identification permettent d'établir des fiches signalétiques qui doivent comprendre :

- le nom de la commune ;
- le numéro du point ;
- la nature du point ;
- la date d'établissement ;
- son altitude (inscrite après calcul) ;

- sa situation topographique ;
- ses références cadastrales ;
- son adresse postale ;
- un croquis visuel de sa matérialisation (une photographie) ;
- un croquis de repérage ;
- sa servitude.

### 2.3.2 Mesures sur le terrain

#### 2.3.2.1 Carnets des observations effectuées sur le terrain

La saisie peut être réalisée manuellement sur des carnets d'observation, mais peut aussi se faire par l'intermédiaire de carnets électroniques.

Les carnets doivent être facilement exploitables et doivent présenter :

- la date et l'heure ;
- le nom de l'opérateur ;
- le numéro du carnet ;
- le type et le numéro de l'appareil ;
- les observations proprement dites.

#### 2.3.2.2 Différentes techniques

Le tableau suivant détaille les différentes techniques à appliquer en canevas altimétrique.

	<b>Canevas altimétrique d'ensemble</b>	<b>Canevas altimétrique</b>
<b>Objectifs</b>	Densification du réseau IGN 69.	Densification du CAE ; rattachement au CAE.
<b>Mesures</b>	Dénivelées (niveling direct).	Dénivelées (niveling direct).
<b>Type d'appareils</b>	Niveaux de haute précision (ex : N3) 2 mires invar.	Niveaux de précision (ex : NA2 et micromètre). 2 mires invar.
<b>Modes opératoires</b>	Cheminement double par la méthode de Choleski adaptée.	Cheminement double par la méthode de Choleski adaptée.
<b>Conditions sur les opérations</b>	Distance appareil-mires $\leq 35$ m. Égalité des portées à $\pm 1$ m.	Distance appareil-mires $\leq 50$ m. Égalité des portées à $\pm 1$ m.
<b>Contrôles sur terrain</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• vérifier que la lecture sur le fil nivelleur est égale à la moyenne des lectures sur les fils stadiométriques ;</li> <li>• vérifier l'écart d'échelle ;</li> <li>• effectuer le contrôle de marche.</li> </ul>	Mêmes contrôles qu'en canevas d'ensemble.

Le tableau suivant détaille les différentes techniques à appliquer pour la création de la charpente altimétrique.

	<b>Charpente altimétrique</b>	
	<b>Nivellement direct ordinaire</b>	<b>Nivellement indirect trigonométrique de précision</b>
<b>Objectif</b>	Créations de nouveaux points rattachés au canevas altimétrique.	Même objectif qu'en nivelllement direct.
<b>Mesures</b>	Dénivelées.	Angles zénithaux Distances inclinées
<b>Type d'appareils</b>	Niveaux de précision (ex : NA2). Mire ordinaire.	Théodolite au mgon + distancemètre Tachéomètre électronique au mgon
<b>Modes opératoires</b>	Nivellement direct ordinaire (utilisation de crapauds). 2 pointés sur chaque visée.	1 paire de séquences
<b>Conditions sur les opérations</b>	Distances appareil-mire $\leq 50$ m. Égalité des portées à $\pm 1$ m.	Distance appareil-réflecteur $\leq 200$ m. Réflecteur à trépied ou accroché au point visé.
<b>Contrôles sur le terrain</b>	Vérification de l'égalité entre la lecture sur fil nivelleur et la demi-somme des lectures sur les fils stadiométriques.	Constance de l'erreur de collimation verticale.

## 2.4 Méthodes de calcul

Le canevas peut être conçu afin de pouvoir être observé, calculé et compensé en suivant la hiérarchie conventionnelle (voir canevas polygonal au paragraphe 1.4.), à savoir :

- les cheminements principaux : encadrés ou à point nodal ;
- les cheminements secondaires : encadrés entre les points de cheminement principaux ou constitués de points noraux secondaires.

Les compensations peuvent être effectuées en bloc ; alors l'ordre des calculs et des observations n'a plus d'importance.

# 3 LES MÉTHODES GRAPHIQUES

La suite de ce chapitre détaille les méthodes de calcul qui permettent de déterminer les coordonnées planimétriques de points nouveaux par les différentes techniques de densification détaillées au paragraphe 1. On distingue deux approches de ces calculs.



**En canevas de précision**, le calcul fait appel à la **théorie des moindres carrés** dont le principe n'est pas développé dans cet ouvrage (seuls les résultats en seront utilisés). En revanche, pour chaque méthode, un tableau faisant appel à

ce type de calcul est fourni sur cédérom. Chaque tableau présente la résolution sur format A4 vertical et donne toutes les formules utilisées (voir les exemples de résolution dans les paragraphes suivants).

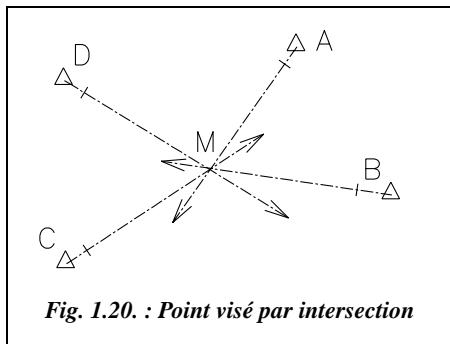


Fig. 1.20. : Point visé par intersection

bles erreurs de mesures, ne sont pas concourantes en un point. Tout l'intérêt des méthodes graphiques est de permettre la construction à grande échelle de cette zone d'intersection.

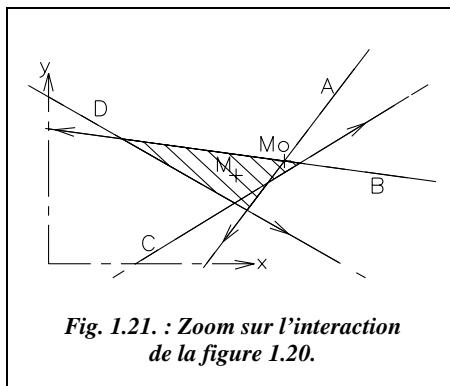


Fig. 1.21. : Zoom sur l'intersection de la figure 1.20.

**En canevas ordinaire**, on peut se contenter d'une **construction graphique** dont voici la justification : soit un point M, déterminé par intersection de visées issues de quatre points d'appui connus A, B, C et D (fig. 1.20.). Si ces visées se coupaient toutes en un même point, l'intersection serait directement le point cherché (comme on peut en avoir l'impression sur la figure 1.20.). En fait, si l'on effectue un « zoom » près de la zone d'intersection, on obtient la vue de la figure 1.21 puisque les visées, entachées d'inévitables erreurs de mesures, ne sont pas concourantes en un point. Tout l'intérêt des méthodes graphiques est de permettre la construction à grande échelle de cette zone d'intersection.

La nécessité d'une construction particulière apparaît si l'on se fixe un ordre de grandeur des distances représentées : pour des visées de l'ordre de 1,5 km, les points connus sont situés dans une zone délimitée par un cercle d'environ 3 km de diamètre. La zone d'intersection est rarement plus grande qu'un cercle d'environ 1 m de rayon. Si vous représentez l'ensemble sur format A0 ( $1188 \times 840 \text{ mm}^2$ ), un tracé à une échelle de l'ordre du 1/3 500 est nécessaire. La zone d'intersection devient alors un cercle de 0,6 mm de diamètre, donc inutilisable.

D'autant que l'on dessine les angles au rapporteur avec une précision d'au mieux 0,1 gon, ce qui donne une incertitude de 2,3 m (à 1,5 km) sur le terrain ; cette incertitude est supérieure à la taille de la figure à dessiner...

L'astuce proposée par cette méthode est de calculer les coordonnées d'un des points d'intersection (que l'on appelle point approché Mo ; sur la figure 1.21. c'est le point d'intersection des visées issues de A et de B) et de dessiner tous les autres points d'intersection en fonction de ce dernier en calculant la distance qui sépare chaque visée du point approché Mo. On peut alors dessiner à une grande échelle (par exemple 1/10 ou 1/5) la zone d'intersection (appelée **chapeau** : zone hachurée de la figure 1.21.) et y choisir le point définitif M. On détermine les coordonnées de M relativement au point Mo par des mesures sur le graphique, qui doit être orienté et tracé à une échelle conventionnelle.

### Remarque

Par la suite, le terme *zone d'indécision* est préféré au terme chapeau.

Pour les coordonnées planes (en projection), la notation *E, N* est préférable (Est, Nord) mais comme il n'y a pas ici de confusion possible avec des coordonnées rectangulaires géocentriques, la notation *X, Y* est également utilisée.



L'informatique (DAO) court-circuite une grande partie de la méthode graphique puisqu'elle permet d'obtenir directement la zone d'indécision. Il suffit de dessiner les points réels à partir de leurs coordonnées puis les visées réelles, et de faire un « zoom » sur la zone d'indécision qui est ainsi obtenue directement, imprimable à l'échelle souhaitée. Il reste à choisir le point définitif M, soit manuellement soit en utilisant l'outil informatique (voir les exemples traités pour chaque méthode dans les paragraphes 4 à 9 suivants).

L'informatique et le GPS rendent ces méthodes graphiques obsolètes. Toutefois elles restent intéressantes à étudier en formation initiale puisqu'elles permettent de visualiser concrètement la précision des mesures topométriques en fonction de l'appareil utilisé. Elles permettent aussi de comprendre le sens réel d'une opération d'intersection, de relèvement, de multilatération, etc.

## 4 LA MULTILATÉRATION

Nous commençons par cette méthode car elle nous paraît la plus simple en termes de compréhension et de calculs.

### 4.1 Coordonnées approchées par bilatération

Les distances sur deux points anciens connus sont suffisantes pour calculer un point approché Mo : on appelle ces deux mesures bilatération.

Considérons un point Mo dont on veut déterminer les coordonnées à partir de A et B (par convention A, B, Mo sont pris dans le sens horaire). On mesure les distances  $D_{AMo}$  et  $D_{BMo}$  puis on calcule les coordonnées du point Mo comme suit :

Calcul de l'angle  $\alpha$ ,

$$\cos \alpha = \frac{D_{AMo}^2 + D_{AB}^2 - D_{BMo}^2}{2D_{AB} \cdot D_{AMo}}$$

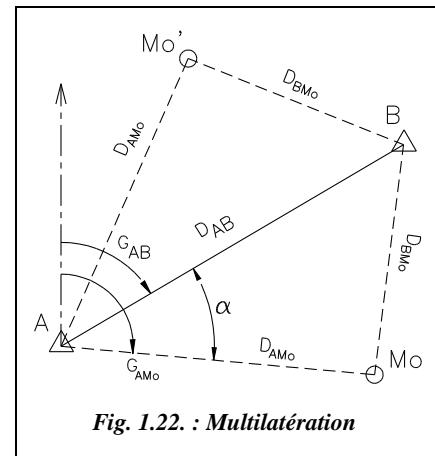


Fig. 1.22. : Multilatération

Calcul du gisement  $G_{AMo}$  :

Si le point Mo est à droite du vecteur AB, on peut écrire :  $G_{AMo} = G_{AB} + \alpha$ .

Si le point Mo est à gauche du vecteur AB, on peut écrire :  $G_{AMo} = G_{AB} - \alpha$ .

Les coordonnées du point Mo sont alors :

$$E_{Mo} = E_A + D_{AMo} \cdot \sin G_{AMo}$$

$$N_{Mo} = N_A + D_{AMo} \cdot \cos G_{AMo}$$

Attention : il existe deux points possibles Mo et Mo' ; il faut en choisir un, par exemple à partir d'un schéma à l'échelle. Ces calculs ramènent à une intersection de deux cercles (voir chap. 4., § 4).

**Pour vérifier**, on effectue les mêmes calculs de rayonnement à partir du point B.

## 4.2 Conventions et définitions

### 4.2.1 Points doubles

On appelle points doubles tous les points d'intersection des  $n$  visées effectuées prises deux à deux (combinaison de  $n$  éléments pris deux à deux).

Il y a donc  $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$  points doubles pour  $n$  points d'appui visés.

Par exemple, pour  $n = 4$ , on obtient six points doubles.

### 4.2.2 Distance observée d'une visée

C'est la distance, notée  $D_{obs}$ , lue au distancemètre sur le terrain entre le point nouveau M et chaque point ancien. Elle est prise en compte après avoir subi les corrections la ramenant au système de représentation plane (voir tome 1, chap. 4, § 7.), à savoir :

- les corrections d'étalonnage et atmosphérique de l'appareil de mesure ;
- la réduction à l'horizontale :  $Dh = Di \cdot \sin V - 7,21 \cdot 10^{-8} \cdot Di^2 \cdot \sin 2V$  ;
- la réduction au niveau 0 (à l'ellipsoïde), la station étant à l'altitude  $h_s$  et le point visé

$$\text{à l'altitude } h_p : Do = \sqrt{\frac{Di^2 - (h_s - h_p)^2}{\left(1 + \frac{h_s}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_p}{R}\right)}} \text{ si } (h_s \neq h_p) \text{ on retrouve } Do = \frac{R \cdot Dh}{h + R}.$$

$h_s$  et  $h_p$  sont théoriquement les hauteurs au-dessus de l'ellipsoïde.

- la correction due à la projection plane :  $Dr = Do(1 + kr)$ .

Les stations totales modernes permettent d'afficher directement  $Dr$  sur le terrain.

### 4.2.3 Distance approchée d'une visée

C'est la distance, notée  $D_{app}$ , calculée entre le point d'appui J dont la visée est issue et le point approché Mo. Elle est généralement déterminée au millimètre près.

$$D_{j app} = D_{JMo}$$

### 4.2.4 Le segment-distance

Considérons une distance  $D_A$  mesurée depuis le point d'appui A ; le lieu géométrique des positions possibles du point M est le cercle de centre A et de rayon  $D_A$ . Les distances mesurées depuis les autres points d'appui (par exemple fig. 1.23. : B, C et D) forment une zone d'indécision (zone hachurée) dans laquelle doit se situer le point M cherché. Lorsque l'on se situe aux alentours immédiats du point M, étant donné la très petite taille de la zone par rapport aux rayons des cercles représentant les visées, on assimile une portion de cercle à un segment de droite tangent au cercle : ces segments sont appelés segments-distances et deviennent les lieux géométriques du point M à proximité immédiate de ce dernier.

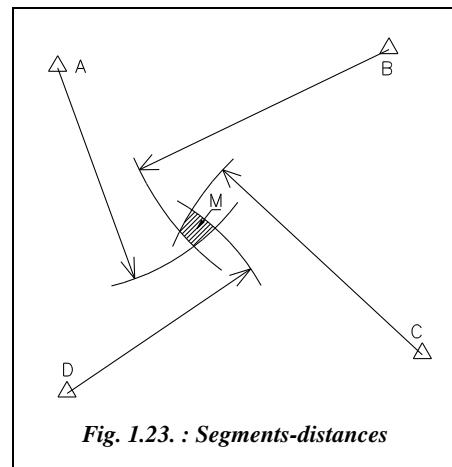


Fig. 1.23. : Segments-distances

### 4.2.5 Orientation du segment-distance

Considérons le segment-distance, noté  $\Gamma_J$ , issu de la visée sur le point J.

Le gisement de la visée de J sur M peut être calculé avec une approximation correcte par le gisement  $G_{JMo}$ , étant donné la précision de la construction graphique exécutée au dgon près.

Le gisement du segment-distance est donc égal à :

$$G_{\Gamma J} = G_{JMo} - 100 \text{ gon}$$

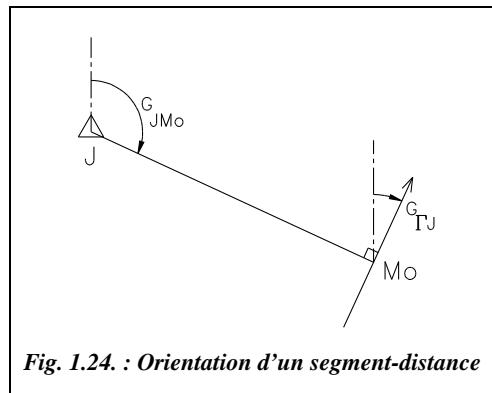
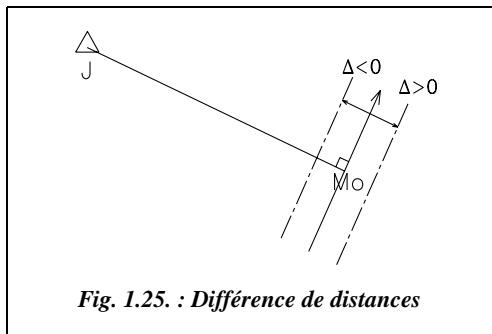


Fig. 1.24. : Orientation d'un segment-distance

Désormais, on sait placer les segments-distances autour du point Mo ; ils sont dessinés et orientés grâce à leur gisement.

Cette orientation est conventionnelle et permet l'harmonisation des résultats avec les autres méthodes comme l'intersection et le relèvement (§ 5. et 6.).

#### 4.2.6 Différence de distances



C'est la différence, notée  $\Delta$ , entre les distances observées et approchées de chaque visée.

$$\Delta_J = D_{J_{\text{obs}}} - D_{J_{\text{app}}}$$

C'est grâce au calcul de cette valeur qu'il est possible de dessiner la zone d'indécision à partir du point Mo calculé auparavant. En effet, les segments-distances sont actuellement dessinés et orientés mais passent tous par Mo.  $\Delta$  donne la valeur dont on doit éloigner les

segments-distances de Mo pour obtenir leur position réelle. Le signe de  $\Delta$  indique s'ils se rapprochent du point origine de la visée ou s'ils s'en éloignent.

$\Delta$  est calculée au millimètre près avec son signe qui est pris conventionnellement tel que :

- $\Delta$  est positif si la distance observée est plus longue que la distance approchée ; donc le segment-distance s'éloigne du point origine de la visée (le point J sur la figure 1.25.). En tenant compte de son orientation, il est décalé vers sa droite.
- $\Delta$  est négatif si la distance observée est plus courte que la distance approchée ; donc le segment-distance se rapproche du point origine de la visée. En tenant compte de son orientation, il est décalé vers sa gauche.

#### 4.2.7 Détermination du point définitif M

On sait maintenant construire la zone d'indécision contenant le point M. Deux cas traités ci-après sont à envisager.

##### 4.2.7.1 Zone d'indécision de petite taille

Cette zone est de taille suffisamment petite par rapport à la précision demandée sur la connaissance de M (son amplitude maximale est par exemple de 5 cm alors que la précision recherchée est de l'ordre de 3 à 4 cm) : dans ce cas, on peut directement placer le point M et calculer ses coordonnées par rapport au point Mo (voir fig. 1.26.).

Sur cette figure, les segments-distances issus de A, B, C et D ont été placés en un point  $M_o$ , origine du repère associé à notre graphique (représentation à grande échelle : 1/10, 1/5...).

Le point  $M_o$  ayant été calculé à partir des points A et B, on décale le segment-distance issu du point C de la valeur  $\Delta_C$ , le sens étant donné par le signe de  $\Delta_C$ . Il en est de même pour le segment-distance issu de D.

On en déduit la forme de la zone d'indécision, hachurée sur la figure 1.26. Sa taille étant suffisamment petite, on y place le point M à vue.

Les coordonnées de M sont :

$$E_M = E_{M_o} + \Delta E$$

$$N_M = N_{M_o} + \Delta N$$

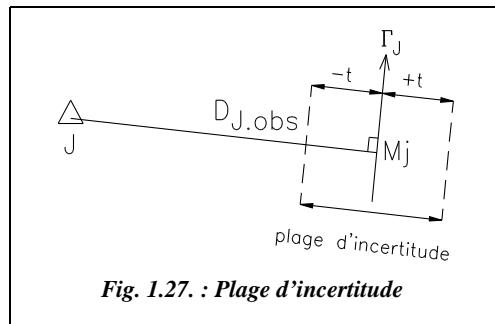
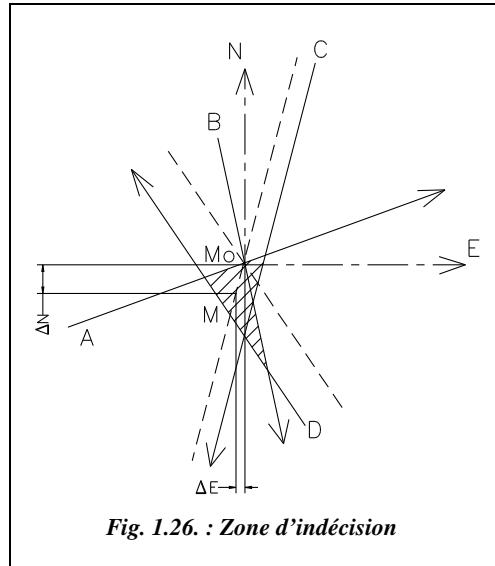
#### 4.2.7.2 Zone d'indécision de taille importante

La zone d'indécision est de taille trop importante par rapport à la précision demandée sur M, ou bien sa forme est telle qu'il est difficile de placer M directement ; il faut alors trouver une méthode pour placer le point M le plus précisément possible (par exemple en réduisant la zone d'indécision).

Étant donné la présence d'inévitables erreurs de mesure, il est logique de considérer que les segments-distances sont situés à l'intérieur d'une plage d'incertitude (fig. 1.27.) que l'on pourrait tracer de part et d'autre de chaque segment. C'est le calcul et le tracé de cette plage qui vont permettre de réduire la zone d'indécision.

La manipulation ayant été faite chaque fois, sans fautes, par le même opérateur et dans les mêmes conditions, il est possible d'admettre que la plage d'incertitude est liée à la précision de l'appareil, le même pour toutes les visées.

Chaque distance est observée avec des imprécisions dépendant de l'écart type  $\sigma_V$  de lecture de l'angle zénithal  $V$  et de l'écart type  $\sigma_{D_i}$  de lecture de la distance inclinée  $D_i$  au



distancemètre. Ces valeurs dépendent des appareils utilisés et sont données par les constructeurs, par exemple :

- pour un distancemètre courant :  $\sigma_{Di}$  (cm) =  $\pm(A + B \cdot Di_{km})$   
(exemple :  $A = 0,5$  cm et  $B = 0,5$  pour un DI4, et  $A = 0,3$  cm et  $B = 0,2$  pour un DI 1000)
- pour un théodolite T2 :  $\sigma_z = \pm 6$  dmgon (valeur usuelle, la valeur donnée par le constructeur étant de 2,5 dmgon)

La relation de base utilisée est :  $Dh = Di \cdot \sin V$ .

On arrive par dérivation à :  $dDh = dDi \cdot \sin V + Di \cdot \cos V \cdot dV_{rad}$ .

Ce qui donne pour l'écart type sur une mesure :  $\sigma_{Dh}^2 = (\sigma_{Di} \cdot \sin V)^2 + (Di \cdot \cos V \cdot \sigma_V)^2$ .

On en déduit une tolérance (loi de Gauss) :  $T_{Dh} = \pm 2,7 \cdot \sigma_{Dh}$

Si les visées sont proches de l'horizontale  $V \approx 100$ gon donc  $\sin V \approx 1$  et  $\cos V \approx 0$ , et donc  $\sigma_{Dh} \approx \sigma_{Di}$  ; donc on arrive à la forme simplifiée suivante :  $T_{Dh}$  (cm) =  $\pm 2,7 \cdot (A + B \cdot Di_{km})$ .

Les demi-plages d'incertitude ont donc pour largeur la valeur  $T_{Dh}$  qui est une fonction linéaire de la distance mesurée. En pratique, les demi-plages doivent être adaptées à l'échelle choisie et à la forme de la zone à réduire, leur valeur, généralement notée  $t$ , est donc multipliée par un coefficient  $K$  choisi arbitrairement par la personne qui effectue la résolution graphique.  $K$  englobe le coefficient 2,7 donc :  $t_{cm} = K \cdot (A + B \cdot Di_{km})$

En général, on utilise la formule de tolérance légale :  $T_{cm} = (3 + Di_{km})$

d'où

$$t_{cm} = K \cdot (3 + Di_{km})$$

$t$  est la demi-plage exprimée en centimètre,

$Di$  est la distance inclinée exprimée en kilomètre,

$K$  est un coefficient arbitraire.

#### 4.2.8 Distance définitive

C'est la distance, notée  $D_{def}$ , déterminée à partir des coordonnées du point dont la visée est issue et des coordonnées du point définitif M déterminé graphiquement. Elle est déterminée au centimètre près.

#### 4.2.9 Écart linéaire

C'est l'écart entre la distance observée et la distance définitive :

$$r_j = D_{j\ obs} - D_{j\ def}$$

Il est calculé en centimètre avec une décimale et est soumis aux mêmes tolérances que les points de triangulation (20 cm en canevas ordinaire et 4 cm en canevas de précision). Son calcul permet de vérifier la validité de la manipulation.

#### 4.2.10 Rayon moyen quadratique d'indécision $Rmq$

$$Rmq = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} (r_j)^2}{n-1}}$$

Le rayon moyen quadratique est donné par la formule ci-contre :

C'est une valeur statistique calculée à partir des  $n$  écarts linéaires sur les  $n$  points anciens.  $Rmq$  est soumis à tolérance : 12 cm pour le canevas ordinaire et 2,5 cm (valeur usuelle) pour le canevas de précision.

#### 4.3 Exemple de calcul

Station	Points visés	$E$ (m)	$N$ (m)	$Dr$ (m)
301 (M)	51 (A)	982 193,00	3 156 193,14	2 921,54
	52 (B)	985 527,04	3 154 445,19	3 452,66
	53 (C)	985 359,53	3 150 108,08	4 416,09
	54 (D)	979 591,92	3 153 219,90	2 688,06

Soit à calculer le point n° 301 dans le cadre d'une multilatération cadastrale (canevas ordinaire, distances de l'ordre de 3 km). Une seule station a été faite au point 301 et les distances données  $Dr$  sont déjà réduites au plan de projection.

Le distancemètre utilisé est tel que :

$$A = B = 5 \text{ mm} \text{ d'où } t_{cm} = K \cdot (1 + D_{km}).$$

La démarche de résolution est la suivante :

1 - Effectuez un croquis des points, à l'échelle comme sur la figure 1.28.

2 - Choisissez les visées qui détermineront le point Mo (deux visées homogènes et se coupant sous un angle proche de 100 gon), par exemple, les visées issues de A et D. Calculez les coordonnées du point Mo. Vous devez trouver :  $E_{Mo} = 982 279,46 \text{ m}$  ;  $N_{Mo} = 3 153 272,88 \text{ m}$ .

3 - Calculez les distances approchées puis les différences de distances. Calculez les gisements des segments-distances (voir plus loin dans ce paragraphe, les calculs présentés dans le tableau FICHLAT.XLS).

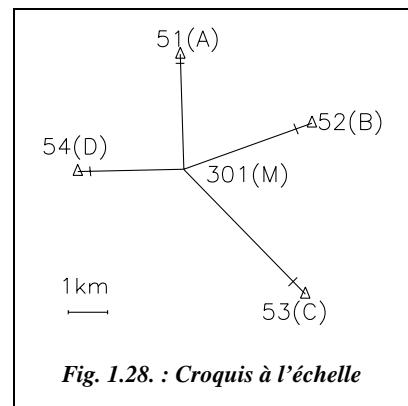
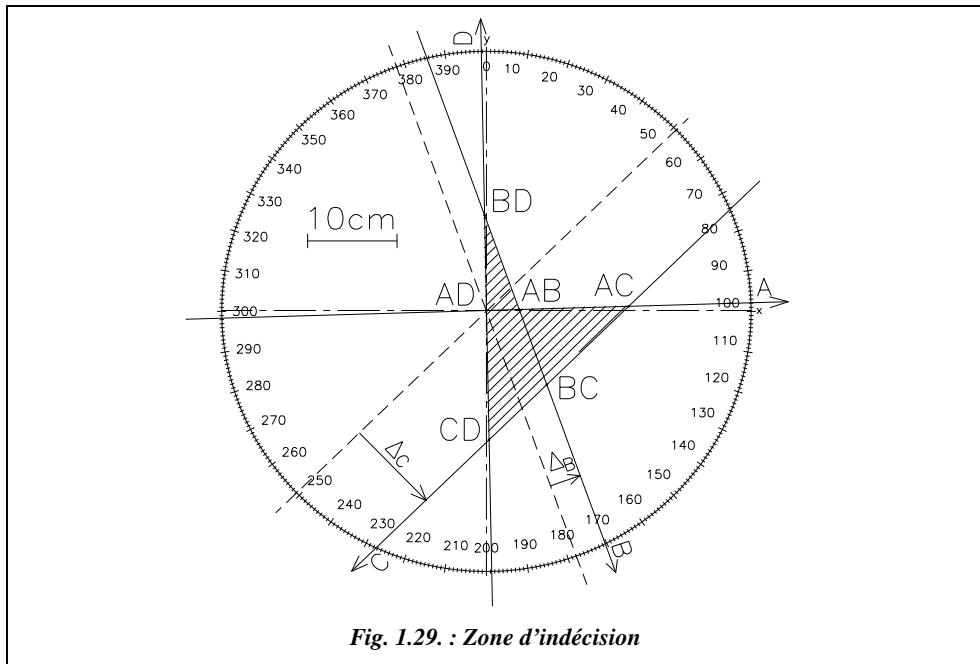


Fig. 1.28. : Croquis à l'échelle



**4** - Dessinez sur format A4 un repère dont l'origine est le point Mo, puis dessinez avec un rapporteur les segments-distances (à partir de leurs gisements) en les faisant passer, dans un premier temps, par le point approché Mo (voir fig. 1.29.).

**5** - Déplacez les segments-distances de la valeur  $\Delta$  à l'échelle choisie, le sens du déplacement dépendant du signe de  $\Delta$ . Repérez la zone d'indécision (ensemble des points doubles, ici au nombre de 6, voir fig. 1.29). Notez que le point Mo est repéré AD sur la figure 1.29. puisqu'il est l'intersection des segments-distances issus de A et de D. Les lignes discontinues sont des constructions intermédiaires qui peuvent être effacées.

**6** - Si l'on considère, pour l'exemple, que la zone d'indécision est trop grande pour placer M directement, il faut choisir un coefficient  $K$  pour le calcul des demi-plages  $t$  dont on décale chaque segment-distance : il convient de réaliser plusieurs essais jusqu'à obtenir une zone commune à toutes les zones d'indécision, et qui soit suffisamment petite pour pouvoir placer le point définitif M. Notez sur la figure 1.30. que seules les demi-plages utiles ont été dessinées afin de ne pas encombrer le dessin. En effet, il est inutile de dessiner par exemple toutes les demi-plages extérieures à la zone.

**Remarque**

On peut préciser l'emplacement du point M de deux manières différentes :

- soit en réduisant la zone d'indécision : on choisit une valeur de  $K$  pour que cette zone soit simplement plus petite de manière à placer M plus précisément ;

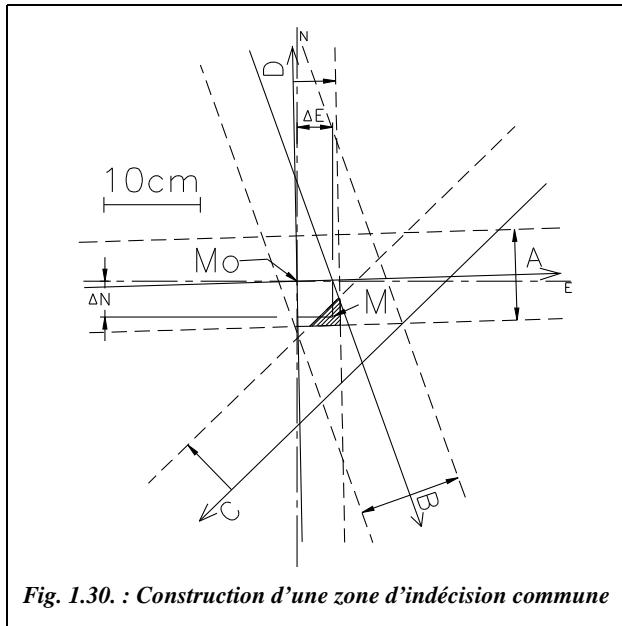
- soit en choisissant une valeur de  $K$  plus grande de manière à créer un **recouvrement des zones d'indécision**, cette zone commune devenant le lieu le plus probable du point définitif M. Cette seconde méthode, plus logique, est appelée « recherche de zone commune aux demi-plages d'indécision ».

Sur la figure 1.30., le dessin des demi-plages  $t$  est réalisé avec un coefficient  $K = 1,2$  pour un dessin à l'échelle 1.

Seules les demi-plages utiles sont dessinées afin de ne pas surcharger la construction.

Après décalage, il reste une zone commune à toutes les zones d'indécision (zone hachurée de la figure 1.30.). On place M « à vue » dans cette zone et on mesure depuis Mo :

$$\begin{aligned}\Delta E &= +3\text{cm} \\ \Delta N &= -4\text{cm}\end{aligned}$$



7 - Calculez les coordonnées du point définitif M à partir de celles du point Mo et vérifiez par le calcul des écarts linéaires et du rayon moyen quadratique d'indécision que la manipulation respecte les tolérances.

#### Remarque

Le graphique peut être construit en utilisant une feuille A4 sur laquelle figure déjà un repère et un rapporteur associé à ce repère. Ce document existe sur le cédérom du livre sous forme de fichier AutoCAD (RAPPORT.DWG).

#### ◆ *Extraits du tableau FICHLAT.XLS*



Les calculs suivants ont été effectués sur Excel à partir des tableaux :

- FICHLAT.XLS associé à la méthode graphique. Il peut être utilisé vide pour présenter les calculs ;
- TRIANGU.XLS associé à un calcul aux moindres carrés.

Les tableaux qui suivent en sont extraits.

## 1 - Calcul de Mo dans le triangle D-A-Mo (sens horaire)

Calcul depuis D		Vérification depuis A	
$D_{DA}$ =	3 950,41	m	
$G_{DA}$ =	45,7560	gon	
$\alpha$ =	52,9892	gon	
$G_{DMo}$ =	98,7452	gon	
$E_{Mo}$ =	982 279,46	m	
$N_{Mo}$ =	3 153 272,88	m	

## 2 - Calcul des paramètres des segments-distances

Points	$G_{PiMo}$ (gon)	$G_{seg-dist}$ (gon)	$Dapp$ (m)	Diff. de dist. (cm)	1/2 plage $t$ (cm)
	$G_{TPI} = G_{PiMo} - 100$				
<b>54 (D)</b>	98,7452	398,7452	2 688,06	0,0	4,4
<b>51 (A)</b>	198,1158	98,1158	2 921,54	0,0	4,7
<b>53 (C)</b>	350,8637	250,8637	4 416,20	-10,8	6,5
<b>52 (B)</b>	277,9461	177,9461	3 452,69	-3,5	5,3

**3 - Mesures sur graphique**  $\Delta E = 0,03$  m donc :  $E_M = 982 279,49$  m  
 $\Delta N = -0,04$  m  $N_M = 3 153 272,84$  m

## 4 - Vérifications

$Rmq = 4,5$  cm.  
Tolérance sur  $Rmq$  :  
12 cm  
(canevas ordinaire)

Points	Dist définitive	Écarts linéaires	Tolérance sur $ri$
Pi	$Ddef$ (m)	$ri_{cm} =  Dobs - Ddef $	(cm)
<b>54 (D)</b>	2688,10	3,5	20
<b>51 (A)</b>	2921,58	4,1	20
<b>53 (C)</b>	4416,14	5,4	20
<b>52 (B)</b>	3452,67	1,5	20

### ◆ résolution graphique



L'outil informatique permet de construire la zone d'indécision en économisant les calculs précédents. L'environnement de travail est défini dans le menu FORMAT / CONTRÔLE DES UNITÉS : angles en grades, quatre chiffres

significatifs, longueurs en unités décimales et avec deux chiffres après la virgule, zéro des angles au nord, sens de rotation horaire.

### 1 - Dessin des cercles représentants les visées

Définissez quatre Calques nommés A, B, C et D avec des couleurs différentes (bouton CALQUES à gauche de la barre d'outils standard).

Calque A courant. *CERCLE* de centre 982193, 156193.14 et de rayon 2921.54.

Calque B courant. *CERCLE* de centre 985527.04, 154445.19 et de rayon 3452.66.

Calque C courant. *CERCLE* de centre 985359.53, 150108.08 et de rayon 4416.09.

Calque D courant. *CERCLE* de centre 979591.92, 153219.9 et de rayon 2688.09.

*Zoom Etendu* pour voir l'ensemble du dessin.

Repérez éventuellement chaque point avec du texte : *TXTDYN* (ou menu DESSIN / TEXTE), point de départ *CENtre* de chaque cercle, hauteur du texte 250, angle 100. Vous devez obtenir le résultatat de la figure 1.31.

Sauvegardez cette vue : commande *VUES*, option *SAuvergarder* (ou menu VUE / VUES EXISTANTES / NOUVELLE), appelez-la par exemple *G* (pour général).

### 2 - Repérage des points doubles

*ZOOM* Fenêtre (plusieurs fois jusqu'à voir la zone à l'échelle maximale). Attention, entre chaque zoom, appliquez la commande *REGEN* pour recalculer le dessin (sinon la représentation des cercles n'est pas assez précise).

Sauvegardez cette vue : commande *VUES*, *SAuvergarder*, appelez-la par exemple *C*.

Créez un nouveau calque *ZONE INDECISION* dans une nouvelle couleur, rendez-le courant.

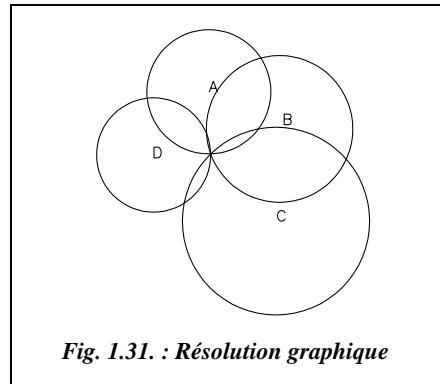


Fig. 1.31. : Résolution graphique

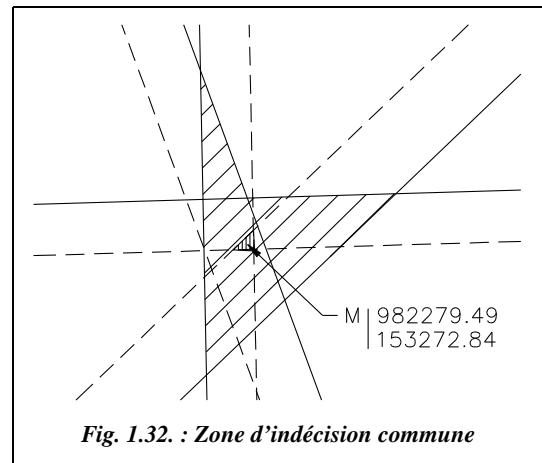


Fig. 1.32. : Zone d'indécision commune

Dessinez son contour au moyen d'une *POLYLIGNE* ↴ allant d'*INTtersection* en *INTersection*.

Vous pouvez la hachurer : menu **DESSIN / HACHURAGE**, choisissez le motif **ANSI31**, échelle **0.005** ↴ et cliquez sur la polyligne contour de la zone (ou répondre **D** ↴ pour Dernier objet dessiné, à la question portant sur le choix des objets).

### 3 - Réduction de la zone d'indécision

Calculez, pour chaque visée, le terme  $t_{\text{cm}} = K.(1 + D_{\text{km}})$  en prenant un coefficient  $K$  arbitraire, ici  $K = 1,1$  (vous pouvez faire appel à la calculatrice de Windows si le calcul ne peut être fait de tête).

*DECALER* ↴ chaque cercle par la valeur calculée pour  $t$ , donner le sens de décalage en cliquant avec la souris.

Placez le point M au « centre » de la zone réduite et lisez ses coordonnées par *ID* ↴. Vous pouvez de la même manière obtenir les coordonnées des six points doubles pour vérifier les calculs par exemple.

### 4 - Impression sur format A4

Avant d'imprimer (ou de tracer), vérifiez dans le « panneau de configuration » de Windows que l'imprimante système est en mode portrait.

Calculez l'échelle de sortie : format A4, (210 mm × 297 mm) moins une marge de  $2 \times 5$  mm soit (200 mm × 287 mm). Les dimensions de la zone à tracer sont obtenues avec la commande *DISTANCE* ↴ : cliquez deux points donnant la diagonale du rectangle entourant la zone à tracer et lisez les dimensions en X et Y (par exemple ici pour la figure 1.31. : 13 500 m × 14 000 m). Donc on choisit par exemple à l'échelle 1/100 000 (ou 1/75000).

Pour retourner à la vue générale, *VUES* ↴ *Rappel* ↴ *G* ↴.

Sélectionnez le menu **FICHIER / IMPRIMER...** puis :

- indiquez le périphérique choisi (votre imprimante) : sélectionnez-la éventuellement avec le bouton **MODIFIER LES PARAMETRES** (choix du traceur dans la liste déroulante et choix de l'orientation) ;
- réglez l'unité (mm) et le format (A4 ou MAX) ;
- saisissez la fenêtre de tracé avec la souris (bouton **FENETRE** suivi du bouton **SAISIR**) ;
- réglez l'orientation (rotation à 0) et l'origine (à zéro en X et en Y) du tracé ;
- donnez l'échelle 1/100 000 (1 mm papier = 100 000 mm réel = 100 unité dessin car 1 unité dessin vaut 1 m soit 1 000 mm) : donc entrez (**1 mm tracé = 100 unités dessin**) ;
- demandez un aperçu Total avant impression ; s'il est satisfaisant, validez par **OK** puis **ENTRÉE**.

Pour imprimer la zone réduite : rappelez la vue C, régénérez le dessin (*REGEN*) puis dans la case de dialogue **IMPRIMER...** redéfinissez la fenêtre de tracé. La zone à tracer représente 34 cm  $\times$  29 cm, on passe donc à l'échelle 1/2, ce qui donne (1 mm tracé = 2 mm réels = 0,002 unité dessin), soit (1000 = 2) ou (**500 = 1**).

Pour les sorties à une échelle donnée, voir aussi le chapitre 10 du tome 1, paragraphe 2.4. où sont détaillées les notions d'espace-objet et d'espace-papier.

◆ **extraits du tableau TRIANGU.XLS**



Le tableau suivant utilise la méthode des moindres carrés pour arriver au résultat. Toutes les formules utilisées sont indiquées.

Excel 7  
Le point Mo y est différent car il est calculé à partir de A et B : le résultat final ne change pas si on modifie ce choix.

Le résultat final est comparable à la résolution graphique, l'écart sur le point définitif ne dépassant pas 2 cm.

Remarquez que le tableau effectue les calculs de réduction : ce sont donc les valeurs lues sur le terrain qui y figurent. Les paramètres de réduction sont les suivants : altitudes des points, rayon terrestre et coefficient d'altération linéaire.

Les paramètres de calcul de la résolution aux moindres carrés sont :

- $D_j$  et  $G_j$  : distances et gisements de chaque point  $P_j$  vers le point approché  $Mo$  ( $D_{Pj-Mo}$  et  $G_{Pj-Mo}$ ) ;
- $\Delta_j$  (en mm) sont les écarts linéaires pour chaque point  $P_j$  :  $D_{obs} - D_{app}$ .

Les termes  $dx$  et  $dy$  sont fournis par la résolution du système de deux équations à deux inconnues donné en (6). Ils sont obtenus directement en mètre.

**Station** : 301   **Altitude** : 130,00 m      Rayon terre :  $R = 6\,372\text{ km}$   
Coeff. d'altération linéaire :  $kr = -9\text{ cm/km}$

**1 - Points d'appui**

Pt	X Est m	Y Nord m	H Altitude m	Distances Di obs m	Do ellipsoïde m	Dr projection m	Gapp Pi sur Mo gon	D app Pi à Mo m	$\Delta_i$ mm
<b>51</b>	982 193,00	3 156 193,14	129,95	2921,863	2921,803	2921,540	198,1158	2921,540	0
<b>52</b>	985 527,04	3 154 445,19	128,65	3453,041	3452,971	3452,660	277,9461	3452,695	-35
<b>53</b>	985 359,53	3 150 108,08	131,21	4416,578	4416,487	4416,090	350,8637	4416,197	-107
<b>54</b>	979 591,92	3 153 219,90	132,13	2688,358	2688,302	2688,060	98,7452	2688,060	0

$n = 4$  points d'appui

**2 - Calcul de  $D_{AB}$ ,  $G_{AB}$ ,  $\alpha$  :** Mo est calculé à partir des points 51 et 54.

$$D_{AB} = 3950,414 \text{ m} \quad \text{Cos}\alpha = (D_{AB}^2 + D_A^2 - D_B^2) / (2 \cdot D_{AB} \cdot D_A)$$

$$G_{AB} = 245,7560 \text{ gon} \quad \alpha = 47,6402 \text{ gon} \quad G_{AB} + \alpha = 293,3963 \text{ gon}$$

$$G_{AB} - \alpha = 198,1158 \text{ gon}$$

**3 - Point approché :** Mo à gauche du vecteur AB (Mo' à droite) :

$$G_{AMo} = 198,1158 \text{ gon} \quad G_{AMo'} = 293,3963 \text{ gon}$$

$$X_{Mo} = X_A + D_A \cdot \sin(G_{AMo}) = 982\,279,46 \text{ m} \quad X_{Mo'} = 979\,287,16 \text{ m}$$

$$Y_{Mo} = Y_A + D_A \cdot \cos(G_{AMo}) = 3\,153\,272,88 \text{ m} \quad Y_{Mo'} = 3\,155\,890,63 \text{ m}$$

**4 - Coordonnées du point définitif M (moindres carrés)**

$$X_M = X + dx = 982\,279,49 \text{ m} \quad dx = 0,028 \text{ m} (b \cdot e - c \cdot d) / (a \cdot d - b^2)$$

$$Y_M = Y + dy = 3\,153\,272,86 \text{ m} \quad dy = -0,019 \text{ m} (b \cdot c - a \cdot e) / (a \cdot d - b^2)$$

**5 - Vérification des tolérances**

Point	Dd <sup>é</sup> f Pi à M m	ri D <sub>obs</sub> - Dd <sup>é</sup> f cm	Tolérances sur ri		Bilan
			Précision cm	Ordinaire cm	
51	2921,561	2,0	4	20	T.Bon
52	3452,675	1,5	4	20	T.Bon
53	4416,164	7,4	4	20	Bon
54	2688,087	2,7	4	20	T.Bon

Nombre de visées de multilatération :  $n = 4$

Tolérances sur  $Rmq$  :

Rayon quadratique moyen d'indécision :

– précision : 2,5 cm :

$$Rmq = \sqrt{(\sum R_i^2) / (n - 1)} = 4,8 \text{ cm Bon}$$

– ordinaire : 12 cm

**6 - Système d'équations résolu (résolution matricielle)**

$$a \cdot dx + b \cdot dy + c = 0 \quad a = 23,7603 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(\sin(G_j) / D_j)^2$$

$$b \cdot dx + d \cdot dy + e = 0 \quad b = 0,0423 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(\sin(G_j) \cdot \cos(G_j) / D_j^2)$$

$$c = -0,6617 \cdot 10^5 \cdot \Sigma(\sin(G_i) \cdot \Delta_j / D_j^2)$$

$$d = 15,3115 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(\cos(G_j) / D_j)^2$$

$$Dj \text{ en m, } Gj \text{ en gon, } \Delta j \text{ en mm} \quad e = 0,2947 \cdot 10^5 \cdot \Sigma(\cos(G_j) \cdot \Delta_j / D_j^2)$$

# 5 L'INTERSECTION

Comme la multilatération, cette deuxième méthode est relativement simple à comprendre. Mais en termes de manipulation sur le terrain, elle nécessite plus de travail car chaque point d'appui est stationné et à chaque station un *G*omoyen de station est calculé.

Les principes déjà développés dans la multilatération ne seront pas repris dans le détail.

## 5.1 Détermination d'un point approché à partir de deux visées

On détermine les coordonnées d'un point approché *Mo* à partir de deux visées d'intersection correctement choisies (lectures précises, visées longues, se coupant sous un angle favorable, c'est-à-dire proche de 100 gon). Les deux points choisis sont nommés *A* et *B* (fig. 1.33.).

Les formules de Delambre donnent :

$$Y_{Mo} = Y_A + \frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) \cdot \tan G_B}{\tan G_B - \tan G_A}$$
$$X_{Mo} = X_A + (Y_{Mo} - Y_A) \cdot \tan G_A$$

La démonstration et les cas particuliers sont traités au paragraphe 1.2. du chapitre 4.

Les gisements *G<sub>A</sub>* et *G<sub>B</sub>* sont connus à 200 gon près.

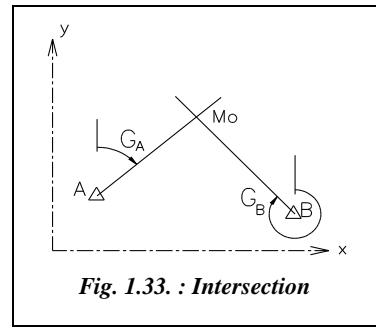


Fig. 1.33. : Intersection

## 5.2 Conventions et définitions

### 5.2.1 Lieux-droites

On appelle « lieux-droites », sur le schéma de construction graphique du point *M*, les lieux géométriques possibles du point *M*, c'est-à-dire l'ensemble des *n* visées issues des *n* points d'appui stationnés.

Le nombre de points doubles est une combinaisons de *n* visées prises deux à deux, soit :

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pour *n* = 4 visées, on trouve six points *Mo* possibles.

## 5.2.2 Gisement observé d'une visée

Un *G0moyen* de station est calculé pour chaque point d'appui stationné.

Le gisement observé  $G_{\text{obs}}$  d'une visée sur le point cherché M est donc la somme du *G0moyen* de station et de la lecture angulaire sur le point M (fig. 1.34.). Il est donc calculé uniquement à partir des données par la formule :

$$G_{\text{obs}} = G_0 + L_{S \rightarrow M}$$

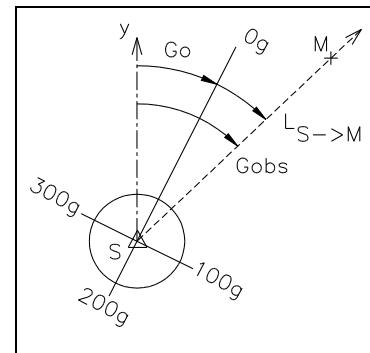


Fig. 1.34. : Gisement observé

## 5.2.3 Gisement approché

Le gisement approché est le gisement  $G_{\text{app}}$  calculé à partir des coordonnées du point approché  $M_0$ . Pour l'obtenir, il faut donc avoir calculé les coordonnées du point  $M_0$ .

Pour chaque station S, on a :  $G_{\text{app}} = G_{S M_0}$

C'est grâce au gisement  $G_{\text{app}}$  qu'il est possible de dessiner et d'orienter les visées dessinées dans un premier temps autour du point  $M_0$  sur le graphique (à grande échelle) de construction des lieux-droites.

## 5.2.4 Différence de gisement

C'est la différence entre le gisement observé et le gisement approché :  $\Delta = G_{\text{obs}} - G_{\text{app}}$

La différence de gisement  $\Delta$  permet de calculer le déplacement et d'en donner le signe.

Le signe de  $\Delta$  est choisi par convention tel que (voir fig. 1.35.) :

- si  $\Delta < 0$  alors  $G_{\text{app}} > G_{\text{obs}}$  donc le lieu-droite issu de la station considérée est situé à gauche de la visée.
- si  $\Delta > 0$  alors  $G_{\text{app}} < G_{\text{obs}}$  donc le lieu-droite issu de la station considérée est situé à droite de la visée.

Remarquez que l'on retrouve ainsi la même convention qu'en multilatération.

## 5.2.5 Sensibilité et déplacement d'une visée

Ces termes sont définis au paragraphe 9.4. du chapitre 5.

Rappelons que la sensibilité d'une visée est le déplacement de son extrémité pour un angle de 0,1 mgon (1 dmgon) ; elle est définie par la formule :

$$s_{\text{cm/mgon}} \approx 1,57 \cdot D_{\text{km}}$$

Le déplacement correspond à une variation angulaire de  $\Delta$  en mgon, c'est-à-dire :

$$d_{\text{cm}} = s_{\text{cm/mgon}} \cdot \Delta_{\text{mgon}}$$

Le déplacement est donné avec son signe qui est le même que celui de l'angle orienté  $\Delta$ .

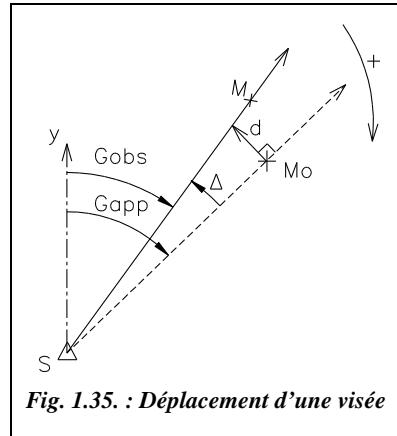


Fig. 1.35. : Déplacement d'une visée

Sur la figure 1.35. on peut voir le sens du vecteur déplacement  $d$  en fonction de son signe :

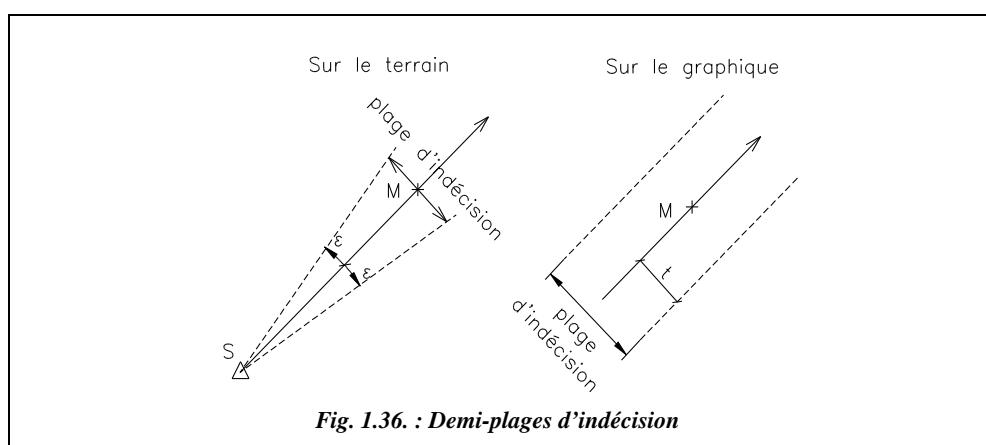
- si  $\Delta < 0$ , le déplacement s'effectue vers la gauche ;
- si  $\Delta > 0$ , le déplacement s'effectue vers la droite.

Cette valeur  $d$  donne le déplacement à effectuer pour chaque lieu-droite : c'est la distance séparant la position réelle de chaque lieu-droite du point approché Mo.

Le déplacement de chaque lieu-droite est fait parallèlement à lui-même, ce qui est une très bonne approximation compte tenu de la taille du schéma réalisé (zone comprise dans un cercle d'environ 1 m de diamètre) par rapport aux distances de visées (plusieurs kilomètres), l'angle  $\Delta$  étant très petit (de l'ordre de quelques mgon).

## 5.2.6 Demi-plages d'indécision

À ce stade, nous pouvons dessiner la zone d'indécision sur un graphique à grande échelle.



Si elle est trop grande et qu'il faut la réduire, on procède comme suit :

Considérant qu'au moment des mesures tous les points anciens sont connus avec une précision homogène et que toutes les observations sont effectuées dans les mêmes conditions (opérateur, appareils, vent, etc.), on affecte à chaque observation la même erreur angulaire  $\pm \varepsilon$ . Cette erreur angulaire  $\pm \varepsilon$  donne un déplacement en bout de visée qui représente la plage d'indécision dans laquelle peut se situer le point M (fig. 1.36.), soit :  $t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km} \cdot \varepsilon_{mgon}$

L'erreur angulaire  $\varepsilon$  étant la même pour toutes les visées, on lui affecte la valeur de 1 mgon ; les plages deviennent alors directement proportionnelles à la distance de visée  $D$ ,  $t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km}$ . Pour des raisons pratiques, on multiplie ensuite la valeur de la largeur de la plage par un coefficient  $K$  arbitraire choisi de manière à rendre possible la construction graphique.  $K$  est donc fonction de l'échelle choisie pour le graphique. En fait, la constante  $K$  englobe le coefficient de conversion 1,57 et l'erreur angulaire  $\varepsilon$ .

La largeur de chaque demi-plage est finalement : 
$$t_{cm} = K \cdot D_{km}$$

Seules les demi-plages « utiles » sont construites sur le graphique.

### 5.2.7 Gisement définitif

Le point M ayant été déterminé graphiquement par rapport au point  $M_0$ , il est possible de calculer les gisements dits définitifs  $G_{def}$  de chaque station vers le point M à l'aide de la formule suivante :

$$G_{def} = G_{SM}$$

### 5.2.8 Écarts d'orientation

L'écart d'orientation est la différence entre le gisement observé et le gisement définitif ; il est usuellement exprimé en mgon par la formule :

$$e_{mgon} = (G_{obs} - G_{def}) \cdot 1000$$

Cet écart est soumis à la même tolérance que les écarts d'orientation du calcul des  $G0moyen$  de chaque station :

$$T_{mgon} = \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( 1 + \frac{162}{Dm^2} \right)}$$

- $n$  est le nombre de visées d'orientation pour chaque station.
- $Dm$  (en km) est la longueur moyenne des visées sur une station.

Pour  $Dm \approx 3$  km, distance moyenne entre sommets du réseau d'appui en canevas ordinaire dans l'arrêté du 20 janvier 1980, la formule devient :

$$T_{mgon} = 4,3 \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

### 5.2.9 Écart moyen quadratique d'orientation

L'écart moyen quadratique est une valeur statistique caractérisant l'ensemble de la manipulation. Il est donné par la formule suivante :

$$Emq = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} e_i^2}{N-1}}$$

- La somme des  $e_i$  englobe les mesures de  $G0moyen$ .
- N est le nombre total d'écarts  $e_i$  :  $G0moyen$  plus intersection .
- $Emq$  est exprimé en mgon, comme  $e$ .

Cet écart est soumis à tolérance, à savoir : .

$$T_{mgon} = 1,7 \frac{\sqrt{2N-3} + 2,58}{\sqrt{2N}}$$

### 5.2.10 Écarts linéaires

L'écart linéaire est la valeur du déplacement d'une visée correspondant à un écart angulaire  $e$  ; il est exprimé par la formule :

$$r_{cm} = 1,57 \cdot D_{km} \cdot e_{mgon}$$

Il y a autant d'écarts linéaires que de visées d'intersection. La tolérance sur cet écart linéaire est de 20 cm en canevas ordinaire.

### 5.2.11 Rayon moyen quadratique d'indécision

Défini seulement autour du point définitif M, le rayon moyen quadratique d'indécision est donné par la formule ci-contre :

$Ni$  est le nombre de visées d'intersection (quatre en général).

La tolérance en canevas ordinaire est de 12 cm (en canevas de précision, on prend 2,5 cm comme valeur usuelle).

$$Rmq = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} r_i^2}{Ni-1}}$$

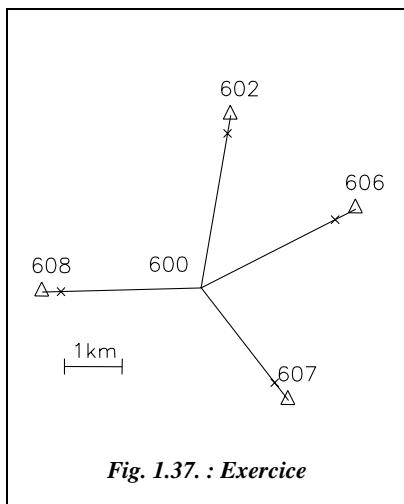
## 5.2.12 Exemple de calcul

Soit à vérifier les coordonnées du point 600 du canevas de base ordinaire. La détermination s'effectue par intersection à partir de quatre points anciens. Les données et les mesures sont indiquées sur le tableau ci-après.

Points P	E (m)	N (m)	$L_{P \rightarrow M}$ (gon)	$G0_{moyen}$ (gon)	Écarts au G0 (mgon)	Dm (km)
<b>602</b>	982 133,65	3 155 623,87	340,7968	270,0414	1,2 - 1,6 - 1,3	3,1
<b>606</b>	984 301,79	3 154 001,38	200,0013	70,0424	0,5 - 0,9 - 1,1	2,9
<b>607</b>	983 131,67	3 150 688,88	232,9394	125,0621	0,5 - 0,6 - 0,4 - 0,8	3,2
<b>608</b>	978 865,60	3 152 564,34	239,9597	258,3501	1,1 - 0,9 - 1,3	2,9

La démarche suivante est conseillée :

**1 - Réalisez un croquis des points d'appui et des visées (à petite échelle, de l'ordre de 1/50 000 ou 1/100 000, voir fig. 1.37.).**



**2 - Choisissez les visées pour le calcul du point approché Mo ; les visées choisies doivent être longues, homogènes et se coupant sous un angle favorable (proche de 100 gon) : par exemple (fig. 1.37.), les visées issues des points d'appui 606 et 607 que nous appellons respectivement A et B.**

Notez que le choix des points d'appui est particulièrement important dans cette méthode : en effet, des visées pratiquement parallèles peuvent donner une zone d'indécision trop grande ou disproportionnée.

**3 - Calculez les coordonnées du point Mo, les gisements approchés et les différences de gisement avec leur signe (voir les tableaux de calcul plus loin dans ce paragraphe).**

**4 - Dessinez sur un graphique à grande échelle (voir fig. 1.38.) un repère centré en Mo. À partir des gisements approchés, reportez les lieux-droites passant tous par Mo. Décalez les lieux-droites n'ayant pas servi au calcul du point Mo (ici 608 et 602) de la valeur du déplacement et dans le sens donné par le signe de la différence de gisements. Vous devez obtenir la zone d'indécision de la figure 1.38. Effacez ensuite les lieux-droites qui ont été déplacés pour rendre le dessin plus lisible.**

**5** - Si la zone d'indécision est trop grande, prenez un coefficient  $K = 1,5$  et calculez les demi-plages d'indécision. Dessinez les demi-plages de part et d'autre de tous les lieux-droites et construisez la zone commune d'intersection de toutes les demi-plages. Vous devez obtenir la zone commune de la figure 1.39.

**6** - Placez le point définitif M, mesurez les différences de coordonnées entre Mo et M et déduisez-en les coordonnées de M.

Vous devez trouver M ( 981 620,30 m ; 3 152 637,45 m).

**7** - Calculez les écarts d'orientation, les écarts linéaires et les écarts moyens quadratiques correspondants puis comparez-les aux tolérances pour conclure sur la validité de la manipulation dans le cadre d'un canevas ordinaire (voir tableaux de calcul).

#### ◆ *calculs*



Les calculs suivants ont été réalisés avec Excel à partir des tableaux :

- FICHINT.XLS associé à la méthode graphique. Il peut être utilisé vide pour présenter des calculs manuels ;
- TRIANGU.XLS associé à un calcul aux moindres carrés.

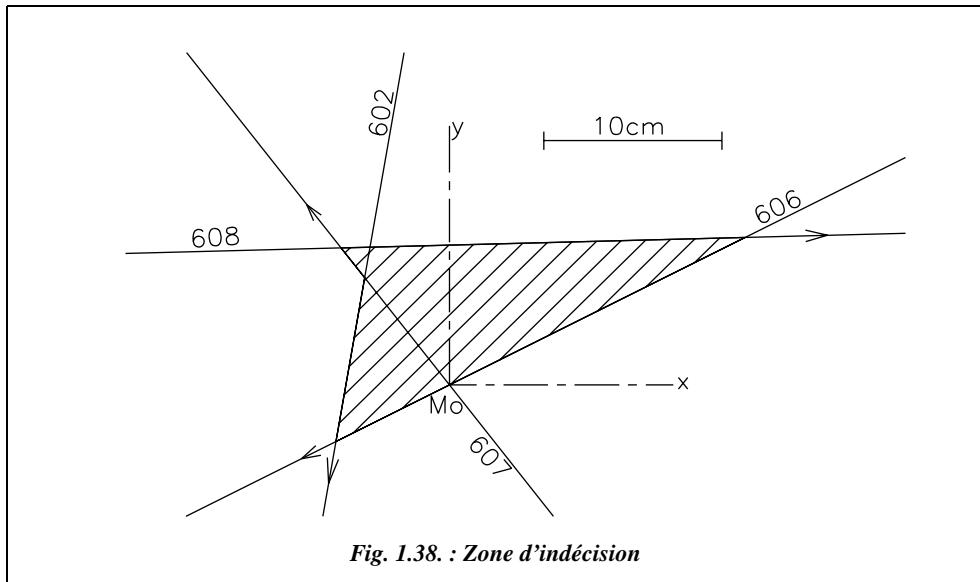
Les formules données pour la résolution aux moindres carrés font intervenir pour chaque point  $P_j$  la distance  $D_j$  et le gisement  $G_j$  du point  $P_j$  vers le point approché  $Mo$ .  $\Delta_j$  est l'écart d'orientation sur le point approché ( $G_{obs} - G_{app}$ ) ; il est donné en dmgon. Le résultat de la résolution du système deux équations à deux inconnues détaillé en (5) donne  $dx$  et  $dy$  en mètres.

Calcul de Mo à partir de 606 (A) et 607 (B) :  
 $Mo = 981\ 620,31\ m$   
 $N = 3\ 152\ 637,41\ m$

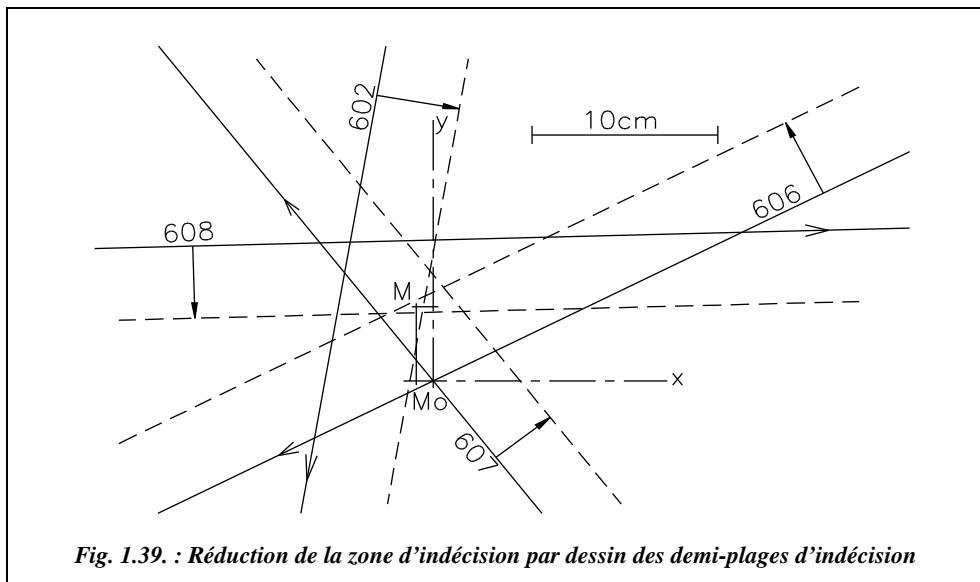
Calculs des gisements approchés, des déplacements des visées et des demi-plages :

Points <b>Pi</b>	<b>Gobs (gon)</b> <b>G0 + L</b>	<b>Gapp (gon)</b> <b>G<sub>PiMo</sub></b>	<b>Δ (mgon)</b> <b>Gobs-Gapp</b>	<b>Déplac. d (cm)</b> <b>1,57.D<sub>km</sub>.Δ<sub>mgon</sub></b>	<b>D (km)</b> <b>Distance Mo-Pi</b>	<b>1/2 p : K.D<sub>km</sub></b> <b>K = 1,5</b>
602	210,8382	210,8370	1,2	5,7	3,03	4,5
606	270,0437	270,0437	0,0	0,0	3,01	4,5
607	358,0015	358,0015	0,0	0,0	2,47	3,7
608	98,3098	98,3116	-1,8	-8,0	2,76	4,1

Graphique autour du point approché Mo : notez que seules les visées issues de 602 et 608 ne passent pas par Mo.



Le dessin des demi-plages utiles est représenté sur la figure 1.39. ci-dessous.



Positionnement du point définitif M : on mesure  $\Delta x = -0,01$  m et  $\Delta y = +0,04$  m.

On en déduit les coordonnées de M : (  $E_M = 981\ 620,30$  m ;  $N_M = 3\ 152\ 637,45$  m)

## Vérification des tolérances

Points Pi	Gd <sup>é</sup> f (gon) G <sub>PiM</sub>	ei (mgon) G <sub>obs</sub> - Gd <sup>é</sup> f	Tolérance sur ei (mgon)	ri (cm) 1,57.D <sub>km</sub> .ei <sub>mgon</sub>	Tolérance sur ri (cm)
<b>602</b>	210,8373	0,9	3,7	4,1	20
<b>606</b>	270,0446	-0,9	3,9	-4,0	20
<b>607</b>	358,0019	-0,4	3,8	-1,7	20
<b>608</b>	98,3107	-0,9	3,9	-4,0	20

$$Emq = 1,0 \text{ mgon} (N = 17)$$

Tolérance sur  $Emq$  : 2,4 mgon

$$Rmq = 4,2 \text{ cm} (Ni = 4)$$

Tolérance sur  $Rmq$  : 12 cm.

La manipulation et les calculs semblent donc valides.

**Détermination d'un point par intersection** : calcul aux moindres carrés.

**(1) Coordonnées des points d'appui** Station : 600

N°	Points Pi	Xi (m)	Yi (m)	Lect. Li de Pi sur M (gon)	G <sub>0i</sub> moyen de station (gon)	Gi obs G <sub>0i</sub> + Li (gon)	nb de visées n <sub>j</sub>	D moy. visées (km)
<b>1</b>	602	982 133,65	3 155 623,87	340.7968	270.0414	210,8382	3	3,1
<b>2</b>	606	984 301,79	3 154 001,38	200.0013	70.0424	270,0437	3	2,9
<b>3</b>	607	983 131,67	3 150 688,88	232.9394	125.0621	358,0015	4	3,2
<b>4</b>	608	978 865,60	3 152 564,34	239.9597	258.3501	98,3098	3	2,9

Nombre de visées  $Ni = 4$

Total : 13

**(2) Point approché Mo** : à partir des points 606 et 607

$$X_{Mo} = 981 620,31 \text{ m}$$

$$Y_{Mo} = 3 152 637,41 \text{ m}$$

**(3) Calcul du point définitif M**

$$X_M = X_{Mo} + dx = 981 620,28 \text{ m}$$

$$dx = -0,031 \text{ m}$$

$$Y_M = Y_{Mo} + dy = 3 152 637,46 \text{ m}$$

$$dy = 0,042 \text{ m}$$

**(4) Vérification des tolérances**

Pi	Gi app (gon)	Dist. Dr <sub>i</sub> (m)	Δi G <sub>obs</sub> - G <sub>app</sub> (dmgon)	Gi déf Pi → M (gon)	ei G <sub>obs</sub> - G <sub>def</sub> (mgon)	Écart linéaire ri (cm)	Résidu v"i (dmgon)	Tolér. sur ei (mgon)			
								ordi	Pre	n	Bilan
<b>602</b>	210,8370	3030	12	210,8377	0,5	2,4	4	3,5	0,8	3	T.bon
<b>606</b>	270,0437	3008	0	270,0448	-1,1	5,3	-11	3,6	0,8	3	bon
<b>607</b>	358,0015	2466	0	358,0017	0,2	0,8	0	3,7	0,9	4	T.bon
<b>608</b>	98,3116	2756	-18	98,3106	-0,8	3,3	-9	3,8	0,9	3	T.bon

$N = 17$  Tolérance sur  $ri$  : 20 cm (ordinaire), 4 cm (précision)

Écart quadratique moyen sur toutes les visées (orientation + intersection) : 0,9 mgon

Tolérance sur  $Emq$  :  
– précision  $0,7(\sqrt{2N-3} + 2,58)/\sqrt{2N} = 1,0$  mgon  
– ordinaire  $1,7(\sqrt{2N-3} + 2,58)/\sqrt{2N} = 2,4$  mgon

Écart linéaire : rayon quadratique moyen d'indécision  $Rmq$  : 3,9 cm

Tolérance sur  $Rmq$  :  
– précision 2,5 cm (pris usuellement)  
– ordinaire 12 cm

#### (5) Système à résoudre

$$\begin{aligned} A dx + B dy + C &= 0 & dx &= -0,031 \text{ m } (B \cdot E - C \cdot D) / (A \cdot D - B^2) \\ B dx + D dy + E &= 0 & dy &= 0,042 \text{ m } (B \cdot C - A \cdot E) / (A \cdot D - B^2) \\ A &= 79,6446 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(nj \cdot (\cos Gj / Dj)^2) \\ B &= 11,9591 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(nj \cdot \sin Gj \cdot \cos Gj / Dj) \\ C &= 1,9312 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(nj \cdot \Delta j \cdot \cos Gj / Dj) \\ D &= 91,4577 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(nj \cdot (\sin Gj / Dj)^2) \\ E &= -3,4799 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(nj \cdot \Delta j \cdot \sin Gj / Dj) \end{aligned}$$

#### ◆ résolution graphique



L'environnement de travail identique à celui du paragraphe 4.3.

#### 1 - Dessin des lignes de visée

Créez les calques 602, 606, 607 et 608 de couleurs différentes et rendez les successivement courants : les lignes tracées font 3 500 m de long (valeur quelconque, suffisamment grande pour que ces lignes se croisent).

Calque 602 : *LIGNE* du point 982133.65,155623.87 au point @3500 < 210.8382.

Calque 606 : *LIGNE* du point 984301.79,154001.38 au point @3500 < 270.0437.

Calque 607 : *LIGNE* du point 983131.67,150688.88 au point @3500 < 358.0015.

Calque 608 : *LIGNE* du point 978865.6,152564.34 au point @3500 < 98.3098.

#### 2 - Visualisation des points doubles :

*ZOOM* *Fenêtre* (plusieurs fois) jusqu'à voir la zone d'indécision (voir fig. 1.38.).

La commande *ID* permet d'obtenir les coordonnées de tous les points doubles (*INTERSECTION de...*).

#### 3 - Réduction de la zone d'indécision :

DECALER par < valeur de la demi-plage > choix de l'objet <cliquez sur une visée> vers <choisir le côté vers lequel s'effectue le décalage en cliquant avec la souris>.

Répétez cette opération pour toutes les visées.

Placez le point M en dessinant un point (voir fig. 1.39.) et lire ses coordonnées par *ID* *NODal de...*

# 6 LE RELÈVEMENT

Plus complexe que les deux méthodes précédentes, le relèvement reste plus simple à réaliser sur le terrain puisqu'il ne nécessite qu'une seule station. La précision des visées angulaires étant meilleure pour des visées lointaines, c'est la méthode idéale pour de longues visées sans possibilité de mesure de distance.

## 6.1 Coordonnées approchées à partir de trois visées

On détermine les coordonnées d'un point approché  $M_o$  à partir de trois visées de relèvement correctement choisies : elles doivent être longues et bien réparties autour du point cherché  $M$  et doivent se couper sous un angle favorable (proche de 100 gon) mais en évitant les couples de visées parallèles.

Les coordonnées du point approché  $M_o$  sont calculées à partir des formules de Delambre pour le relèvement, c'est-à-dire :

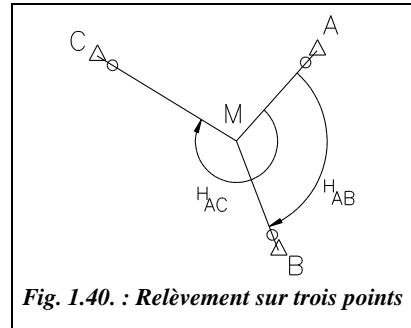


Fig. 1.40. : Relèvement sur trois points

$$\begin{aligned}\tan G_{AM} &= \frac{(X_B - X_A) \cdot \cotan H_{AB} - (X_C - X_A) \cdot \cotan H_{AC} + (Y_C - Y_B)}{(Y_B - Y_A) \cdot \cotan H_{AB} - (Y_C - Y_A) \cdot \cotan H_{AC} - (X_C - X_B)} \\ \tan G_{BM} &= \tan(G_{AM} + H_{AB}) = \frac{\tan G_{AM} + \tan H_{AB}}{1 - \tan G_{AM} \cdot \tan H_{AB}}\end{aligned}$$

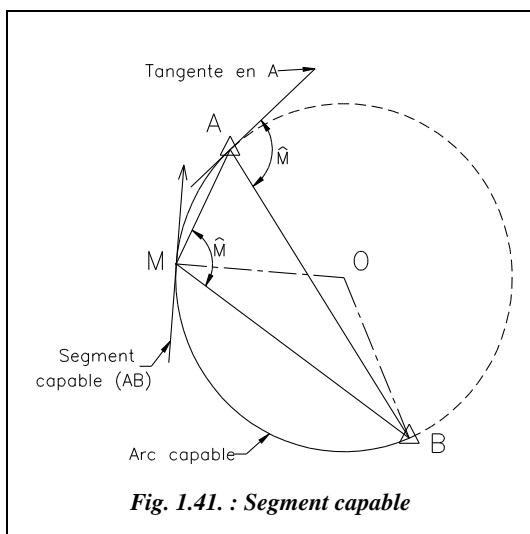
On reporte ensuite ces résultats dans les formules de Delambre utilisées pour l'intersection (voir démonstration et cas particuliers au chapitre 4, paragraphe 6).

## 6.2 Conventions et définitions

Les notions suivantes ont déjà été détaillées.

- **Arc capable** : voir le relèvement simple sur trois points (chapitre 4, § 6.).
- **Gisement approché d'une visée** : voir l'intersection (§ 5.2.3.).
- **Sensibilité et déplacement d'une visée** : voir l'intersection (§ 5.2.5.).
- **Écarts d'orientation et écart moyen quadratique d'orientation** : voir l'intersection (§ 5.2.8. et 5.2.9.).
- **Écarts linéaires et rayon moyen quadratique d'indécision** : voir l'intersection (§ 5.2.10. et 5.2.11.).

## 6.2.1 Segment capable



L'arc capable  $\widehat{AB}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que l'angle  $\widehat{AMB}$  ait une valeur donnée  $\widehat{M}$ . Aux alentours immédiats d'un point  $M$  quelconque de l'arc capable, on peut confondre une petite portion de l'arc avec un segment de sa tangente.

Ce segment noté  $(AB)$  est appelé segment capable (fig. 1.41.).

Le dessin et l'orientation des segments capables sont déterminés par leurs gisements (voir § 6.2.3). Ceci permet donc de les dessiner tous dans un repère centré en  $M_0$  calculé précédemment.

Le nombre de segments capables à tracer est une combinaison des  $n$  visées de relèvement effectuées depuis  $M$  prises deux à deux, soit  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  segments capables.

## 6.2.2 Points triples

Chaque point approché  $M_0$  étant déterminé à partir de trois des  $n$  points d'appui, le nombre de points approchés possibles est une combinaison des  $n$  visées prises trois à trois, soit  $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  « points triples » possibles.

Sur le graphique final, on vérifie que les segments capables placés se coupent trois à trois, d'où le nom de « points triples » pour les différents points approchés. Par exemple, pour  $n = 4$ , on obtient six segments capables et quatre points triples.

## 6.2.3 Gisement d'un segment capable

Le gisement du segment capable associé aux points  $I$  et  $J$  est noté  $G_{(IJ)}$ .

Sa valeur permet d'orienter le segment capable dessiné sur le graphique (de manière à déterminer le sens de son décalage ultérieur ; voir § 6.2.6). Étant donnée la précision de la construction graphique, on peut arrondir leur valeur au décigrade.

L'expression de  $G_{(IJ)}$  est déterminée comme suit : on retrouve l'angle IJMo noté  $\hat{A}$ , entre le segment capable tangent en Mo et la corde IMo.

Autour de Mo, on peut écrire :

$$G_{(IJ)} = G_{MoI} - \hat{A}$$

Autour de J, on peut écrire :

$$G_{JMo} + \hat{A} = G_{IJ} + 200$$

On obtient donc pour le gisement du segment capable IJ :

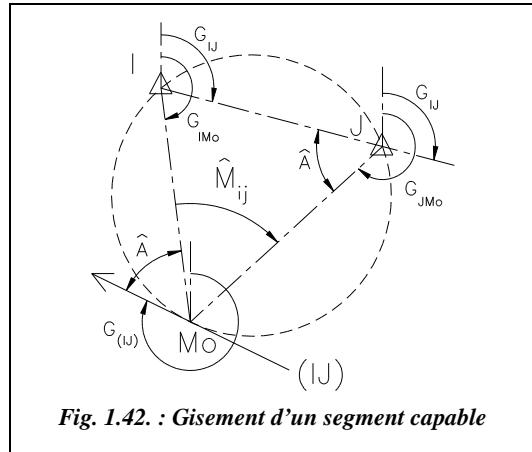


Fig. 1.42. : Gisement d'un segment capable

$$G_{(IJ)} = G_{IMo} + G_{JMo} - G_{IJ}$$

#### 6.2.4 Angle de relèvement observé

C'est l'angle  $\widehat{IMJ}$  déduit des observations du tour d'horizon effectué en M, soit deux lectures sur deux points I et J pris dans le sens direct des graduations.

$M_{IJ}$  est un angle orienté. Il s'exprime ainsi :

$$M_{IJ \text{ obs}} = Lj - Li$$

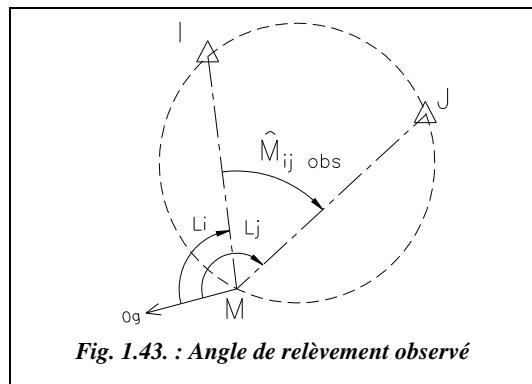


Fig. 1.43. : Angle de relèvement observé

#### 6.2.5 Angle de relèvement approché

C'est l'angle de relèvement calculé à partir des gisements approchés des visées. Pour le calculer, il faut donc tout d'abord calculer les gisements approchés  $G_{app}$  de chaque point sur Mo. Il vient ensuite (fig. 1.44.) :

$$M_{IJ \text{ app}} = G_{JMo} - G_{IMo}$$

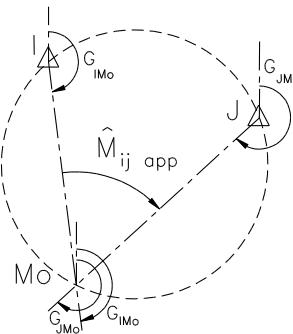


Fig. 1.44. : Angle de relèvement approché

### 6.2.6 Différence d'angles de relèvement

C'est l'écart entre l'angle de relèvement observé et l'angle de relèvement approché, c'est-à-dire :

$$\Delta = M_{IJ \text{ obs}} - M_{IJ \text{ app}}$$

$\Delta$  est nul pour les segments passant par le point Mo, c'est-à-dire les trois segments capables issus des trois points utilisés pour le calcul du point approché Mo.

La valeur de  $\Delta$  permet de calculer le déplacement à faire subir aux segments capables ne passant pas par Mo. Le signe de  $\Delta$  donne la direction du déplacement (fig. 1.45.).

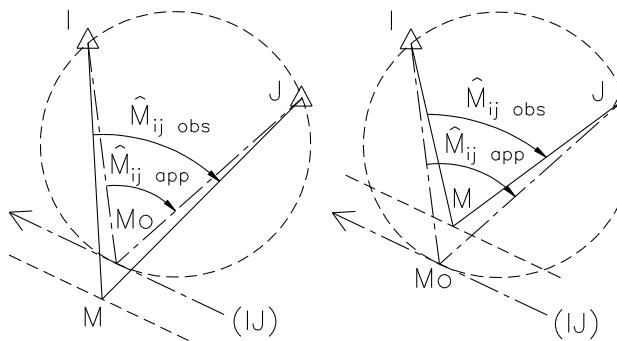


Fig. 1.45. : Différence d'angles de relèvement

Si  $M_{IJ \text{ obs}} < M_{IJ \text{ app}}$  alors  $\Delta < 0$  : le segment capable doit être décalé vers sa gauche.

Si  $M_{IJ \text{ obs}} > M_{IJ \text{ app}}$  alors  $\Delta > 0$  : le segment capable doit être décalé vers sa droite.

La convention choisie pour l'orientation du segment capable permet de retrouver les mêmes conventions que dans l'intersection ou la multilatération.

### 6.2.7 Sensibilité et déplacement d'un segment capable

Il reste à déterminer la valeur exacte du déplacement  $d$  à faire subir à chaque segment capable.

Une très petite variation  $\Delta$  de l'angle de relèvement  $\widehat{M}$  (angle IMoJ sur la figure 1.46.) donnerait un nouveau point  $M$  tel que l'angle  $\widehat{IMJ}$  soit égal à  $\widehat{M} + \Delta$ .

Le point  $M$  est le point définitif cherché, puisque :

$$\widehat{IMJ} = M_{IJapp} + \Delta = M_{IJobs}$$

Définissons le point  $M'$  à l'intersection entre l'arc capable IMoJ et le prolongement de la droite IM : on retrouve l'angle  $\Delta$  en MoJM' puisqu'il intercepte le même arc que MoIM.

Si l'on considère qu'aux alentours immédiats du point Mo le segment capable (IJ) est parallèle à la droite MoM', on peut facilement calculer le déplacement du segment capable (IJ) alors représenté par la longueur MH (voir fig. 1.47.).

#### ◆ Calcul du déplacement d

La distance HM (voir fig. 1.47.) séparant le point M du segment capable (IJ) passant par le point Mo est donc le déplacement  $d$  de ce segment capable pour une variation  $\Delta$  de l'angle de relèvement. Dans les triangles MHM' et M'PMo on peut écrire :

$$\sin C = \frac{MoP}{MoM'} = \frac{MH}{MM'} \text{ d'où } MH = MM' \cdot \frac{MoP}{MoM'}.$$

L'angle C intercepte l'arc MoI. Les triangles IJM et MMoM' étant semblables, on obtient :  $\frac{MM'}{MoM'} = \frac{D_{JM}}{D_{IJ}}$  d'où  $d = MH = MoP \cdot \frac{D_{JM}}{D_{IJ}}$ .

Or, en assimilant la corde MoP à l'arc, on obtient :  $MoP \approx D_{IMo} \cdot \Delta_{rad}$

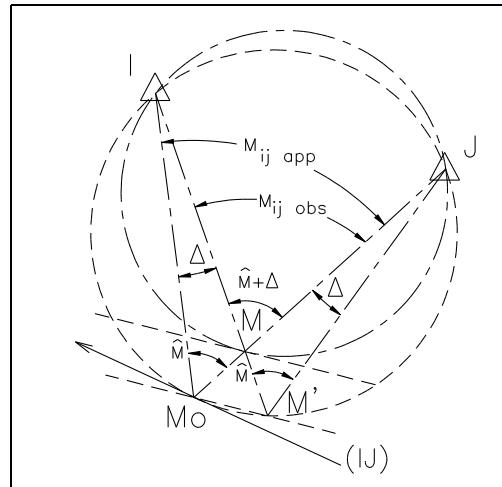
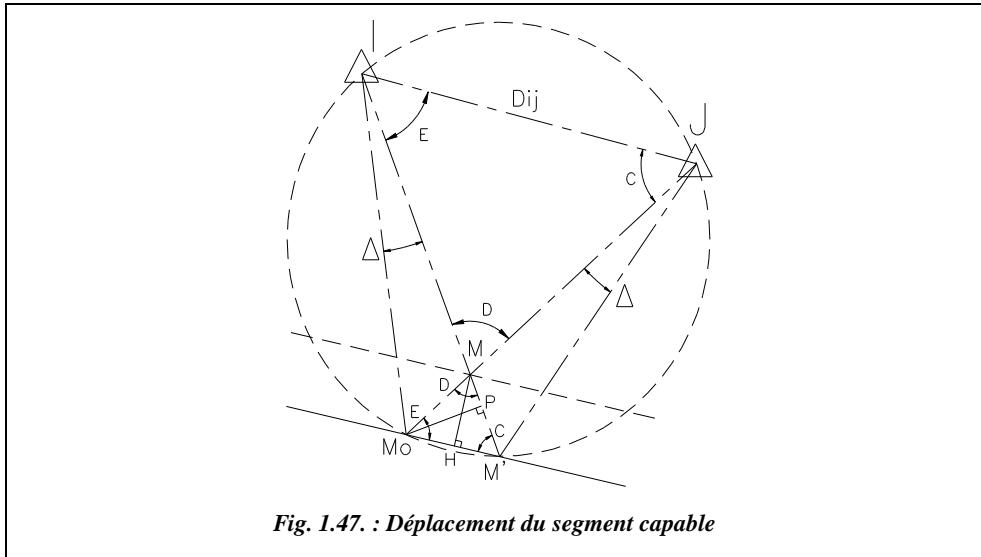


Fig. 1.46. : Point approché Mo et point définitif M



Finalement, si l'on considère que  $IM_0$  est proche de  $IM$ , on obtient l'expression suivante du déplacement  $d$  du segment capable (IJ) pour une variation  $\Delta$  de l'angle de relèvement :

$$d = \frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}} \Delta_{rad} \text{ donc } d_{cm} = 1,57 \cdot \Delta_{mgon} \left( \frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}} \right)_{km}$$

Le terme  $\frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}}$  exprimé en kilomètre, est appelé distance fictive, notée  $D_f$ , du segment capable (IJ) puisqu'il est homogène à une distance à laquelle le déplacement du segment capable est directement proportionnel.

La sensibilité du segment capable devient alors :

$$s_{cm/mgon} = 1,57 \left( \frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}} \right)_{km}$$

### 6.2.8 Construction du point définitif

Si les points triples définissent une zone trop grande, il convient de la réduire en construisant une zone d'indécision commune (pour la méthode et les calculs, voir intersection, § 5.2.6.).

Attention : la demi-plage de sensibilité est proportionnelle à la distance fictive associée au segment capable, donc :

$$t_{cm} = 1,57 \left[ \frac{D_I \cdot D_J}{D_{IJ}} \right]_{km} \cdot \varepsilon_{mgon}$$

En pratique, les demi-plages sont affectées d'un coefficient  $K$  qui englobe le coefficient 1,57 et l'angle  $\varepsilon$ , donc :

$$t_{cm} = K \left[ \frac{D_I \cdot D_J}{D_{IJ}} \right]_{km} = K \cdot Df_{km}$$

### 6.3 Exemple de calcul

Le point 62 du canevas d'ensemble ordinaire a été déterminé par relèvement à partir de cinq points d'appui (45, 46, 47, 48 et 49) situés à des distances homogènes de l'ordre de 3 km. Les données et les mesures sont reprises dans le tableau suivant :

Pts	X (m)	Y(m)	L (gon)
<b>45</b>	983 695,71	3 158 247,39	0,0000
<b>46</b>	984 729,43	3 155 546,12	62,9998
<b>47</b>	984 713,53	3 153 893,58	98,6920
<b>48</b>	979 465,39	3 153 480,45	224,2876
<b>49</b>	980 546,82	3 157 468,79	326,0987

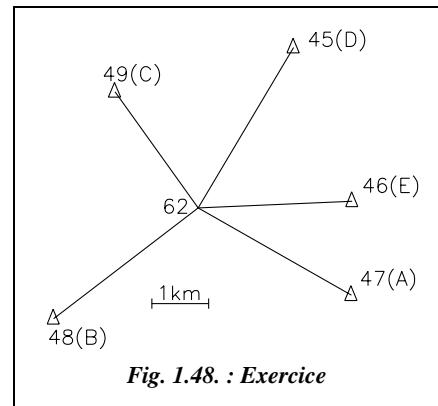


Fig. 1.48. : Exercice

Déterminez les coordonnées du point 62 (M).

La démarche de résolution conseillée est la suivante.

**1** - Réalisez un croquis du tour d'horizon à petite échelle comme sur la figure 1.48. ; pour placer approximativement le point 62, il suffit de calculer les coordonnées d'un point Mo quelconque.

**2** - Choisissez trois visées longues et homogènes, bien réparties autour de M (62) et se coupant sous des angles favorables, par exemple : 47 - 48 - 49.

Calculez les coordonnées du point Mo avec les formules de Delambre :

$$\begin{aligned} \tan G_{AM} &= -1,7597 & Mo \quad \left| \begin{array}{l} X_{Mo} = 982\ 015,41 \text{ m} \\ Y_{Mo} = 3\ 155\ 426,90 \text{ m} \end{array} \right. \\ \tan G_{BM} &= 1,3101 \end{aligned}$$

**3** - Calculez les angles de relèvement observés et approchés pour tous les couples de points (ici  $N = 5$  points d'appui, donc dix segments capables et dix points triples). Calculez les différences d'angles de relèvement  $\Delta$  ; calculez des gisements  $G_{IJ}$  et les longueurs  $D_{IJ}$  des droites joignant tous les points d'appui entre eux ; puis calculez les gisements des segments capables  $G_{(IJ)}$ . Calculez enfin les distances fictives ( $D_I \cdot D_J / D_{IJ}$ ) et les déplacements  $d$ . Vérifiez dans les calculs que :

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= \Delta_{BC} = \Delta_{AC} = 0 \\ \Delta_{DE} &= \Delta_{DA} + \Delta_{AE} = \Delta_{AE} - \Delta_{AD} \end{aligned}$$

**4** - Dessinez la zone d'indécision sur un format A4 vertical au milieu duquel figure un repère centré en Mo : reportez les segments-distances passant tous par Mo et décalez de la valeur  $d$  de tout ceux qui sont issus des points n'intervenant pas dans le calcul de Mo (fig. 1.49-a.). Repérez les points triples et construisez une zone commune aux demi-plages d'indécision de largeur  $t$  (fig. 1.49-b.).

**5** - Placez le point M puis calculer un  $G0moyen$  de station pour vérifier la validité de la manipulation.

◆ **calculs**



Les calculs ont été réalisés sur Excel à partir des tableaux suivants :

- FICHREL.XLS associé à la méthode graphique, peut aussi être utilisé vide pour présenter des calculs manuels.
- TRIANGU.XLS associé à un calcul aux moindres carrés.

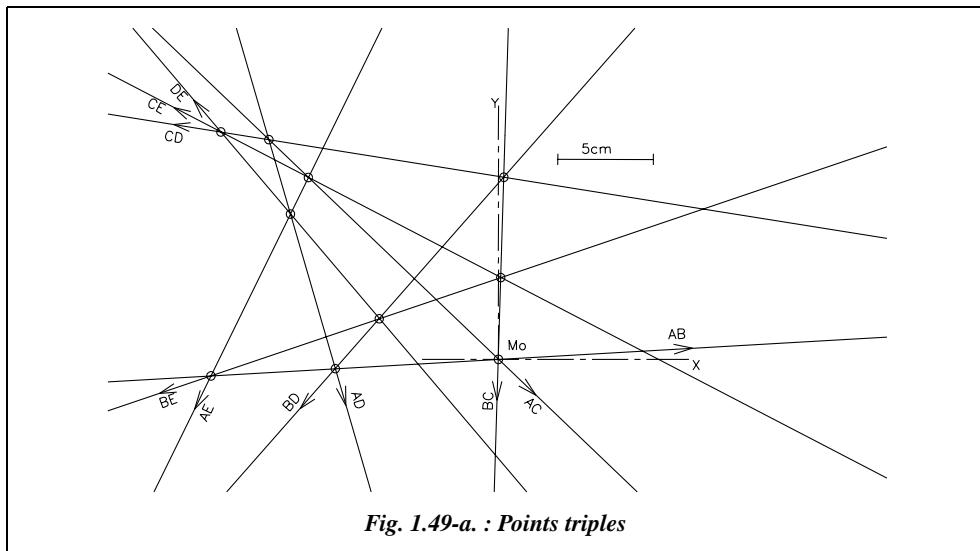
◆ **Distances et gisements approchés**

Points Pi	G <sub>app</sub> (gon) G <sub>PiMo</sub>	D <sub>i</sub> (km) Pi→Mo
<b>47 (A)</b>	332,8991	3,1
<b>48 (B)</b>	58,4947	3,2
<b>49 (C)</b>	160,3058	2,5
<b>45 (D)</b>	234,2048	3,3
<b>46 (E)</b>	297,2053	2,7

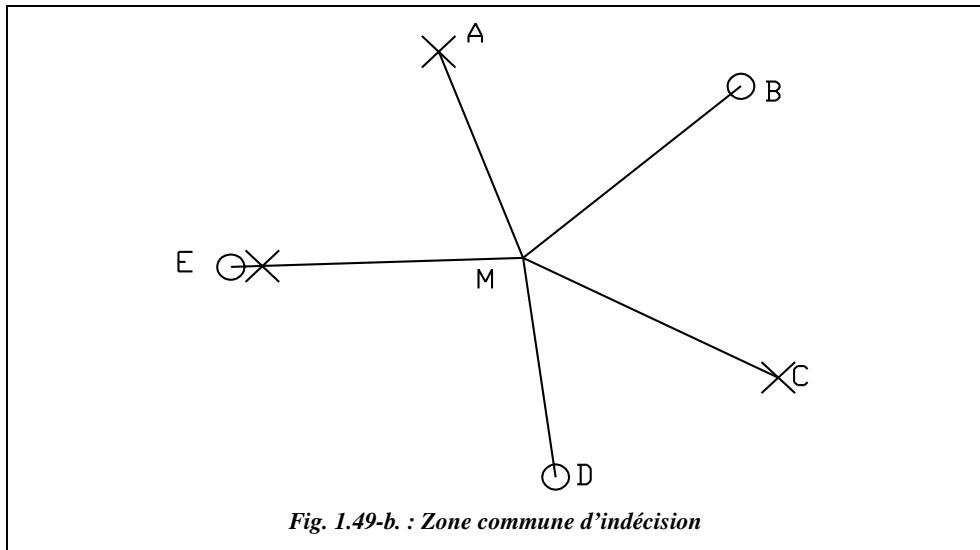
**6.3.0.1 Calcul des paramètres des dix segments capables**

Couple Pi-Pj	M <sub>i</sub> jobs H(j) – H(i)	M <sub>i</sub> app G <sub>JMo</sub> – G <sub>IMo</sub>	Δ <sub>mgon</sub>	G <sub>IJ</sub> gon	G(IJ) gon	D <sub>ij</sub> km	Dist. fict.	Déplacem. d <sub>cm</sub> 1,57.Df <sub>km</sub> .Δ <sub>mgon</sub>
<b>AB</b>	125,5956	125,5956	0,0	294,9989	96,3949	5,3	1,9	0,0
<b>AC</b>	227,4067	227,4067	0,0	345,1455	148,0594	5,5	1,4	0,0
<b>AD</b>	301,3080	301,3057	2,3	385,3799	181,7240	4,5	2,3	8,3
<b>AE</b>	364,3078	364,3062	1,6	0,6125	229,4918	1,7	5,1	13,1
<b>BC</b>	101,8111	101,8111	0,0	16,8565	201,9440	4,1	2,0	0,0
<b>BD</b>	175,7124	175,7101	2,3	46,2075	246,4919	6,4	1,7	6,0
<b>BE</b>	238,7122	238,7106	1,6	76,1938	279,5062	5,7	1,5	3,9
<b>CD</b>	73,9013	73,8990	2,3	84,5683	309,9422	3,2	2,5	9,3
<b>CE</b>	136,9011	136,8995	1,6	127,4304	330,0806	4,6	1,5	3,8
<b>DE</b>	62,9998	63,0005	-0,7	176,7324	354,6776	2,9	3,1	-3,4

◆ **Dessin de la zone d'indécision à grande échelle**



◆ **zone commune d'indécision**



Pour l'exemple, construisons les demi-plages avec  $K = 3$  : pour ne pas surcharger encore le graphique, seules les demi-plages « utiles » sont représentées ; les autres ne réduisent pas plus la zone commune d'intersection.

On mesure entre Mo et M :  $\Delta x = -0,04$  m et  $\Delta y = 0,04$  m.

Donc le point 62 (M) définitif a pour coordonnées : 62 ( 982 015,37 ; 3 155 426,94 ).

◆ **calcul de  $G0_{moyen}$  de station en 62 (M)**

Points Pi	$G_{\text{déf.}} (\text{gon})$ $G_{\text{PiM}}$	$G0i (\text{gon})$ $G_{\text{MPI}} - \text{Li}$	$ei (\text{mgon})$ $= G0i - G0$	Tolérance $ei (\text{mgon})$	$ri (\text{cm})$ $1,57 \cdot D_{\text{km}} \cdot  e_{\text{mgon}} $
<b>47 (A)</b>	332,8994	34,2074	0,8	3,9	3,9
<b>48 (B)</b>	58,4936	34,2060	-0,6	3,9	2,8
<b>49 (C)</b>	160,3060	34,2073	0,7	3,9	2,9
<b>45 (D)</b>	234,2058	34,2058	-0,8	3,9	4,1
<b>46 (E)</b>	297,2063	34,2065	-0,2	3,9	0,8

$G0_{moyen} = 34,2066$  gon

Tolérance sur  $ri$  : 20 cm

$Emq = 0,7$  mgon

Tolérance : 2,8 mgon

$Rmq = 3,5$  cm

Tolérance : 12 cm

◆ **résolution graphique**



Voir chapitre 4, paragraphe 6.4 la construction d'un point Mo relevé à partir de trois points d'appui (construction des deux arcs capables).

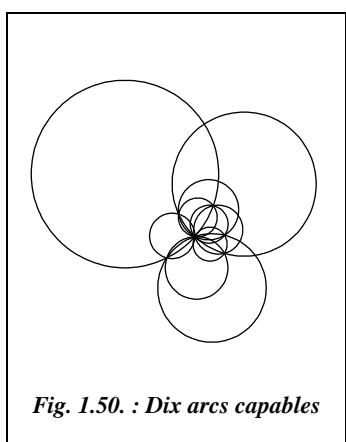


Fig. 1.50. : Dix arcs capables

Répétez cette opération pour tous les couples de points d'appui (dix segments capables à tracer) en prenant soin de placer chacun d'entre eux dans un calque différent et dans une couleur différente (fig. 1.50.).

Faites plusieurs *Zoom* dans la zone du point M (avec régénération à chaque fois de façon qu'AutoCAD recalcule les cercles, commande *REGEN*).

*DECALER* ensuite les cercles de la valeur de la demi-plage pour réduire cette zone d'indécision.

Revoyez l'exemple de la multilatération (§ 4.3.) pour l'utilisation de la commande *VUES* et pour la sortie papier.

◆ **résolution numérique par les moindres carrés**



Les calculs ci-après sont extraits du tableau TRIANGU.XLS (calcul aux moindres carrés).

## 1 - Points d'appui (mini 3, maxi 6)

Station : 62

Pi	Pt	X m	Y m	Lectures Li gon	Réduc. Hi=Li - L <sub>A</sub> gon	Gobs G <sub>0</sub> +Li gon	Gapp Mo sur Pi gon	Dr; Pi à Mo m	Δi dmgon
a	45	983 695,71	3 158 247,39	0,0000	0,0000	34,2071	34,2048	3283,08	23
b	46	984 729,43	3 155 546,12	62,9998	62,9998	97,2069	97,2053	2716,64	16
c	47	984 713,53	3 153 893,58	98,6920	98,6920	132,8991	132,8991	3103,37	0
d	48	979 465,39	3 153 480,45	224,2876	224,2876	258,4947	258,4947	3208,00	0
e	49	980 546,82	3 157 468,79	326,0987	326,0987	360,3058	360,3058	2515,17	0

n = 5 Points d'appui

D moyenne : 2965,25 m

2 - Calcul des tangentes : points choisis pour le calcul de Mo (47, 48 et 49)

$$H_{AB} = 125,5956 \text{ gon}$$

$$H_{AC} = 227,4067 \text{ gon}$$

$$\tan H_B = -2,3517$$

$$\tan G_{AM} = -1,7597$$

$$\tan G_{BM} = 1,3101$$

3 - Coordonnées du point approché Mo (Delambre)

$$G_{0o} = 34,2071 \text{ gon}$$

Le point 47 est choisi comme point A.

$$X_{Mo} = 982 015,41 \text{ m}$$

$$G_{AMo} = 332,8991 \text{ gon}$$

$$Y_{Mo} = 3 155 426,90 \text{ m}$$

$$G_{0o} = 34,2071 \text{ gon} (G_{MoA} - L_A)$$

4 - Coordonnées du point définitif M

$$G_0 = G_{0o} + dG_{0o} = 34,2066 \text{ gon}$$

$$dG_{0o} = -5 \text{ dmgon} (-DG_{0o} / Dt)$$

$$X_M = X + dx = 982 015,37 \text{ m}$$

$$dx = -0,038 \text{ m} (-Dx / Dt)$$

$$Y_M = Y + dy = 3 155 426,94 \text{ m}$$

$$dy = 0,038 \text{ m} (-Dy / Dt)$$

5 - Vérifications des tolérances

Pt	Gd <sub>é</sub> f M sur Pi gon	Hi réduits gon	G <sub>0i</sub> Gd <sub>é</sub> f - Hi gon	Écarts ei G <sub>0i</sub> - G <sub>0</sub> mgon	Toléran. sur ei Préc. mgon	Écarts ri Ordin. mgon	Toléran. sur ri Préc. cm	Ordin. cm	Bilan	
45	34,2058	0,0000	34,2058	0,8	0,9	3,9	4,1	4	20	Bon
46	97,2062	62,9998	34,2064	0,2	0,9	3,9	0,8	4	20	T.Bon
47	132,8994	98,6920	34,2074	0,8	0,9	3,9	3,9	4	20	T.Bon
48	258,4936	224,2876	34,2060	0,6	0,9	3,9	2,8	4	20	T.Bon
49	360,3060	326,0987	34,2073	0,7	0,9	3,9	2,9	4	20	T.Bon

Écart quad. moy. d'orientation : Emq 0,7 mgon Tolérance : 1,2 mgon

Rayon quad. moy. d'indécision : Rmq 3,5 cm Tolérance : 12 cm

## 6 - Système d'équations résolu (résolution matricielle)

$a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dGo + d = 0$	Matrice globale	23,404	2,593	0,040	Dét. $Dt$
$b \cdot dx + e \cdot dy + f \cdot dGo + g = 0$		2,593	35,332	0,051	0,885342
$c \cdot dx + f \cdot dy + h \cdot dGo + i = 0$		0,040	-0,051	0,001	
$a = 23,404 \cdot 10^8 \cdot \Sigma[(\cos Gj / Dj)^2]$	Matrice $dx$	0,997	2,593	0,040	Dét. $Dx$
$b = 2,593 - 10^8 \cdot \Sigma(\sin Gj \cdot \cos Gj / Dj^2)$		-1,511	35,332	-0,051	0,0338
$c = 0,040 - 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\cos Gj / Dj)$		0,010	-0,051	0,001	
$d = 0,997 - 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\cos Gj / Dj \cdot \Delta j)$	Matrice $dy$	23,404	0,997	0,040	Dét. $Dy$
$e = 35,332 \cdot 10^8 \cdot \Sigma[(\sin Gj / Dj)^2]$		2,593	-1,511	-0,051	-0,0338
$f = -0,051 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\sin Gj / Dj)$		0,040	0,010	0,001	
$g = -1,511 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\sin Gj / Dj \cdot \Delta j)$	Matr. $dGo$	23,404	2,593	0,997	Dét. $DGo$
$h = 0,001 \cdot n \cdot (\pi / 200)^2$		2,593	35,332	-1,511	4,5227
$i = 0,010 \cdot (\pi / 200)^2 \cdot \Sigma(\Delta j)$		0,040	-0,051	0,010	

## 7

# CAS PARTICULIERS DE RELÈVEMENT

Les difficultés dues au relief et autres obstacles sont parfois telles qu'il est nécessaire d'effectuer le relèvement à partir de plusieurs stations (deux, trois stations ou plus). On parle alors de relèvements multiples (ou combinés). Ce procédé peut s'avérer moins précis que le relèvement simple et ne doit donc être utilisé que s'il n'y a pas d'autre solution. En fait, avec les appareils modernes, les mesures de distances sont souvent possibles, on peut alors se contenter de deux points (voir § 9.4.).

## 7.1

### Relèvement double avec trois points d'appui par station

C'est le cas le plus simple de relèvement combiné puisqu'il ramène au cas général traité au paragraphe 6.

On choisit la station la plus fournie en visées (fig. 1.51. : station N calculée à partir des visées de relèvement sur D, E, F et G) et on la calcule en relèvement simple. Ensuite les deux cas suivants sont à distinguer.

#### 7.1.1

##### La distance MN ne peut pas être mesurée

On calcule M par relèvement simple sur N, A, B et C : ceci ne peut être acceptable en termes de calculs que si la distance MN est homogène avec les autres visées issues de M. Si ce n'est pas le cas, cette méthode ne peut s'appliquer.

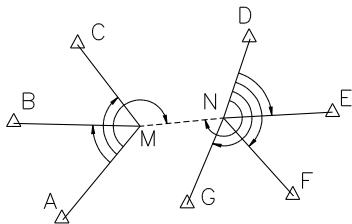


Fig. 1.51. : Distance MN inaccessible

### 7.1.2 La distance MN peut être mesurée

La distance MN doit être connue au centimètre près (voir § 10.1.3).

Par un calcul d'excentrement, l'opérateur peut ramener les lectures de la station M à la station N (pivot) qu'il calcule ensuite en relèvement classique. Les coordonnées de M sont déduites de N par rayonnement à partir du *G0moyen* de station et de la distance MN. Cette méthode s'applique donc plutôt au cas où la distance d'excentrement MN est courte vis-à-vis des autres visées.

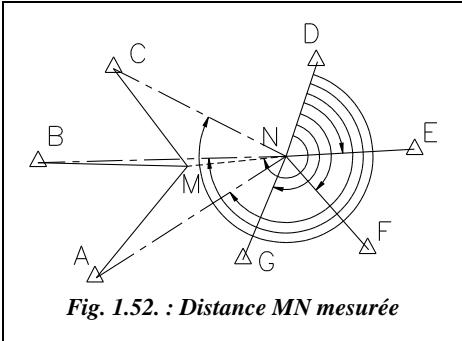


Fig. 1.52. : Distance MN mesurée

Notez que les calculs précédents s'appliquent de la même manière au cas où l'on vise trois points d'appui depuis N et deux depuis M. Attention : dans ce cas aucun contrôle n'est possible.

### 7.1.3 Applications

#### 7.1.3.1 MN n'est pas connue

Mais MN est homogène aux autres visées.



Excel 7

Calcul de N par relèvement à partir des quatre points d'appui 123, 124, 125 et 126 : ce calcul a été effectué à partir du tableau TRIANGU.XLS dont les résultats sont listés ci-après.

Coordonnées du point N :

N 1 001 486,13 m  
3 206 897,02 m

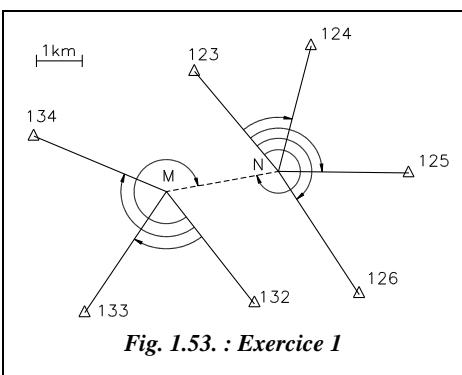


Fig. 1.53. : Exercice 1

$G0moyen_N$  : 355,8439 gon

$Emq = 0,6$  mgon

Tolérances :

2,9 mgon canevas ordinaire

1,2 mgon canevas précision

$Rmq = 2,7$  cm

Tolérances :

12 cm en canevas ordinaire

2,5 cm en canevas de précision

(valeur usuelle)

Station	Points	X (m)	Y (m)	Lect. (gon)
<b>N</b>	<b>123</b>	999 654,20	3 209 100,40	0,0000
	<b>124</b>	1 002 201,15	3 209 667,82	60,2329
	<b>125</b>	1 004 335,09	3 206 865,13	144,8692
	<b>126</b>	1 003 250,91	3 204 182,80	207,4537
	<b>M</b>			332,7148
<b>M</b>	<b>132</b>	1 000 962,09	3 203 976,47	0,000
	<b>133</b>	997 257,77	3 203 784,15	79,5149
	<b>134</b>	996 145,06	3 207 675,27	167,5169
	<b>N</b>			330,6142

Il en est de même pour le calcul de M par relèvement sur N, 132, 133 et 134 :

**M (999 038,15 m ; 3 206 452,29 m).**

$G0moyen_M$  : 157,9443 gon ;  $Emq = 0,6$  mgon ;  $Rmq = 3,1$  cm.

La distance MN est de l'ordre de 2,5 km ; elle est donc homogène aux autres visées.

### 7.1.3.2 MN est courte et peut être mesurée

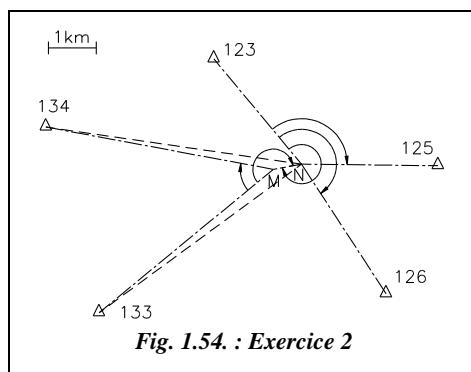
La distance MN est mesurée ; elle vaut  $MN = 602,57$ m.

Stat.	Pts	X (m)	Y (m)	Lect. (gon)
<b>N</b>	<b>123</b>	999 654,20	3 209 100,40	0,0000
	<b>125</b>	1 004 335,09	3 206 865,13	144,8692
	<b>126</b>	1 003 250,91	3 204 182,80	207,4537
	<b>M</b>			332,7148
<b>M</b>	<b>133</b>	997 257,77	3 203 784,15	0,0000
	<b>134</b>	996 145,06	3 207 675,27	55,7197
	<b>N</b>			232,5361



La résolution sur tableur est effectuée à partir du tableau RELDOU.XLS dont les résultats sont listés ci-après.

Excel 7



1 - Les coordonnées du point approché N sont déterminés par relèvement sur 123, 125 et 126 ; on obtient :

No (1 001 486,09 m ; 3 206 897,04 m)

et  $G0moyen = 355,8439$  gon.

2 - Le tableau suivant détaille le calcul d'excentrement à partir des distances au point N (§ 10.1.) : on réduit les lectures de M en N.

Station	Points visés Pi	Distances $D_{NPi}$ (m)	$L_{MP}$ (gon)	$L_{MP} - L_{MN}$ (gon)	Alpha (gon)	$L'_{NP}$	Réduction à zéro sur 123 $L_{NP}$ (gon)
<b>M</b>	<b>133</b>	5250,60	0,0000	-232,5361	3,5754	3,5754	303,7541
<b>M</b>	<b>134</b>	5397,43	55,7197	-176,8164	-2,5321	53,1876	353,3663

$D_{NP}$  est obtenue à partir des coordonnées de No (la précision du mètre est suffisante).

La réduction à zéro sur 123 donne le décalage d'origine suivant :

$$L_{NM} - (L_{MN} - 200) = 332,7148 - 32,5361 = 300,1787 \text{ gon}$$

Les angles réduits à zéro sur 123 sont donc :  $L_{NP} = L'_{NP} + 300,1787 \text{ gon}$

**3 -** Le point N est calculé par relèvement sur les points 123, 125, 126, 133 et 134 :

$$N (1\,001\,486,06 \text{ m} ; 3\,206\,897,08 \text{ m}), G0moyen = 355,8443 \text{ gon}$$

$$Emq = 0,4 \text{ mgon (tolérance précision et ordinaire : 1,2 mgon et 2,8 mgon)}$$

$$Rmq = 2,7 \text{ cm (tolérances précision et ordinaire : 2,5 cm et 12 cm).}$$

**4 -** Le point M est calculé par rayonnement depuis N :

$$G_{NM} = G0moyen + 332,7148 = 288,5590 \text{ gon}, D_{MN} = 602,57 \text{ m}$$

$$M (1\,000\,893,19 \text{ m} ; 3\,206\,789,37 \text{ m})$$

## 7.2 Relèvement double avec deux points d'appui visés par station

Comme précédemment, deux cas sont à distinguer : la distance MN est connue ou non.

### 7.2.1 Distance mn inconnue

On peut déterminer graphiquement ou par calcul les points M et N en construisant les points de Collins Q et P (fig. 1.55.).

Cette méthode ne permet toutefois aucun contrôle. Les solutions pour M et N sont uniques et la moindre erreur de manipulation donne des points faux.

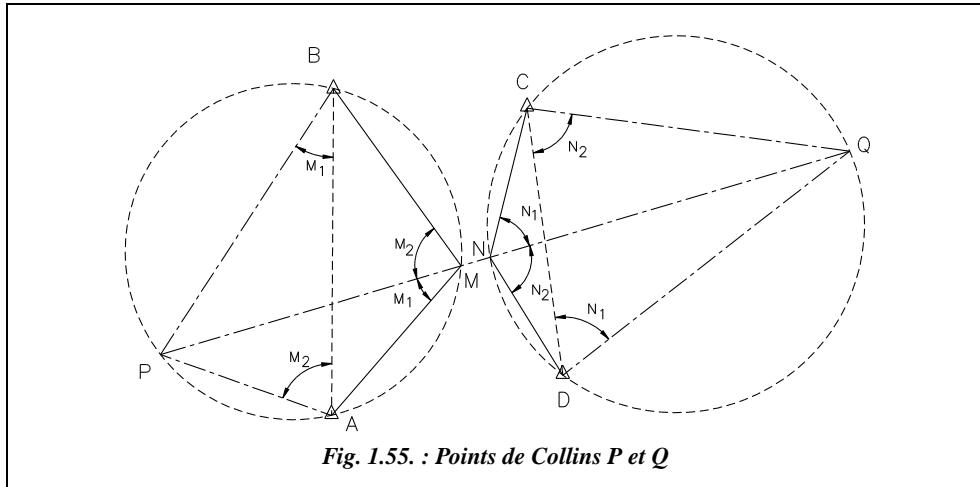


Fig. 1.55. : Points de Collins P et Q

#### ◆ résolution graphique

A partir des tours d'horizon en M et N, on calcule les angles  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  (fig. 1.55.).

Le point M est situé sur l'arc capable tel que l'angle BMA soit égal à  $M_1 + M_2$ .

Le point N est situé sur l'arc capable tel que l'angle CND soit égal à  $N_1 + N_2$ .

On peut donc tracer ces deux arcs capables (voir construction au chapitre 4 § 6.4.).

La droite MN prolongée coupe ces deux arcs en P et Q tels que :

- l'angle PBA est égal à l'angle PMA car ils interceptent le même arc. Donc l'angle PBA est égal à  $M_1$  ;
- l'angle CDQ est égal à l'angle CNQ car ils interceptent le même arc. Donc l'angle CNQ est égal à  $N_1$  ;
- de même on voit que l'angle BMP est égal à  $M_2$  et que l'angle QND est égal à  $N_2$ . Cela permet de construire P et Q et d'en déduire M et N à l'intersection de la droite QP et des deux arcs capables.

#### ◆ résolution analytique

Elle suit la démarche graphique précédente, à savoir la détermination des points Q et P desquels on déduit les points M et N. Attention : les relations suivantes sont établies pour la figure 1.55. et ne sont pas valables dans tous les cas.

- Calcul des coordonnées de P par intersection à partir de A et B :  $G_{AP} = G_{AB} - M_2$   
 $G_{BP} = G_{BA} + M_1$
- Calcul des coordonnées de Q par intersection à partir de C et D :  $G_{CQ} = G_{CD} - N_2$   
 $G_{DQ} = G_{DC} + N_1$

- Calcul du gisement de la droite MN :
- Calcul de M par intersection à partir de A et B :
- Calcul de N par intersection à partir de C et D :
- Enfin, vérification à partir des points M et N définitifs que :

$$\begin{aligned}
 G_{MN} &= G_{PQ} \\
 G_{MA} &= G_{NM} - M_1 \\
 G_{MB} &= G_{NM} + M_2 \\
 G_{NC} &= G_{MN} - N_1 \\
 G_{ND} &= G_{MN} + N_2 \\
 G_{MN} &= G_{PQ}
 \end{aligned}$$

## 7.2.2 Distance MN connue

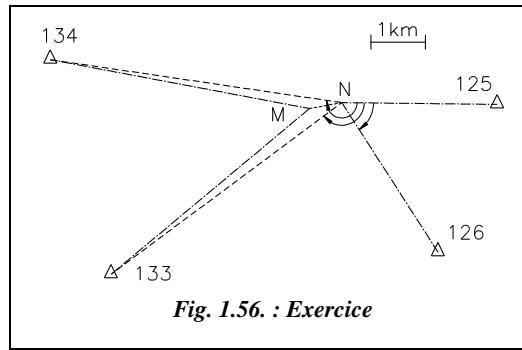
On retrouve exactement le cas de figure du paragraphe précédent mais avec une donnée supplémentaire qui est la longueur MN (dont on suppose la mesure sur le terrain exacte) et qui permettra une vérification.

Déterminez par la méthode précédente (§ 7.2.1.) un des deux points, par exemple M. Réduisez les lectures faites en N au point M (calcul d'excentrement schématisé à la figure 1.56.). Calculez enfin M par relèvement sur quatre points puis calculez N par rayonnement à partir de M.

## 7.2.3 Applications

### 7.2.3.1 MN inconnue

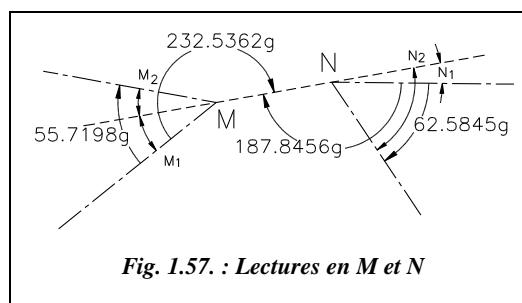
Reprenez les données du paragraphe 7.1.3.2. en retirant la lecture de N sur le point 123 (fig. 1.56.).



### 7.2.3.2 MN connue

La distance MN est connue et vaut  $MN = 602,60$  m.

Utilisez les résultats du calcul précédent pour réduire les lectures au repère M et calculez M par relèvement sur 125, 126, 133 et 134.



#### ◆ résolution graphique et analytique

1 - Calculez les angles  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  (fig. 1.57.)

$$M_1 = 232,5361 - 200 = 32,5361 \text{ gon}$$

$$M_2 = 55,7197 - M_1 = 23,1836 \text{ gon}$$

$$M_1 + M_2 = 55,7197 \text{ gon}$$

$$N_1 = 200 - 187,8456 = 12,1544 \text{ gon}$$

$$N_2 = 62,5845 + N_1 = 74,7389 \text{ gon}$$

$$N_2 - N_1 = 62,5845 \text{ gon}$$

**2 - Résolution graphique** sur AutoCAD LT du cas où  $D_{MN}$  est inconnue.



L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 4.3.

– Placez les points d'appui :

LIGNE ↴ du point 1004335.09,206865.13 ↴ au point 1003250.91,204182.80 ↴

LIGNE ↴ du point 997257.77,203784.15 ↴ au point 996145.06,207675.27 ↴

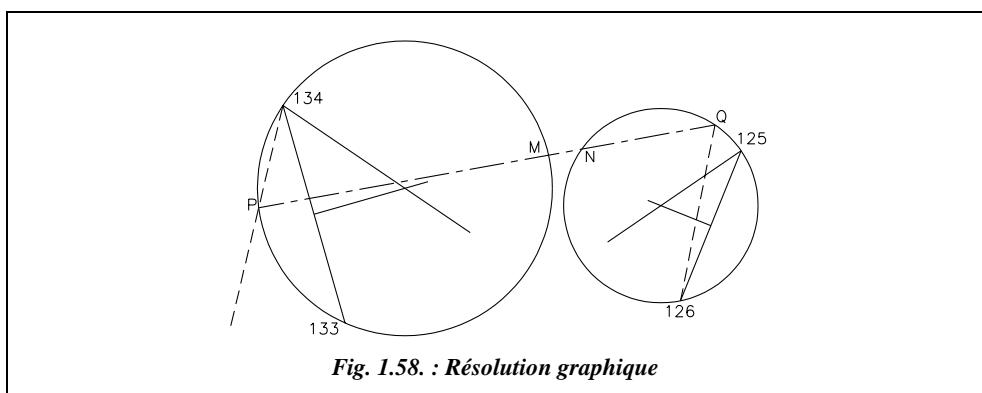


Fig. 1.58. : Résolution graphique

– Dessinez les arcs capables passant par M et N (voir méthode chapitre 4, § 6.4.).

Le premier cercle 133-134-M est déterminé par l'angle :

$$M_1 + M_2 = 55,7197 \text{ gon.}$$

Le deuxième cercle 125-126-N est déterminé par l'angle :

$$N_2 - N_1 = 62,5845 \text{ gon.}$$

– Construisez les points de Collins P et Q :

*COPIER* ↴ la droite 133-134 vers un endroit quelconque de l'écran. *ROTATION* ↴ de cette droite d'un angle de 32.5361 gon autour du point 134 (*EXTremité de...*). *DEPLACER* ↴ cette droite depuis son *EXTremité* jusqu'au point 134 (*EXTremité de...*).

Le point P est à l'intersection de la dernière droite construite et du cercle 133-134-M.

Les coordonnées de P sont : P (995 712.35 m ; 205 848.18 m).

*COPIER* ↴ la droite 125-126 vers un endroit quelconque de l'écran puis *ROTATION* ↴ d'un angle de -12.1534 gon autour du point 126 (*EXTremité de...*). *DEPLACER* ↴ cette droite depuis son *EXTremité* jusqu'au point 126 (*EXTremité de...*). *PROLONGER* ↴ la dernière droite construite jusqu'au cercle 125-126-N pour obtenir le point Q.

Les coordonnées de Q sont : Q (1 003 866,52 m ; 207 329,52 m).

– Réalisez la construction des points M et N.

*LIGNE ↴ de INTersection* (point P) à *INTersection* (point Q). Lisez les coordonnées de M et N avec *ID ↴ INTersection de..*, la distance MN *DISTANCE ↴* et le gisement MN sont donnés par la commande *LISTE ↴* (qui donne aussi les coordonnées de P et Q).

Les résultats sont les suivants :

$$\begin{array}{lll} M (1 000 893,17 m ; 206 789,36 m) & D_{MN} = 602,66 \text{ m} & D_{M-125} = 3442,75 \text{ m} \\ N (1 001 486,12 m ; 206 897,08 m) & G_{MN} = 88,5594 \text{ gon} & D_{M-126} = 3514,70 \text{ m} \end{array}$$

### 3 - Résolution analytique dans le cas où $D_{MN}$ est connue



Excel 7

On utilise les données de la résolution précédente pour réduire les lectures en M.

On choisit de réduire en M de manière à obtenir des distances de visée les plus homogènes possibles. On considère les coordonnées obtenues précédemment pour M comme approchées (Mo).

Station <b>S</b>	Points visés <b>Pi</b>	Distances <b><math>D_{MPI}</math></b> (m)	<b><math>L_{NP}</math></b> (gon)	<b><math>L_{NP} - L_{NM}</math></b> (gon)	<b>Alpha</b> (gon)	<b><math>L'_{MP}</math></b> <b><math>L_{NP} + Alpha</math></b>	Réduction à zéro sur 125 <b><math>L_{NP}</math> (gon)</b>
<b>N</b>	<b>125</b>	3442,75	144,8692	-187,8456	-2,1149	142,7543	242,5756
<b>N</b>	<b>126</b>	3514,70	207,4537	-125,2611	-10,1093	197,3444	297,1657

- Effectuez un calcul d'excentrement pour ramener les lectures de N en M.

Les formules utilisées sont les mêmes qu'au paragraphe 7.1.3.2. Le décalage d'origine est complémentaire de celui du paragraphe 7.1.3.2. :  
(400 – 300,1787 = 99,8213 gon).

- Calculez les coordonnées du point M par relèvement sur 125, 126, 133 et 134.

M (1 000 893,20 m ; 206 789,38 m)  $G0moyen = 256,0233$  gon

$Emq = 0,2$  mgon (tolérances de 1,2 mgon en précision et 2,9 mgon en ordinaire)

$Rmq = 1,5$  cm (tolérances de 2,5 cm en précision et 12 cm en ordinaire)

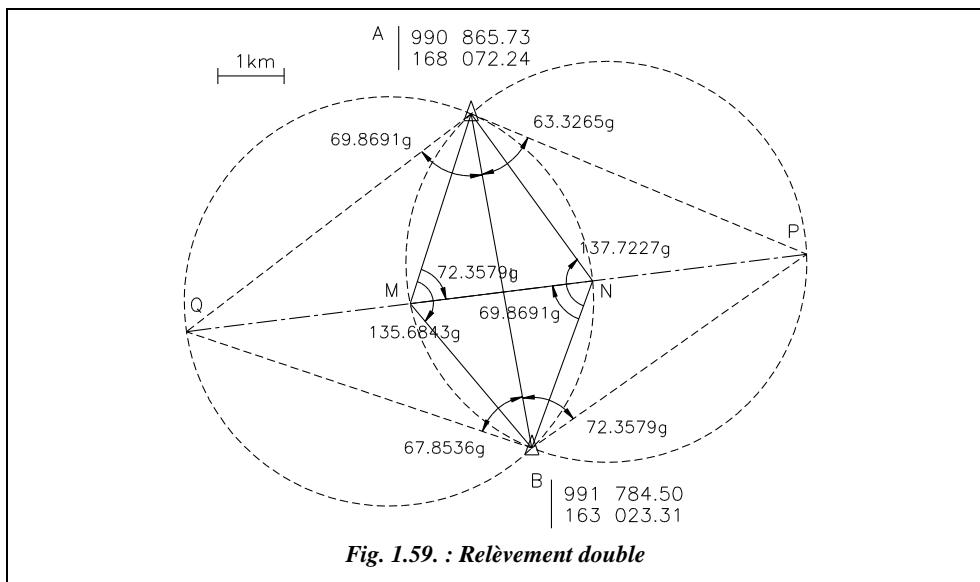
- Calculez les coordonnées du point N par rayonnement depuis M :  $G_{MN} = 88,5594$  gon,  $D_{MN} = 602,60$  m. Le résultat est N (1 001 486,10 m ; 206 897,09 m).

## 7.3 Relèvement double sur deux points d'appui

Comme dans les paragraphes précédents, on distingue deux cas : MN est connue ou non.

### 7.3.1 Distance MN inconnue

Ce cas ramène à celui du paragraphe 7.2. en construisant les arcs capables ANB et AMB, puis les points de Collins Q et P (fig. 1.59.). Calculez les coordonnées de M et N à partir des données de la figure 1.59.



On note :  $M_1 = 72,3579$  gon,  $M_2 = 63,3265$  gon,  $N_1 = 67,8536$  gon et  $N_2 = 69,8691$  gon.

**Résultats** : les coordonnées des points P, Q, M et N sont :

P ( 995 937,00 m ; 165 951,64 m )                    Q ( 986 566,23 m ; 164 781,30 m )

Le numéro de zone Lambert est volontairement omis

### 7.3.2 Distance MN connue

Les mesures de terrain donnent une distance MN qui ne sera pas égale à la valeur issue des calculs s'appuyant sur les coordonnées de A et B. Les coordonnées de A et B sont considérées comme « exactes », même si actuellement on sait mesurer la distance MN au moins au centimètre près alors que l'incertitude sur AB est souvent plus grande...

Si on calcule les coordonnées de M et N en partant des coordonnées de A et B « exactes », quelle que soit la méthode employée, on retrouve les résultats du paragraphe 7.3.1. : le résultat est indépendant de la distance mesurée MN. Cette distance sert de contrôle.

Les deux méthodes suivantes sont données à titre d'exemple de calcul car la résolution peut s'effectuer avec la méthode traitée au paragraphe précédent (points de Collins).

### 7.3.2.1 Repère local puis rotation de repère

**1** - On connaît A et B. On peut donc calculer  $D_{AB}$  et  $G_{AB}$ .

**2** - On définit un repère local  $M'x'y'$  (fig. 1.60.). Cela donne un gisement local pour le côté MN :  $G_{M'N'} = 100$  gon. On fixe arbitrairement les coordonnées de  $M'$  (par exemple :  $M' (1000 ; 1000)$ ).

On fixe une distance  $D_{M'N'}$  qui peut être quelconque. Cela donne des coordonnées fictives pour  $N'$ , par exemple :  $D_{M'N'} = 500$  m.

Donc :  $x'_{N'} = y'_{M'} + 500$  ;  $y'_{N'} = 0$ .

**3** - Connaissant les angles  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  issus des lectures aux stations M et N, on calcule les coordonnées locales  $A'$  et  $B'$  par intersection depuis  $M'$  et  $N'$ , en utilisant les gisements :

$$G_{M'A'} = 100 - M_1 ; G_{M'B'} = 100 + M_2 \\ G_{N'A'} = 300 + N_1 ; G_{N'B'} = 300 - N_2$$

**4** - On calcule le gisement  $G_{A'B'}$  ce qui donne la rotation de repère à effectuer pour passer du repère local au repère général. On en déduit donc les gisements définitifs  $G_{AM}$ ,  $G_{AN}$ ,  $G_{BM}$  et  $G_{BN}$  par rotation d'angle ( $\alpha = G_{AB} - G_{A'B'}$ ). Par exemple :  $G_{MA} = G_{M'A'} + \alpha$ .

**5** - On calcule enfin les coordonnées définitives de M et N par intersection à partir de A et B (fig. 1.61.).

Remarquez que les droites MN et  $M'N'$  sont parallèles mais  $M'$ ,  $N'$ , M et N ne sont pas alignés. La distance MN finale est très différente de celle ( $D_{M'N'}$ ) choisie arbitrairement au départ mais sa valeur est indépendante de  $D_{M'N'}$ . Ceci confirme que la distance MN mesurée sur le terrain ne sert que de contrôle.

**6** - On vérifie enfin que la différence entre la longueur MN calculée et la longueur MN mesurée ne dépasse pas la tolérance de mesure d'une distance (tolérance sur l'écart entre deux mesurages indépendants :  $T_{\text{cm}} = 3 + D_{\text{km}}$ ).

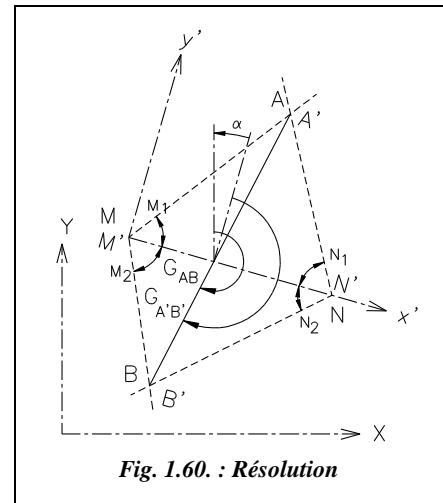


Fig. 1.60. : Résolution

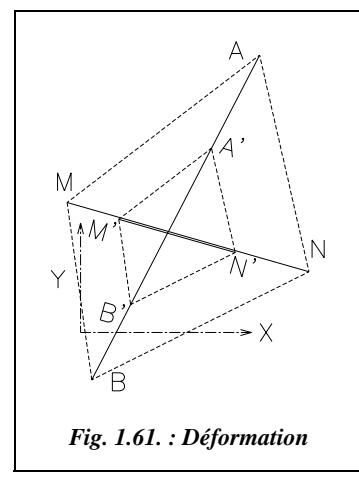


Fig. 1.61. : Déformation

### 7.3.2.2

#### Formule des cotangentes

Les quatre angles  $a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$  sont connus (fig. 1.62.). Ils sont comptés depuis la droite MN vers les directions MA, MB, NA et NB positifs dans le sens des gisements.

La formule suivante donne directement l'angle  $\alpha$  :

$$\cotan \alpha = \frac{\cotan a_1 \cdot \cotan b_2 - \cotan b_1 \cdot \cotan a_2}{\cotan a_1 + \cotan b_2 - \cotan b_1 - \cotan a_2}$$

L'angle  $\alpha$  permet de calculer  $G_{MN}$  :

$$G_{MN} = G_{AB} - \alpha$$

Le quadrilatère AMBN, solution du problème, n'est pas unique. Tous les quadrilatères homothétiques de AMBN sont solutions.

Si on fixe la distance AB (ou MN), la solution est alors unique.

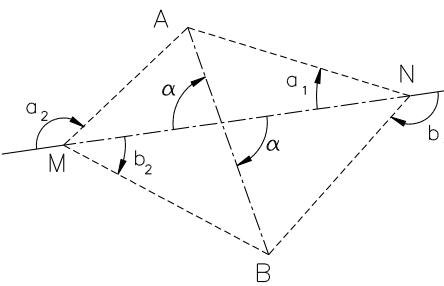


Fig. 1.62. : Formule des cotangentes

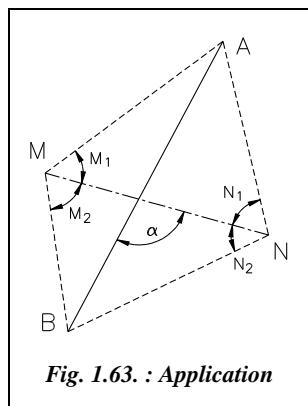


Fig. 1.63. : Application

En adaptant cette formule à la notation adoptée au paragraphe 7.2.1. (fig. 1.63.), il vient :

$$\cotan \alpha = \frac{\cotan N_1 \cdot \cotan M_2 - \cotan M_1 \cdot \cotan N_2}{\cotan N_1 + \cotan M_2 + \cotan M_1 + \cotan N_2}$$

On utilise le fait que :  $\cotan(200 - \alpha) = -\cot \alpha$

### 7.3.3 Application

Calculer les coordonnées des points M et N à partir des données du paragraphe 7.3.1. de manière à comparer toutes les méthodes détaillées dans le cas où la distance MN est connue :  $MN = 2\ 777,69$  m.

**a) Dans le repère local M'x'y'** : la distance M'N' est fixée arbitrairement à 500 m. Les calculs sont détaillés dans le tableau ci-après.

Points	X (m)	Y (m)	D (m)	G (gon)
<b>A</b>	990 865,73	168 072,24		
<b>B</b>	991 784,50	163 023,31	5 131,84	188,5406
<b>M'</b>	1 000,00	1 000,00		
<b>N'</b>	1 500,00	1 000,00	500,00	100,0000
Points	X (m)	Y (m)	D <sub>A'B'</sub> (m)	G <sub>A'B'</sub> (gon)
$G_{M'A} = 100 - M_1$ $G_{N'A} = 300 + N_1$	27,6421 367,8536	<b>A'</b>	1228,10	1491,90
$G_{M'B'} = 100 + M_2$ $G_{N'B'} = 300 - N_2$	163,3265 230,1309	<b>B'</b>	1279,58	569,59
				923,75      196,4505

$G_{AB} - G_{A'B'} =$	-7,9099	gon
Points	X (m)	Y (m)
$G_{MA} =$ $G_{MB} =$	19,7322 155,4166	<b>M</b>
$G_{NA} =$ $G_{NB} =$	359,9437 222,2210	<b>N</b>
	989 946,95 992 703,28	165 203,53 165 547,77
		2 777,74      92,0901

On retrouve les résultats du paragraphe 7.3.1. L'écart entre la distance MN calculée et celle mesurée est de 5 cm, ce qui est inférieur à la tolérance ( $T = 3 + 2,7 = 5,7$  cm).

### b) Calcul par mise à l'échelle

Le tableau suivant détaille le calcul par changement d'échelle.

$$D_{AB} = 5 131,84 \text{ m} \quad m = D_{AB} / D_{A'B'} = 5,555471$$

$$D_{A'B'} = 923,75 \text{ m}$$

Point	X (m)	Y (m)	D (m)	G (gon)
<b>M</b>	989 946,95	165 203,53		
<b>N</b>	992 703,28	165 547,77	2 777,74	92,0901
<b>M</b>	989 946,95	165 203,53		
<b>N</b>	992 703,28	165 547,77	2 777,74	92,0901

Les coordonnées de M et N sont ici calculées par rayonnement (deux fois pour contrôle).

### c) Calcul direct par la formule des cotangentes

L'application de la formule (§ 7.3.2.2.) donne directement l'orientation de la droite MN par rapport à celle de la droite AB :  $G_{AB} = 188,5406$  gon

$$\cotan \alpha = 0,055813 \text{ d'où } \alpha = 96,4505 \text{ gon}$$

$$G_{MN} = G_{AB} - \alpha = 92,0901 \text{ gon}$$

Connaissant l'orientation de la droite MN, il reste à calculer les coordonnées de M et N par intersection à partir de A et B. Les résultats sont identiques à ceux des deux méthodes précédentes.



Excel 7

Tout ces calculs peuvent être réalisés sur le tableau RELDOU.XLS (pour Excel) fourni sur le cédérom de l'ouvrage.

#### ◆ résolution graphique



AutoCAD LT

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 4.3.

– **Dessin de la droite M'N' :** *LIGNE* ↴ du point 1000,1000 ↴ au point @2000,0 ↴ (on fixe ici une distance arbitraire de départ entre M' et N' de 2 000 m).

*Zoom* ↴ *Etendu* ↴ suivi de *Zoom* ↴ 0.8X ↴ pour obtenir l'ensemble du dessin à l'écran.

– **Direction M'A', M'B', N'A' et N'B' :** *COPIER* ↴ la droite M'N' vers un point quelconque de l'écran et la faire tourner autour d'une de ses *EXTrémités* d'un angle de -72.3579 ↴ puis *DEPLACER* ↴ la copie de son *EXTrémité* vers le point M (*EXTrémité* de...). Cela donne la direction M'A'.

Procédez de même pour construire M'B' à partir de M'A' (rotation de +135.6843 ↴).

Procédez de même pour obtenir N'B' (*COPIER* ↴ puis *ROTATION* ↴ de M'N' d'un angle de -9.8691 ↴) puis N'A' (*COPIER* ↴ puis *ROTATION* ↴ de N'B' de 137.7227 ↴).

– **Construction de A' et B' :** *CHNFREIN* ↴ *Ecarts* ↴ 0 ↴ entre les direction M'A' et N'A' puis entre M'B' et N'B'. Vérifiez les coordonnées de A' et B' avec la commande *ID* ↴ *INTersection* de...

– **Dessin de la droite AB et mise en place de M' et N' :** *DEPLACER* ↴ l'ensemble du dessin (sélection *TOUT* ↴) du point A' vers le point 990865.73,168072.24 ↴. *LIGNE* ↴ du point @0,0 ↴ (A étant le dernier point entré) au point 991784.5,163023.31 ↴.

*Zoom* ↴ *Etendu* ↴ suivi de *Zoom* ↴ 0.8X ↴ pour voir l'ensemble de la figure 1.64.

– **Rotation de A'B' vers AB :** *ROTATION* ↴ des droites M'A', M'B', N'A' et N'B' autour du point A (*EXTrémité* de...) option *Référence* ↴ : donnez comme référence la droite A'B'

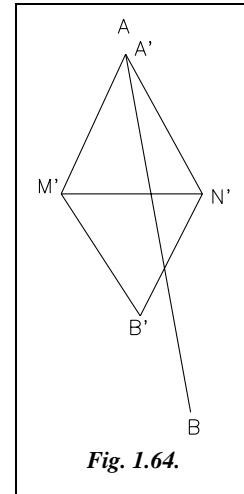


Fig. 1.64.

par *EXTrémité de...*(point A') puis *EXTrémité de...* (point B') puis donnez comme nouvel angle la droite AB par *EXTrémité de...* (point B).

– **Mise à l'échelle de A'B' vers AB** : *ECHELLE* des droites M'A', M'B', N'A' et N'B' (dont on peut rappeler la sélection en répondant *p* pour précédent à la question <choix des objets>) par rapport au point A', option *Référence*, longueur de référence : A'B' (*EXTrémité de..*), nouvelle longueur : donnez le point B (*EXTrémité de..*).

– **Résultats** : lire les coordonnées de M et N avec *ID* *EXTrémité de...*

On vérifie à nouveau ici que le résultat est indépendant de la distance MN mesurée et de la distance M'N' arbitraire fixée au départ (ici 2 000 m).

## 7.4 Relèvement triple

On stationne dans ce cas trois points M, N et O depuis lesquels il faut au minimum viser cinq points d'appui A, B, C, D et E (fig. 1.65.). On note M', N' et O' les points de Collins associés à M, N et O. La détermination unique et donc sans contrôle des points stationnés M, N et O se fait ainsi :

- M' calculé par intersection depuis A et B ;
- O' calculé par intersection depuis D et E ;
- N' calculé par intersection depuis M' et O'.

Le point N est alors sur la droite CN' à l'intersection avec le cercle M'N'O'. On le calcule par intersection à partir de C et M' (ou bien de C et O'), le gisement de la droite CN' étant maintenant connu.

De la même manière, on calcule M sur la droite M'N à l'intersection avec le cercle AM'B et O sur la droite NO' à l'intersection avec le cercle DO'E.

La résolution analytique fait donc appel aux mêmes principes que le relèvement double traité au paragraphe 7.3.1. Les calculs sont bien sûr plus longs.

La résolution graphique convient mieux à ce type de problème (voir l'exercice suivant).

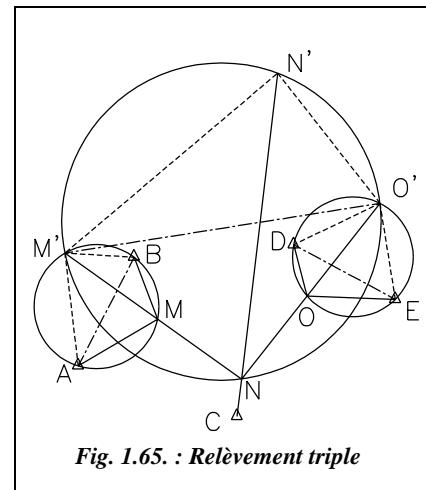


Fig. 1.65. : Relèvement triple

### Application

Calculez les coordonnées des trois stations M, N et O d'un relèvement triple en fonction des données suivantes. Le numéro de zone Lambert (3) n'est pas ajouté aux ordonnées.

Points	X (m)	Y (m)
<b>A</b>	995 567,85	184 601,18
<b>B</b>	996 804,38	187 016,81
<b>C</b>	999 075,85	183 476,02
<b>D</b>	1 000 325,20	187 294,66
<b>E</b>	1 002 570,84	186 079,64

Station	Point visé	Lecture (gon)	Station	Point visé	Lecture (gon)	Station	Point visé	Lecture (gon)
<b>M</b>	<b>A</b>	0,0000	<b>N</b>	<b>C</b>	0,0000	<b>O</b>	<b>D</b>	0,0000
	<b>B</b>	111,2889		<b>M</b>	132,1685		<b>E</b>	118,5958
	<b>N</b>	273,7079		<b>O</b>	234,8508		<b>N</b>	258,3628

#### ◆ résolution graphique



L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 4.3.

Nous allons utiliser ici une méthode ne faisant pas intervenir le tracé des arcs capables. Cela nécessite en contrepartie les calculs suivants pour obtenir les angles nécessaires :

$$M_1 = 73,7079 \text{ gon}, M_2 = 37,5810 \text{ gon}$$

$$N_1 = 34,8508 \text{ gon}, N_2 = 67,8315 \text{ gon}$$

$$O_1 = 58,3628 \text{ gon}, O_2 = 60,2330 \text{ gon}$$

#### – Dessin des points d'appui

POINT ↴

995567.85,184601.18 ↴

996804.38,187016.8 ↴

999075.85,183476.02 ↴

1000325.2,187294.65 ↴

1002571.29,186080.08 ↴

#### – Construction des points de Collins : M', N' et O'.

LIGNE ↴ du point A (NODal de...) au point B (NODal de...)

ROTATION ↴ de cette ligne autour de A d'un angle - 37,581 ↴

Redessinez la droite AB (LIGNE ↴ du point A au point B).

ROTATION ↴ de AB autour de B d'un angle 73,7079 ↴

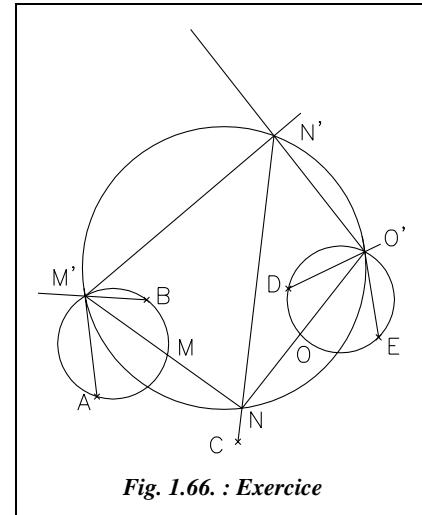


Fig. 1.66. : Exercice

On obtient  $M'$  à l'intersection des 2 droites précédentes :  $M'$  (995 272.56 , 187 109.01).

On peut tracer le cercle  $AM'B$  : *CERCLE* ↳ par 3Points ↳.

Même principe pour la construction de  $O'$  puis de  $N'$

– dessinez la droite  $DE$  puis effectuez une rotation autour de  $D$  d'un angle de  $-58.3628$ .

– dessinez la droite  $DE$  puis effectuez une rotation autour de  $E$  d'un angle de  $60.2330$ .  
Résultat :  $O'$  (1 002 230.37 , 188 215.40). Dessinez cercle  $DO'E$ .

Dessin de la droite  $M'O'$  puis rotation autour de  $M'$  d'un angle de  $-34.8508$ . Dessin de  $M'O'$  puis rotation autour de  $O'$  d'un angle de  $67.8315$ . Résultat :  $N'$  (999 971.37 , 191 108.15). Dessin du cercle  $M'N'O'$ .

– **Construction des stations N, M et O :**

*LIGNE* ↳ du point  $N'$  (*INTERsection* de...) au point  $C$  (*NODal* de...) : cela donne  $N$  (999 173.87 , 184 311.41)

*LIGNE* ↳ du point  $M'$  (*INTERsection* de...) au point  $N$  (*INTERsection* de...) : cela donne  $M$  (997 319.66 , 185 641.05)

*LIGNE* ↳ du point  $O'$  (*INTERsection* de...) au point  $N$  (*INTERsection* de...) : cela donne  $O$  (1 000 618.77 , 186 156.94)

## 7.5 Relèvement quadruple en forme de cheminement

On peut étendre le cas de figure précédent (voir fig. 1.65.) à un **cheminement** sur quatre stations  $M, N, O$  et  $P$  depuis lesquelles on vise six points connus  $A, B, C, D, E$  et  $F$  (fig. 1.67.).

On peut procéder de deux manières différentes.

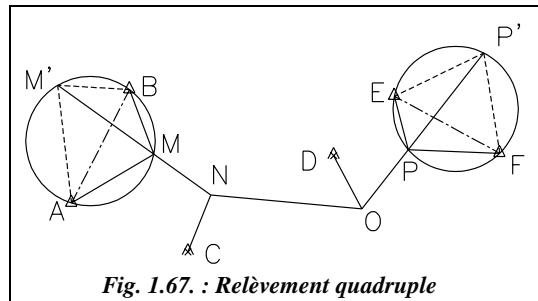


Fig. 1.67. : Relèvement quadruple

### 1 - On ramène le problème à un relèvement double.

$M'$  est calculé par intersection à partir de  $A$  et  $B$ .  $P'$  est calculé par intersection à partir de  $E$  et  $F$ .  $N$  et  $O$  sont ensuite calculés par relèvement double (§ 7.2.) à partir des visées sur  $M'$ ,  $C$ ,  $D$  et  $P'$ .

### 2 - On procède de proche en proche (fig. 1.68.).

$M'$  est calculé par intersection à partir de  $A$  et  $B$ .

$N'$  est calculé par intersection à partir de  $M'$  et  $C$ .

$O'$  est calculé par intersection à partir de  $N'$  et  $D$ .

$P$  est alors calculé par **relèvement sur trois points** :  $O', E, F$ .

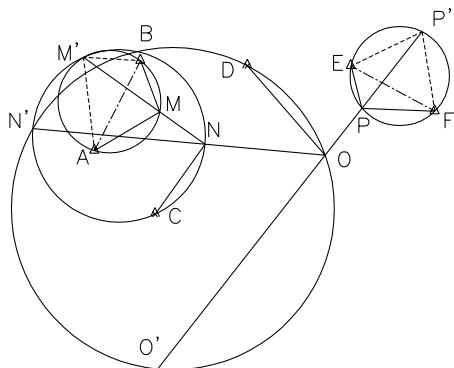


Fig. 1.68. : Résolution du relèvement quadruple

Cette dernière résolution laisse entrevoir un cas général de résolution pour tous les relèvements de ce type en forme de cheminement : il suffit de viser deux points d'appui au départ, un point d'appui par station intermédiaire et deux points d'appui à l'arrivée pour obtenir une solution unique quel que soit le nombre de stations... On peut en déduire que, pour un nombre  $n$  de stations, il faut au moins  $(n + 2)$  points d'appui.

## 7.6 Relèvement quadruple en étoile

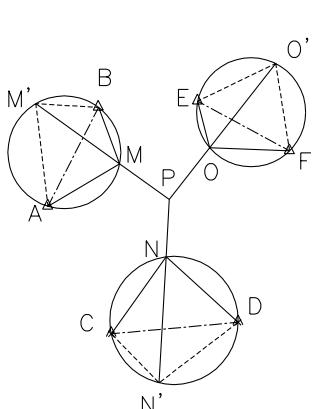


Fig. 1.69. : Relèvement quadruple

Les quatre stations M, N, O et P de ce relèvement (fig. 1.69.) sont disposées en forme d'étoile. Si de chaque station M, N et O, on vise deux points d'appui, la solution est unique :

- M' est calculé par intersection depuis A et B ;
- N' est calculé par intersection depuis C et D ;
- O' est calculé par intersection depuis E et F.

Enfin P est calculé par relèvement sur trois points : M', N' et O'.

On peut étendre ce raisonnement à tous les relèvements multiples en forme de cheminement comportant des embranchements. Par réduction successive (méthode de proche en proche traitée au paragraphe 7.5.), on ramène le problème au cas ci-dessus.

De même que précédemment (§ 7.5.), pour un nombre  $n$  de stations, il faut au minimum  $(n + 2)$  points d'appui.

## 7.7 Relèvements multiples formant une boucle

On ramène le problème au cas du paragraphe 7.5., le cheminement envisagé étant fermé (par exemple le triangle MNO, fig. 1.70-a.).

**1 - Solution directe** (fig. 1.70-a.).

$M'$  et  $M''$  sont calculés par intersection depuis A et B.

O et N sont calculés en relèvement double à partir de  $M'$  et D (pour O) et à partir de  $M''$  et C (pour N).

**2 - Solution de proche en proche** (fig. 1.70-b.).

$M'$  est calculé par intersection depuis A et B.

$N'$  est calculé par intersection depuis C et  $M'$ .

$O'$  est calculé par intersection depuis D et  $N'$ .

Finalement, M est relevé sur A, B et  $O'$ .

En conclusion, tous les cas de figure ne peuvent être envisagés, mais leur résolution fait appel aux principes de base traités dans ce chapitre.

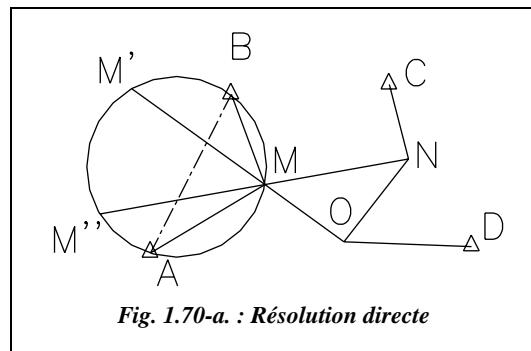


Fig. 1.70-a. : Résolution directe

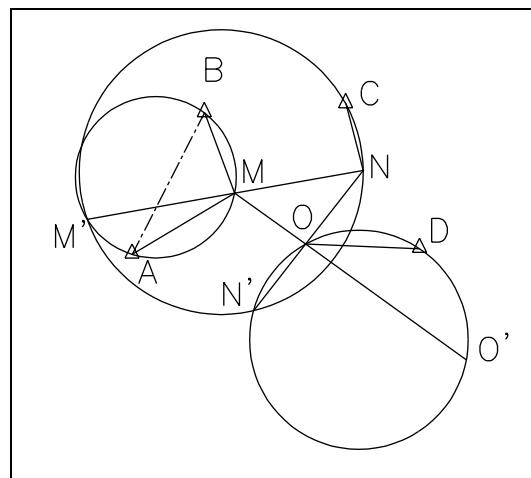


Fig. 1.70-b. : Résolution de proche en proche

## 7.8 Relèvement en trois dimensions sur deux points

Cette méthode permet de déterminer les coordonnées d'un point par relèvement sur seulement deux points anciens, à condition que ces derniers soient connus avec une précision homogène dans les trois dimensions ( $E$ ,  $N$  et  $H$ , ce qui devient de plus en plus courant du fait du développement des mesures GPS).

L'opérateur stationne en A et effectue des lectures angulaires horizontales sur deux points anciens B et C dont il déduit  $H_{BC}$  (voir fig. 1.71-a.).

De plus, l'opérateur effectue les lectures d'angle zénithal  $V_{AC}$  et  $V_{AB}$ . Ces lectures d'angle zénithal permettront, par résolution de triangles, de déterminer l'angle  $\alpha$ . Connaissant  $\alpha$ , on peut calculer les coordonnées du point A à partir des points B ou C.

La solution est unique, sa précision est correcte si l'angle  $H_{BC}$  est supérieur à 30 gon et si au moins une des visées d'angle zénithal est inclinée à plus de 10 gon sur l'horizontale.

### Exemple de détermination

Soient deux points anciens (fig. 1.71-a.) :

B (153,541 m ; 335,110 m ; 121,888 m)

C (275,441 m ; 198,992 m ; 120,002 m)

Les lectures faites en A sont :

$H_{z_{BC}} = 73,2850$  gon ;  $V_{AB} = 90,0112$  gon ;  $V_{AC} = 87,4661$  gon ; ces lectures d'angles zénithaux sont effectuées sur un miroir réglé à la hauteur des tourillons de la station de manière à obtenir l'angle  $V$  réel de la station A vers les points B ou C.

#### 1 - Calcul de $\alpha$

On voit sur la figure 1.71-a. que  $AB = BB' \cdot \cos\alpha$  et  $AC = CC' \cdot \cos(\alpha - H_{z_{BC}})$ . On peut aussi remarquer que :  $BB' = CC' = BC / \sin H_{z_{BC}}$ .

On exprime l'altitude de A de deux manières :

$H_A = H_B - AB \cdot \cotan V_{AB}$  et  $H_A = H_C - AC \cdot \cotan V_{AC}$ .

En égalisant les deux dernières équations, on obtient l'équation suivante pour déterminer  $\alpha$  :  $\frac{H_B - H_C}{BC} \cdot \sin H_{z_{BC}} = \cos \alpha \cdot \cotan V_{AB} - \cos(\alpha - H_{z_{BC}}) \cdot \cotan(V_{AC})$ .

On peut résoudre cette équation par approximations successives, mais il existe une résolution directe. On développe le second membre comme suit :

$$\cos \alpha \cdot [\cotan V_{AB} - \cos H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}] - \sin \alpha \cdot \sin H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}$$

$$\text{On pose : } R = \frac{H_B - H_C}{BC} \cdot \sin H_{z_{BC}}, P = \cotan V_{AB} - \cos H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}$$

$$\text{et } Q = \sin H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}$$

Il reste à résoudre une équation du type :  $R = P \cdot \cos \alpha - Q \cdot \sin \alpha$ .

On pose  $P = k \cdot \cos \varphi$  et  $Q = k \cdot \sin \varphi$  ; ainsi, on obtient :

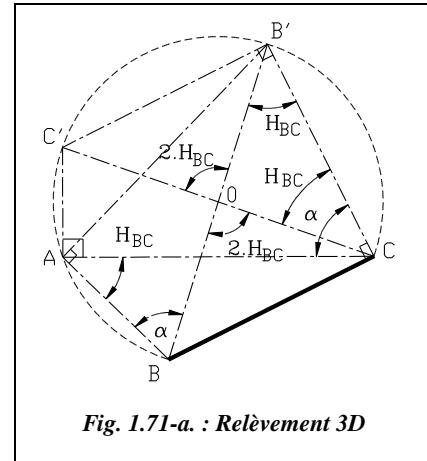


Fig. 1.71-a. : Relèvement 3D

$$\frac{R}{k} = \cos(\alpha + \varphi) \text{ avec } \tan\varphi = \frac{Q}{P} \text{ et } k = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

L'application numérique donne les résultats suivants :

$R = 0,0094256$  ;  $P = 0,0769357$  ;  $Q = 0,1821596$  ;  $k = 0,1977403$  ;  $\varphi = 74,5590$  gon.

Finalement, on obtient  $\alpha = 22,4053$  gon.

## 2 - Calcul des coordonnées du point A

On calcule le gisement  $G_{BC} = 153,5045$  gon.

Par rayonnement à partir du point B (BA = 187,819 m et  $G_{BA} = 104,3843$  gon), on calcule le point A : **A (340,915 m ; 322,186 m ; 92,174 m)**.

Par rayonnement à partir du point C (CA = 139,512 m et  $G_{CA} = 31,0992$  gon), on calcule à nouveau le point A, pour contrôle.

**Pour la réduction au point de station** des angles zénithaux lus dans l'appareil, on voit, figure 1.71-b., que si l'on vise le point connu (ici B) directement au sol, l'angle  $V'_{AB}$  lu n'est pas celui qui interviendra dans les calculs. Il faudra le réduire en  $V'_{AB}$  par :  $V'_{AB} = V_{AB} - \varepsilon$ .

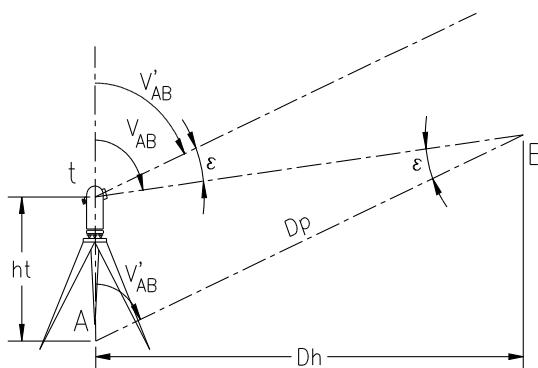


Fig. 1.71-b. : Réduction des angles verticaux

Pour calculer l'angle  $\varepsilon$ , on doit résoudre le triangle tAB. Il faut donc connaître  $Dp$ . Or, le but d'un relèvement est d'éviter cette mesure de distance.

Le calcul complet devra donc être effectué de manière itérative : à partir des valeurs de départ  $V_{AB}$  et  $V_{AC}$ , on effectue un premier calcul des coordonnées de A (qui seront approchées).

On en déduit une valeur approchée des distances  $Dh_{AB}$  et  $Dh_{AC}$ . On calcule alors l'écart  $\epsilon$  puis on reprend le calcul de relèvement en trois dimensions pour obtenir les coordonnées définitives du point A.

### Application

Les données sont les suivantes :

$ht_A = 1,655$  m,  $V_{AB} = 90,5592$  gon,  $ht_B = 1,720$  m et  $V_{AC} = 88,2226$  gon.

On en déduit les résultats ci-après :

$\epsilon_A = 0,5480$  gon,  $V'_{AB} = 90,0112$  gon,  $\epsilon_B = 0,7565$  gon et  $V'_{AC} = 87,4661$  gon.

## 8 RECOUPEMENT

### 8.1 Principe

La détermination du point cherché M est effectuée à partir de visées d'intersection et de relèvement. Pour calculer un point par recouplement, on effectue séparément les calculs d'intersection et de relèvement ; les lieux droites et les segments capables sont représentés sur le même graphique.

Deux procédés différents étant utilisés pour déterminer M, il est nécessaire de calculer les demi-plages avec la même incertitude angulaire pour les visées d'intersection et de relèvement. Ces demi-plages ont été définies (voir § 4.2.6. et § 5.2.8.) :

- en intersection :  $t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km} \cdot \epsilon_{mgon}$  d'une part ;
- en relèvement :  $t_{cm} = 1,57 \cdot Df_{km} \cdot \epsilon_{mgon}$  d'autre part.

On peut rendre homogènes entre elles les valeurs des demi-plages d'intersection et de relèvement en s'appuyant, par exemple, sur les tolérances réglementaires utilisées au cadastre. Elles donnent pour une paire de séquences et pour une visée sur une seule direction les tolérances suivantes :

- tolérance angulaire sur une direction en canevas ordinaire :  $\epsilon = 1,5$  mgon ;
- tolérance angulaire sur une direction en canevas de précision :  $\epsilon = 1,16$  mgon.

En canevas ordinaire, il faut deux paires de séquences donc :  $\epsilon_o = 1,5 / \sqrt{2} \approx 1,06$  mgon.

Il faudra de plus tenir compte du fait qu'une visée de relèvement fait intervenir deux lectures angulaires alors qu'une visée d'intersection n'en fait intervenir qu'une seule.

L'écart angulaire en relèvement est donc :  $\epsilon\sqrt{2}$  mgon.

Finalement, en canevas ordinaire (la méthode graphique n'étant pas employée en canevas de précision), on prend comme valeur des demi-plages d'indécision :

- demi-plage d'intersection pour  $\varepsilon = 1$  mgon :

$$t_{cm} = 1,57 \cdot 1,06 D_{km} \approx 1,67 D_{km} \quad \text{soit} \quad t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$$

- demi-plage de relèvement pour  $\varepsilon = 1$  mgon :

$$t_{cm} = 1,57 \cdot 1,06 \cdot \sqrt{2} Df_{km} \approx 2,36 Df_{km} \quad \text{soit} \quad t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$$

Le coefficient  $K$  est le même dans les deux calculs.

### Remarques

- On peut, pour simplifier les calculs, considérer que le coefficient multiplicateur  $K$  doit être  $\sqrt{2}$  fois plus grand pour les visées de relèvement que pour les visées d'intersection.
- Bien que ce soit l'idéal, les zones d'indécision d'intersection et de relèvement n'ont pas forcément de zone commune. Le point définitif  $M$  n'est pas obligatoirement situé dans l'intersection des deux zones d'indécision, si elle existe. Il doit tout de même se situer dans la zone qui constitue la réunion de ces deux zones.

Dans la pratique, les deux cas de figure suivants peuvent se présenter.

#### 8.1.1 Recouplement centré

On parle de recouplement centré lorsque le point d'intersection est identique au point de relèvement. Sur la figure 1.72., le point cherché  $M$  est stationnable ; il est visé par intersection depuis  $C$  et  $D$ , un *G0moyen* de station étant calculé en  $C$  et en  $D$ . Depuis la station en  $M$ , trois visées de relèvement sont effectuées sur les points  $A$ ,  $B$  et  $D$ . La visée  $MD$  est donc réciproque.

Dans le cas de la figure 1.72., la construction graphique ne fait apparaître que deux points approchés, à savoir :

- $M_{0i}$  pour les deux visées d'intersection.
- $M_{0r}$  pour les trois visées de relèvement.

Il faut utiliser les demi-plages pour construire le point  $M$  définitif (voir § 7.1.).

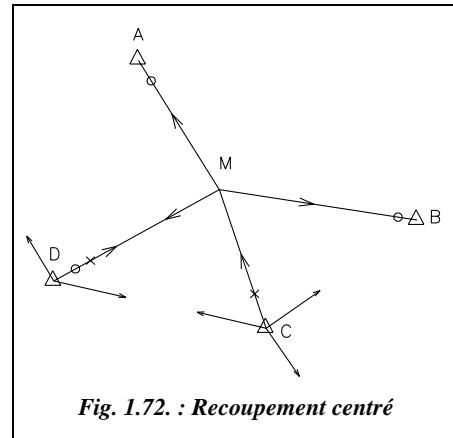


Fig. 1.72. : Recouplement centré

#### 8.1.2 Recouplement excentré

On parle de recouplement excentré lorsque le point d'intersection est différent du point de relèvement (voir § 1.3.7.2.).

## 8.2 Application

Soit à calculer un point nouveau M du canevas d'ensemble ordinaire à partir des données suivantes :

- relèvement sur 65, 67, 73 et 86.
- intersection à partir de 67, 76 et 86.

Station : M	X (m)	Y (m)	L (gon)
<b>65</b>	980 546,82	1 157 468,79	0,0000
<b>67</b>	983 695,71	1 158 247,39	85,5349
<b>73</b>	984 729,43	1 155 546,12	156,7302
<b>86</b>	979 465,39	1 153 480,45	304,1589

Stations	X (m)	Y (m)	L (gon)	GO (gon)	Écarts au GO (mgon)	Dmoy. visée (km)
<b>67</b>	983 695,71	1 158 247,39	171,6918	64,1521	1,6 - 2,3 - 0,9	2,8
<b>76</b>	984 713,53	1 153 893,58	86,5488	254,8788	1,5 - 2,1 - 2,0	3,1
<b>86</b>	979 465,39	1 153 480,45	326,7314	127,7331	2,2 - 1,8 - 1,9	2,5

### ◆ Calculs

1 - Réalisez un schéma des points à l'échelle (fig. 1.74.).

2 - Calculez les gisements des segments capables et dessinez à grande échelle ces segments et les points triples ; le point approché  $M_o$  est déterminé à partir des points d'appui 65, 67 et 73. Les coordonnées de  $M_o$  sont alors :

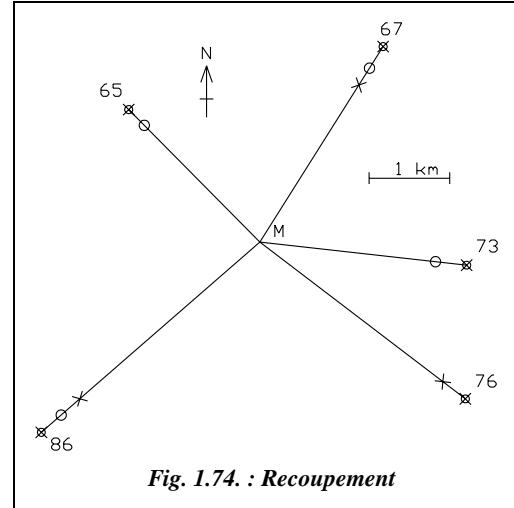
(982 170,27 m ; 1 155 829,92 m)

3 - Calculez les gisements des visées et dessinez les lieux-droites à grande échelle : le point approché  $M_o$  est calculé à partir des points 67 et 76. Ses coordonnées sont alors :

(982 170,00 m ; 1 155 830,17 m)

Vous devez obtenir les deux zones limitées par les trois lieux droites pour l'intersection et les quatre points triples pour le relèvement de la figure 1.75.

4 - La réduction de la zone d'indécision est effectuée avec  $K = 2,6$  (fig. 1.76.).



$$\text{Intersection : } t_{\text{cm}} = 1,67 \cdot K \cdot D_{\text{km}}$$

Points	$D_{\text{km}}$	$t_{\text{cm}}$
<b>67</b>	2,9	12,4
<b>76</b>	3,2	13,8
<b>86</b>	3,6	15,5

$$\text{Relèvement : } t_{\text{cm}} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{\text{km}}$$

Couples	$Df_{\text{km}}$	$t_{\text{cm}}$
<b>65-67</b>	2,0	12,5
<b>65-73</b>	1,3	7,9
<b>65-86</b>	2,0	12,3
<b>67-73</b>	2,5	15,6
<b>67-86</b>	1,6	9,8
<b>73-86</b>	1,6	10,0

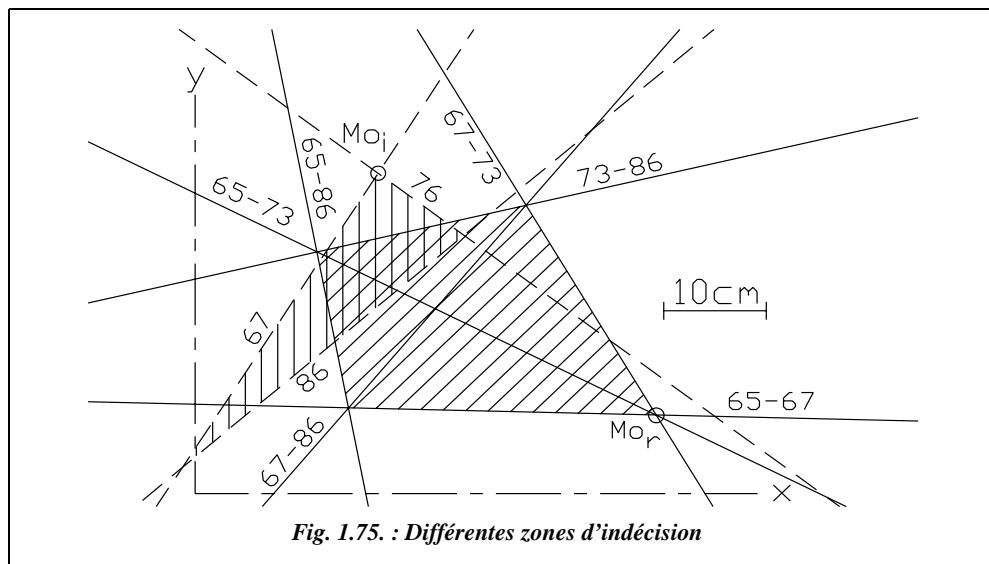


Fig. 1.75. : Différentes zones d'indécision

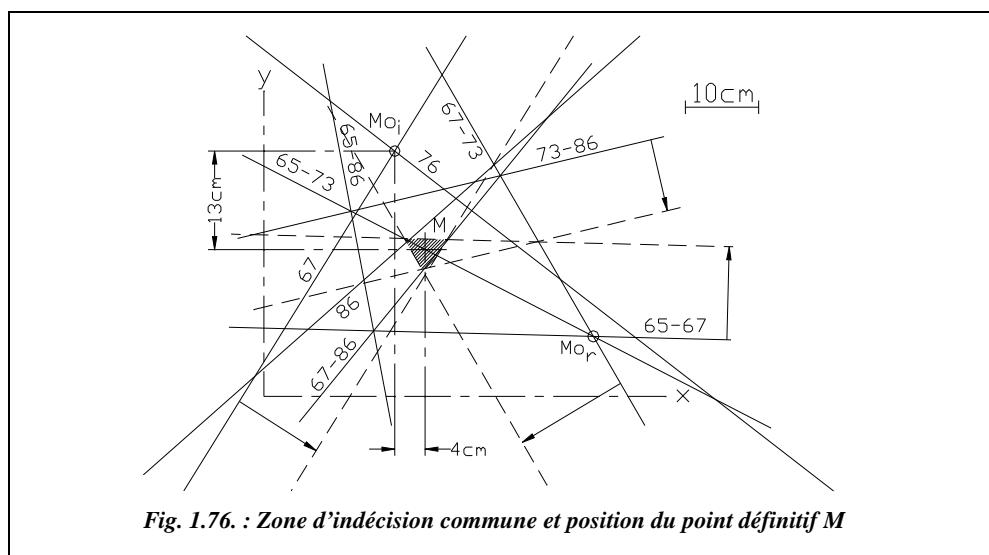


Fig. 1.76. : Zone d'indécision commune et position du point définitif M

Sur la figure 1.76., on peut voir la construction de la zone d'intersection commune des demi-plages et la détermination de M par rapport à  $Mo_i$  ou  $Mo_r$ . Seules les demi-plages utiles sont dessinées. On mesure par rapport à  $Mo_i$  :  $\Delta x = +0,04$  m et  $\Delta y = -0,13$  m.

Les coordonnées du point définitif M sont alors : M (982 170,04 m ; 1 155 830,04 m).



Les calculs suivants sont extraits du tableau TRIANGU.XLS ; ce dernier regroupe les tableaux de calcul de relèvement et d'intersection qui sont combinés en recouplement (ou insertion) dans un troisième tableau.

Le contrôle de la validité des calculs et de la manipulation est donné ci-après.

### 1 - Intersection

Points Pi	Gd <sub>é</sub> f (gon) G <sub>PiM</sub>	ei (mgon) G <sub>obs</sub> - Gd <sub>é</sub> f	D <sub>moy</sub> km	Tolérance sur ei (mgon)	r <sub>i</sub> <sub>cm</sub> (Tol. 20cm) 1,57.D <sub>km</sub> . ei <sub>mgon</sub>
<b>67</b>	235,8416	2,3	2,8	3,8	10,3
<b>76</b>	341,4260	1,6	3,1	3,4	7,9
<b>86</b>	54,4649	-0,4	2,8	3,8	-2,1

### 2 - Relèvement

Points Pi	D <sub>h</sub> km	Gd <sub>é</sub> f. (gon) G <sub>PiM</sub>	G <sub>0i</sub> (gon) G <sub>MPi</sub> - Li	ei (mgon) = G <sub>0i</sub> - G <sub>0</sub>	Tolérance ei (mgon)	r <sub>i</sub> <sub>cm</sub> (Tol. 20cm) 1,57.D <sub>km</sub> . e <sub>mgon</sub>
<b>65</b>	2,30	150,3031	350,3031	-1,8	4,0	6,7
<b>67</b>	2,86	235,8416	350,3067	1,7	4,0	7,8
<b>73</b>	2,57	307,0335	350,3033	-1,7	4,0	6,9
<b>86</b>	3,58	54,4649	350,3060	1,0	4,0	5,8

$$D_{moy} = 2,83 \text{ km } G_0 \text{ moyen} = 350,3049 \text{ gon}$$

**3 - Recouplement**  $Emq = 1,8$  mgon      Tolérance (N=16) : 2,4 mgon

$Rmq = 7,7$  cm      Tolérance : 12 cm

**Conclusion** : toutes les tolérances sont vérifiées pour un calcul en canevas ordinaire.



La construction graphique des lieux sur Autocad LT est réalisée de la même manière que pour les méthodes d'intersection et de relèvement prises séparément. Il faut correctement gérer les calques et les couleurs pour s'y retrouver (fig. 1.76.)...

# 9 INSERTION

## 9.1 Principe

La détermination du point cherché M est effectuée à partir de visées de multilatération combinées à des visées d'intersection et/ou de relèvement. Cette méthode donne de très bons résultats mais nécessite beaucoup de mesures et de longs calculs lors d'une résolution par la méthode graphique du point approché (voir § 1.3.2.3.).

Cette méthode est idéale pour les appareils modernes qui permettent de faire des mesures de distance très précises et des lectures angulaires sans changer d'appareil : on combine alors en station sur le point cherché M des mesures de relèvement et de multilatération sur les points d'appui qui doivent être accessibles. Le nombre de points anciens et le nombre de stations à effectuer sont ainsi limités.

Par exemple, sur la figure 1.77., le point cherché M est calculé par intersection depuis les points C et D, par relèvement et par multilatération depuis les points A, B et D (ce qui fait sept lieux du point M). Pour avoir les quatre lieux nécessaires, il suffisait par exemple de seulement 2 points anciens C et D desquels on ferait 2 mesures de distances et 2 visées d'intersection.

Pour calculer un point par insertion, on effectue séparément les calculs de multilatération, d'intersection et de relèvement ; on représente sur le même graphique les lieux-droites d'intersections, les segments capables et les segments-distances.

Comme pour le recouplement, les demi-plages d'incertitude sont rendues homogènes avant d'être reportées sur le graphique de recherche du point définitif M. En effet, cette méthode associe des mesures de distances et des lectures angulaires dont les précisions sont différentes. Pour le recouplement, on prend les valeurs suivantes (voir § 8.1.) :

- en intersection :  $t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$
- en relèvement :  $t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$

En ce qui concerne la multilatération, les demi-plages sont proportionnelles à la quantité  $(A + BDi_{km})$  si on les calcule à partir des caractéristiques des appareils utilisés (voir § 4.2.7.2.). Mais cette valeur n'est pas homogène à celles de l'intersection et du relèvement. Pour obtenir cette homogénéité, on part à nouveau des tolérances réglementaires.

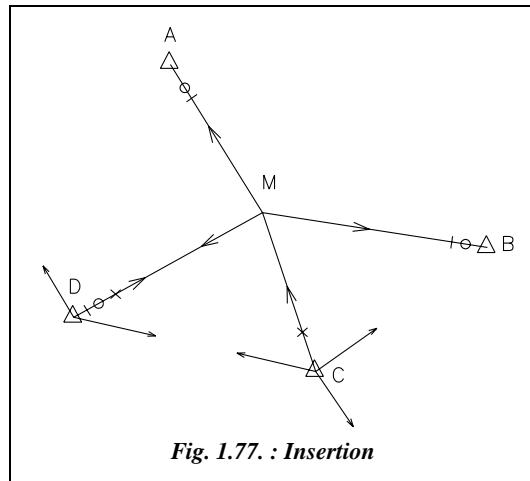


Fig. 1.77. : Insertion

La tolérance sur l'écart entre deux mesurages indépendants de la distance inclinée  $Di$  est de  $T_{cm} = 3 + Di_{km}$ . Si l'on considère que la mesure de distance est réalisée par quatre mesurages indépendants (ce qui permet d'approcher la précision donnée par les IMEL actuels, voir tome 1, chap. 4), on obtient :  $T_{cm} = (3 + Di_{km}) / \sqrt{2}$ .

Cela donne une tolérance de 2,8 cm pour 1 km ; un IMEL courant donne un écart type de 1 cm pour 1 km ce qui correspond à une tolérance de 2,7 cm pour 1 km.

La tolérance sur une mesure unilatérale de l'angle zénithal est de 5,6 mgon. Comme  $Dh = Di \cdot \sin V$ , on en déduit (voir § 4.2.7.2.) que la tolérance sur la mesure de  $Dh$  est de :

$$T_{Dh(cm)} = \sqrt{\left( \sin V \frac{3 + Di_{km}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( Di_{km} \cdot 10^5 \cdot \cos V \frac{\pi \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}}{200} \right)^2}$$

Si l'on se place dans le cas où les visées sont proches de l'horizontale ( $Di \approx Dh$ , ce qui est suffisant au regard de la précision de la construction graphique), on obtient :

$$T_{Dh(cm)} \approx (3 + Dh_{km}) / \sqrt{2}.$$

Les demi-plages de multilatération sont proportionnelles à cette valeur, c'est-à-dire :

$$t_{cm} = K \frac{(3 + Dh_{km})}{\sqrt{2}}$$

Les remarques faites au paragraphe 7.1. pour la construction des zones d'indécision de recouplement s'appliquent également à l'insertion.

Ci-contre est donné un **tableau récapitulatif** pour la construction des demi-plages en insertion (canevas ordinaire). Ce tableau donne les valeurs des demi-plages pouvant être utilisées pour tous les calculs.

Méthode	demi-plage (cm)
<b>Intersection</b>	$t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$
<b>Relèvement</b>	$t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$
<b>Multilatération</b>	$t_{cm} = K \frac{(3 + Dh_{km})}{\sqrt{2}}$

#### Remarque

| Dans ce calcul de  $t$  on peut considérer que  $Dh$  et  $Dr$  sont égales.

## 9.2 Application

Reprenez les données de l'exercice précédent de recouplement et ajoutez-y les lectures ci-contre :

$Dr$  est la distance réduite à la projection.

Points	X (m)	Y (m)	Dr (m)
<b>64</b>	980 708,43	1 154 887,78	1739,109
<b>73</b>	984 729,43	1 155 546,12	2575,160
<b>48</b>	982 102,14	1 154 080,69	1750,690

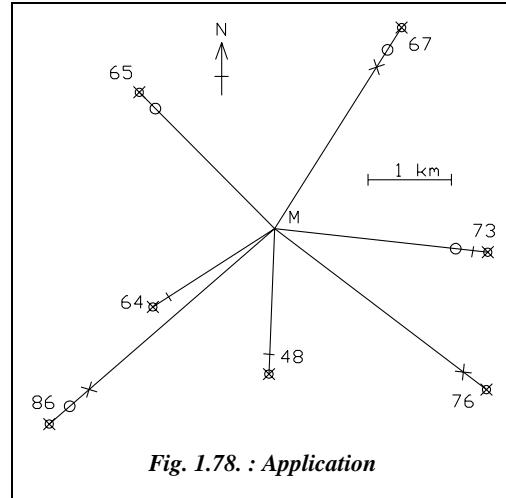
◆ **Calculs**

**1** - Réalisez un schéma des points à l'échelle (fig. 1.78.) en ajoutant les points 64 et 48 au schéma du paragraphe 8.1.1.

**2** - Calculez les segments-distances et dessinez de la zone d'indécision de multilatération ; le point approché  $Mo_m$  est déterminé à partir de 48 et 73 :

$Mo_m (982\ 169,97\ m ; 1\ 155\ 830,07\ m)$ .

Reprenez le graphique de recouplement précédent et ajoutez-y la multilatération.



*Fig. 1.78. : Application*

Vous devez obtenir les zones d'indécision de la figure 1.79.

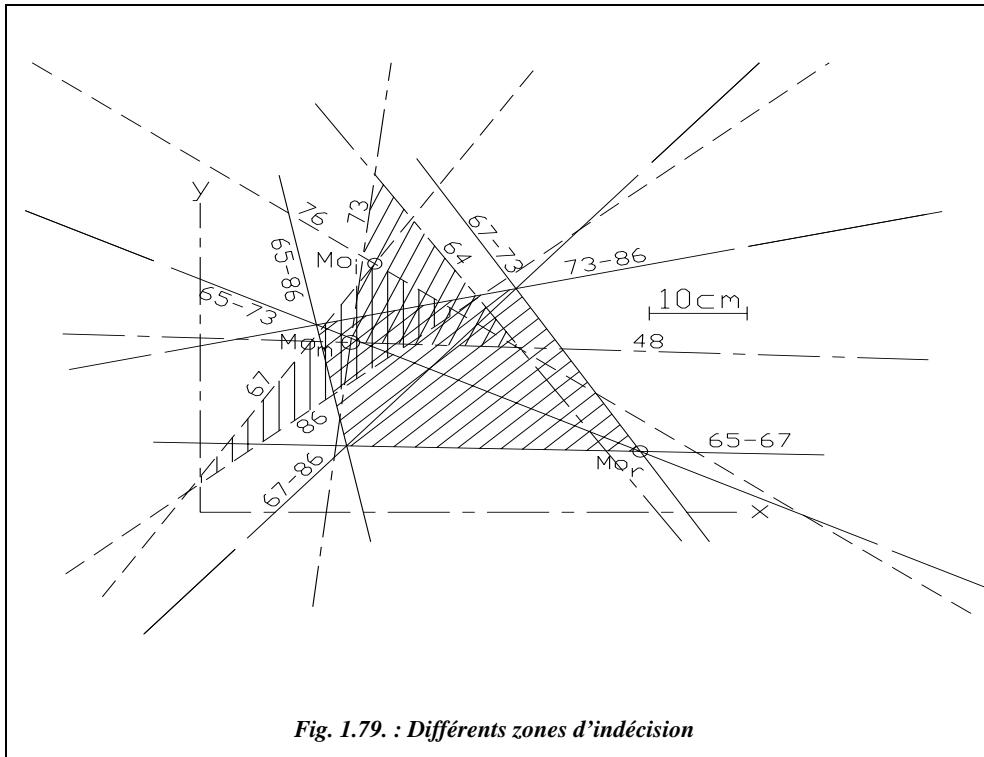
**3** - La réduction des zones d'indécision est effectuée avec  $K = 2,6$ .

Reprenez les valeurs de l'exemple précédent pour l'intersection et le relèvement.

Pour les demi-plages de multilatération, on obtient :  $t_{cm} = K(3 + D_{km}) / \sqrt{2}$

On peut constater que, à distance équivalente, les amplitudes des demi-plages sont comparables pour les trois méthodes.

Points	$D_{km}$	$t_{cm}$
<b>64</b>	1,74	8,7
<b>73</b>	2,58	10,2
<b>48</b>	1,75	8,7



On retrouve sur la figure 1.79. :

- les dessins des différentes zones d'indécision ;
- Le repérage des trois points approchés :  $Mo_m$ ,  $Mo_i$  et  $Mo_r$

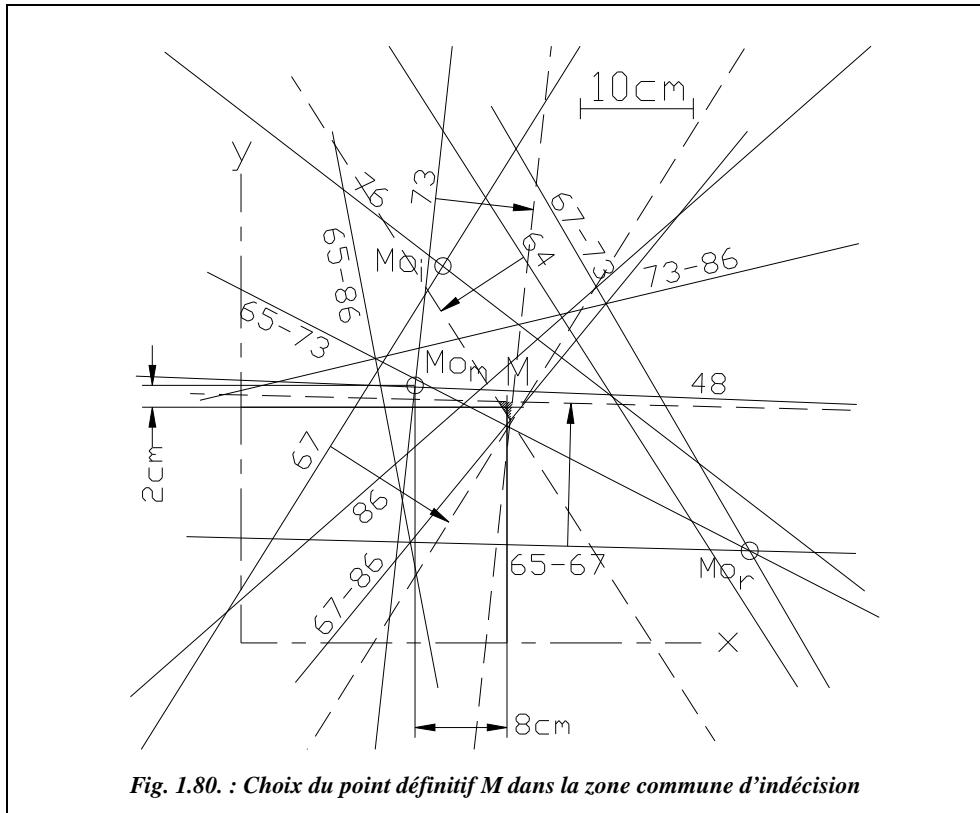
Lors d'un calcul manuel, on peut réaliser la construction à partir d'un seul point approché (le plus simple à calculer).

Sur la figure 1.80. suivante, on effectue la réduction des zones d'indécision en cherchant l'intersection des demi-plages ; seules les demi-plages utiles sont représentées. On remarque que :

- les trois types de visées participent à la réduction.
- le point final n'est pas dans la zone commune aux 3 zones considérées séparément.

On mesure  $\Delta x$  et  $\Delta y$  par rapport au point approché le plus proche (ici  $Mo_m$  issu des visées de multilatération) et on lit :  $\Delta x = + 0,08$  m et  $\Delta y = - 0,02$  m.

Les coordonnées du point définitif sont donc :  $M (982\ 170,05\ m ; 1\ 155\ 830,05\ m)$



Le contrôle de la validité des calculs et de la manipulation est effectué comme suit.

– Multilatération :

$Rmq = 8,4$  cm ; Tolérance : 12 cm.

Points Pi	Dist. définitive $D_{d\acute{e}f}$ (m)	Écarts $r_{i_{cm}}$ $D_{obs} - D_{d\acute{e}f}$
<b>73</b>	2575,08	8,2
<b>48</b>	1750,67	1,7
<b>64</b>	1739,02	8,5

– Intersection :

$Emq = 1,9$  mgon

Tolérance : 2,5 mgon

$Rmq = 8,9$  cm

Tolérance : 12 cm

Points Pi	$G_{d\acute{e}f}$ (gon)	$ei$ (mgon)	Tol. sur $ei$ (mgon)	$r_{i_{cm}}$ (Tol. 20cm) $1,57 \cdot D_{km} \cdot ei_{mgon}$
<b>67</b>	235,8415	2,4	3,8	10,6
<b>76</b>	341,4263	1,3	3,4	6,5
<b>86</b>	54,4649	-0,4	3,8	-2,0

– Relèvement :

$G0$ moyen :

350,3049 gon

$Emq = 1,9$  mgon

Tolérance : 2,9 mgon

Pts Pi	Gdéf. (gon) $G_{MPI}$	$G0i$ (gon) $G_{MPI} - Li$	$ei$ (mgon) $= G0i - G0$	Tolérance $ei$ (mgon)	$ri_{cm}$ Tol. 20cm
<b>65</b>	350,3027	350,3027	-2,2	4,0	7,9
<b>67</b>	35,8415	350,3066	1,7	4,0	7,7
<b>73</b>	107,0337	350,3035	-1,4	4,0	5,6
<b>86</b>	254,4649	350,3060	1,0	4,0	5,9

$Rmq = 7,9$  cm

Tolérance : 12 cm

– Insertion complète :

$Emq = 1,7$  mgon

$Rmq = 7,3$  cm

Tolérance ( $N=16$ ) : 2,4 mgon

Tolérance : 12 cm

**En conclusion**, toutes les tolérances étant vérifiées, on considère la manipulation valide en canevas ordinaire.

**Remarque**

Cet exercice est purement scolaire ; dans la réalité, on ne calculera pas un point avec 9 lieux géométriques !

### 9.3 Insertion excentrée

De même que pour le recouplement, on parle d'insertion centrée lorsque le point cherché fait l'objet de toutes les visées et d'insertion excentrée lorsque l'on est obligé d'excentrer le point cherché pour effectuer toutes les visées.

### 9.4 Application au calcul d'une station libre

La station libre est une mise en station qui n'est pas effectué sur un point donné : en d'autres termes, on stationne « n'importe où » et on calcule *a posteriori* les coordonnées de la station en s'appuyant sur des visées faites sur au moins deux points anciens (points A et B, fig. 1.81.). On connaît ainsi les coordonnées de la station, qui ne sera pas forcément implantée au sol ; cette méthode peut être très pratique pour des opérations uniques de lever ou d'implantation en coordonnées Lambert.

Cette méthode de mise en station est de plus en plus utilisée puisque, d'une part, le nombre de points connus est actuellement suffisant pour que l'on puisse toujours trouver au moins deux points d'appuis, et d'autre part, grâce aux distancemètres, il est devenu simple et précis de mesurer une distance à un point connu. Certains appareils intègrent directement ce calcul sous forme de programme.

Si on dispose de plus de deux points anciens, en mesurant les distances et les angles sur ces points, on ramène le problème à un calcul d'insertion classique (relèvement et multilatération).

Si on ne dispose que de deux points anciens (ou si pour gagner du temps et lorsque la précision de connaissance de la station autorise seulement deux visées), les deux cas suivants peuvent se présenter.

#### 9.4.1 Une mesure de distance et deux lectures angulaires

C'est le cas lorsque l'un des deux points anciens est inaccessible. La solution est unique et il n'y a pas de contrôle possible.

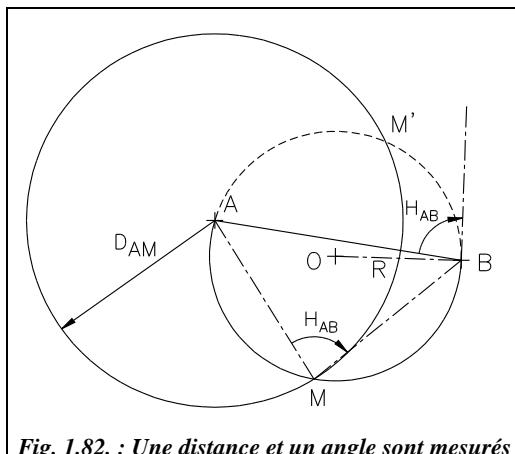


Fig. 1.82. : Une distance et un angle sont mesurés

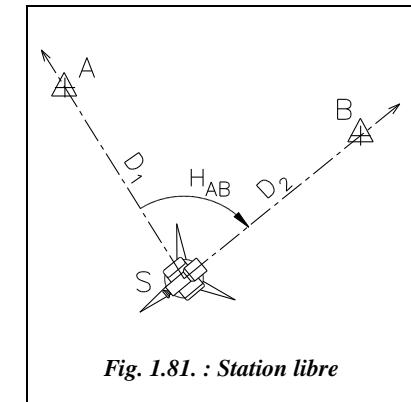


Fig. 1.81. : Station libre

Le point M est à l'intersection du segment capable AMB (construit à partir des deux lectures angulaires donnant  $H_{AB}$ ) et du cercle de centre A et de rayon  $D_{AM}$  (fig. 1.82.).

Pour le calcul du point M, deux solutions sont possibles :

**1 - Résoudre le triangle AMB** : on connaît deux côtés et un angle. À partir de l'angle  $BAM$ , on calcule  $G_{AM}$  et on en déduit M.

**2 - Déterminer les caractéristiques du cercle contenant l'arc capable** : centre O et rayon R. Cela revient à déterminer

un cercle donné par deux points (A et B) et la tangente en un de ces points (voir chapitre 4, § 5.2.), le gisement de la tangente est :

- au point B :  $G_T = G_{BA} + H_{AB}$  ;
- au point A :  $G_T = G_{AB} - H_{AB}$ .

On calcule ensuite l'intersection avec le cercle de centre A et de rayon  $D_{AM}$  (voir chapitre 4, § 4.). Cette intersection fournit deux solutions M et M' : seul M est correct car M' correspond à un angle  $AM'B = 200 - H_{AB}$ . Il y n'a ambiguïté (deux solutions correctes) que lorsque  $H_{AB} = 100$  gon, ce qui est peu probable dans la réalité.

#### Exemple

Calculez les coordonnées de la station M (éventuellement M') pour A (983 530,174 ; 155 393,148), B (983 824,771 ; 155 345,037),  $H_{AB} = 91,8472$  gon,  $D_{AM} = 225,084$  m.

#### Résultats

$G_T = 2,1528$  gon ; O (983 674,375 ; 155 350,125) ;  $R = 150,482$  m.

D'où les points M (983 648,763 ; 155 201,838) et M' (983 734,201 ; 155 488,204).

### 9.4.2 Deux mesures de distances et deux lectures angulaires

On se trouve dans le cas d'une insertion avec un nombre de visées minimal pour permettre un contrôle des calculs et de la précision de connaissance des coordonnées de la station.

Deux mesures de distances donnent deux points approchés M et M', les calculs sont détaillés au paragraphe 4.1. ; il faut choisir l'un des deux, par exemple à partir d'un schéma à l'échelle ou de la carte d'étude.

On calcule les paramètres du segment capable provenant de la visée de relèvement à partir de ce point Mo. On obtient autour du point Mo deux segments-distances provenant des mesures de distances sur A et B. On obtient donc trois lieux possibles (un arc capable et deux cercles) pour le point définitif M. Pour placer M, il reste à construire les demi-plages comme pour une insertion classique.

#### Remarque

Le but de la station libre étant d'obtenir rapidement les coordonnées planimétriques du point de station du théodolite, la méthode employée dans la réalité est un calcul aux moindres carrés (programme utilisé sur le terrain).

#### Application

Si vous reprenez les données de l'exemple précédent avec une mesure de distance supplémentaire ( $D_{BM} = 226,875$  m), vous obtenez par résolution informatique M (983 648,794 ; 155 201,844) avec  $Emq = 1,1$  mgon (tolérance 1,3 mgon en canevas de précision) et  $Rmq = 0,7$  cm.

### 9.5 Résolution informatique



Le calcul aux moindres carrés se prêtant à une informatisation, le fichier TRIANGU.XLS (fourni sur le cédérom du livre) vous propose cinq tableaux

pour toutes les résolutions d'intersection, de relèvement, de multilatération, de recouplement ou d'insertion. Ce tableau traite toutes les combinaisons possibles de visées de relèvement, d'intersection ou de multilatération (y compris le cas de la station libre). Ci-après est donné un exemple de calcul extrait du dernier exemple traité (§ 9.2.).



On peut aussi programmer cette résolution aux moindres carrés en BASIC : le listing en basic standard est donné sur le cédérom (fichiers TRIANGU.TXT et STATLIB.TXT). Le programme TRIANGU.BAS est aussi fourni sur le cédérom ainsi qu'un programme plus court STATLIB.BAS adapté à la station libre.

◆ **Détermination d'un point par Recouplement ou Insertion**

**1 - Point cherché : M Canevas Ordinaire**

Intersection :  $I = 3$  visées Relèvement :  $R = 4$  visées Multilatération  $M = 3$  visées

**Point approché No :**  $X_0 = 982\ 170,27$  m

$Y_0 = 1\ 155\ 829,92$  m

$G_0$ moyen approché de relèvement :  $G_0o = 350,3009$  gon

**Point définitif**

$dx = -Dtx / Dt = -0,22$  m  $X = X_0 + dx = 982\ 170,05$  m

$dy = -Dty / Dt = 0,17$  m  $Y = Y_0 + dy = 1\ 155\ 830,09$  m

$dG_0 = -DtG_0 / Dt = 38$  dmgon  $G_0 = G_0o + dG_0 = 350,3047$  gon

**2 - Résolution matricielle**

Matrice globale  $Dt = 8,3323$

$a\ dx + b\ dy + c\ dG_0 + d = 0$   $88,5441$   $16,5669$   $0,0594$

$b\ dx + e\ dy + f\ dG_0 + g = 0$   $16,5669$   $102,8788$   $-0,0089$

$c\ dx + f\ dy + h\ dG_0 + i = 0$   $0,0594$   $-0,0089$   $0,0010$

$a = 10^8 \sum (P_j \cdot (\cos G_j / D_j)^2)$  Matrice  $dx$   $Dtx = 1,8463$

$b = -10^8 \sum P_j \cdot (\sin G_j \cdot \cos G_j / D_j^2)$   $14,6062$   $16,5669$   $0,0594$

$c = -50 \pi \sum (\cos G_j / D_j)$   $-13,0459$   $102,8788$   $-0,0089$

$d = -50 \pi \sum P_j \cdot (\cos G_j / D_j \cdot \Delta_j)$   $-0,0230$   $-0,0089$   $0,0010$

$e = 10^8 \sum (P_j \cdot (\sin G_j / D_j)^2)$  Matrice  $dy$   $Dty = -1,3816$

$f = 50 \pi \sum (\sin G_j / D_j)$   $88,5441$   $14,6062$   $0,0594$

$g = 50 \pi \sum P_j \cdot (\sin G_j / D_j \cdot \Delta_j)$   $16,5669$   $-13,0459$   $-0,0089$

$h = R (\pi / 200)^2$   $0,0594$   $-0,0230$   $0,0010$

$i = (\pi / 200)^2 \cdot \sum (\Delta_j)$  Matrice  $dG_0$   $DtG_0 = -318,0824$

$88,5441$   $16,5669$   $14,6062$

$16,5669$   $102,8788$   $-13,0459$

$0,0594$   $-0,0089$   $-0,0230$

### 3 - Intersection

Pts Pi	<i>Xi</i> m	<i>Yi</i> m	<i>Gobs</i> <i>Pi - M</i> gon	<i>Gapp</i> <i>G(Pi - Mo)</i> gon	<i>Delta</i> <i>Gobs - Gapp</i> dmgon	Distance <i>Dr<sub>i</sub></i> m	Poids <i>Pi</i> <i>nj / (R - 1)</i> ou <i>nj</i>
<b>67</b>	983 695,71	1 158 247,39	235,8439	235,8358	81	2858,52	1,00
<b>76</b>	984 713,53	1 153 893,58	341,4276	341,4269	7	3196,50	1,00
<b>86</b>	979 465,39	1 153 480,45	54,4645	54,4692	-47	3582,79	1,00

### 4 - Relèvement

Pts Pi	<i>Xi</i> m	<i>Yi</i> m	<i>Gobs</i> <i>M - Pi</i> gon	<i>Gapp</i> <i>G(Pi - Mo)</i> gon	<i>Delta</i> <i>Gobs - Gapp</i> dmgon	Distance <i>Dr<sub>i</sub></i> m	Poids <i>Pi</i> 1
<b>65</b>	980 546,82	1 157 468,79	350,3009	350,3009	0	2306,83	1,00
<b>67</b>	983 695,71	1 158 247,39	35,8358	35,8358	0	2858,52	1,00
<b>73</b>	984 729,43	1 155 546,12	107,0311	107,0311	0	2574,85	1,00
<b>86</b>	979 465,39	1 153 480,45	254,4598	254,4692	-93	3582,79	1,00

### 5 - Multilatération

Pts Pi	<i>Xi</i> m	<i>Yi</i> m	<i>Dobs</i> <i>Dr</i> m	<i>Dapp</i> m	<i>Delta</i> <i>Dobs - Dapp</i> mm	<i>Gapp</i> <i>Pi - Mo</i> gon	Poids <i>Pi</i> <i>O : 4/(R - 1)</i> <i>P : 1/(R - 1)</i>
<b>64</b>	980708,43	1 154887,78	1739,109	1739,138	-29	63,5540	1,33
<b>73</b>	984729,43	1 155546,12	2575,160	2574,850	310	307,0311	1,33
<b>48</b>	982102,14	1 154080,69	1750,690	1750,557	133	2,4782	1,33

### 6 - Vérification des tolérances *G0moyen* de station : 350,3047 gon

Pt	<i>Gd<sub>é</sub>f</i> <i>M - Pi</i> gon	<i>G<sub>0i</sub></i> <i>Gd<sub>é</sub>f - Hi</i> gon	<i>Ecart ei</i> <i>G<sub>0i</sub> - G<sub>0</sub></i> mgon	Tolérances sur <i>ei</i>		<i>Écart ri</i> $1.57 D_{km} \cdot ei_{mgon}$
				Précision mgon	Ordinaire mgon	cm
<b>65</b>	350,3019	350,3019	-2,8	0,9	4,0	-10,1
<b>67</b>	35,8419	350,3070	2,3	0,9	4,0	10,5
<b>73</b>	107,0347	350,3045	-0,2	0,9	4,0	-0,8
<b>86</b>	254,4644	350,3055	0,8	0,9	4,0	4,3

Tolérances sur *ri* : 4 cm (précision) et 20 cm (ordinaire)

## Écarts d'orientation en intersection

Point Pi	Gd <sup>ef</sup> Pi - M gon	Écarts ei Gobs - Gd <sup>ef</sup> mgon	Tolérances sur ei Précision mgon	Ordinaire mgon	Écarts ri 1,57.D <sub>km</sub> .ei <sub>mgon</sub> cm
<b>67</b>	235,8419	2,0	0,9	4,0	8,8
<b>76</b>	341,4270	0,6	0,9	3,6	3,1
<b>86</b>	54,4644	0,1	0,9	4,1	0,8

Écarts moyens quadratiques :

$Emq = 1,9$  mgon ( $N = 16$ ) Tolérances : 1,0 mgon en canevas de précision

2,4 mgon en canevas ordinaire

$Rmq = 6,9$  cm ( $N = 10$ ) Tolérances : 2,5 cm en canevas de précision (valeur usuelle)

12 cm en canevas ordinaire

## Écarts linéaires en multilatération

Point Pi-M	Dd <sup>ef</sup> Dobs - Dd <sup>ef</sup> m	Écarts ri cm
<b>64</b>	1739,046	6,3
<b>73</b>	2575,085	7,5
<b>48</b>	1750,718	-2,8

### Remarque

Les tolérances en intersection sont différentes d'un point à l'autre car à chaque station on ajoute la visée sur le point définitif M. Le nombre et la distance moyenne des visées changent.

#### ◆ résolution au moyen du solveur d'Excel



Nous proposons une résolution faisant appel au solveur d'Excel et dont la mise en place est très simple et accessible à tous.

Excel 7

### Le principe du calcul est le suivant.

Dans le tableau donné en fin de paragraphe, on entre les données suivantes :

- les coordonnées des points d'appui (cases B7 à C9, B12 à C15 et B18 à C20) ;
- les lectures terrain (cases D7 à D9, D12 à D15 et D18 à D20).

On calcule ensuite :

- les gisements observés de relèvement (cases E12 à E15) ;
- les gisements et distances approchés (cases E7 à E9, F12 à F15 et E18 à E20) ;
- les écarts entre valeurs observées et valeurs approchées (cases F7 à F9, G12 à G15 et F18 à F20).

On effectue la somme des carrés des écarts (G4) et on fait tendre cette valeur vers 0 en jouant sur les données du point approché (B2 à B4) ; le solveur effectue ce calcul par itérations. Lorsque la somme des carrés est minimale, le point approché de départ est devenu le point définitif. Le principe de cette méthode est donc proche des moindres carrés (leurs résultats sont très proches).

#### ◆ *Écriture du tableau*

Entrez les textes de mise en page générale. Entrez ensuite les données (B7 à D9, B12 à D15 et B18 à D20), point approché et G0 approché en B2 à B4.

1- Calcul des gisements approchés d'intersection :

- Si le tableau MENUTOPO.XLS est chargé, entrez la formule suivante en case E7  
= Gisement(B7,C7,\$B\$2,\$B\$3) ↴
- Sinon utilisez la fonction ATAN2 d'Excel (voir tome 1, chap. 3, § 5.2.4.).

Recopiez ensuite la case E7 vers E8 et E9

2- Calcul des gisements observés de relèvement :

En case E12, entrez la formule : = \$B\$4 + D12. ↴ puis recopiez cette case vers D13 à D15.

3- Calcul des gisements approchés de relèvement :

En case F12, entrez la formule : = GISEMENT(B12,C12,\$B\$2,\$B\$3) puis recopiez vers F13 à F15.

4- Calcul des écarts en dmgon (intersection et relèvement) :

En case F7, entrez : = (D7 - E7)\*10000. ↴ puis recopiez en F8, F9 et G12 à G15.

5- Calcul des distances approchées de multilatération :

En case E18, entrez la formule : = RACINE((B18-\$B\$2)^2+(C18-\$B\$3)^2) ↴ puis recopiez en E19 et E20

6- Calcul des écarts de multilatération (en mm puis en dmgon de manière à les rendre homogènes aux autres écarts) :

En case F18, entrez : = (D18-E18)\*1000. ↴ puis recopiez en F19 et F20.

En case G18, entrez : = F18 / E18 / PI() \* 200 \* 10 ↴ puis recopiez en G19 et G20.

7- Calcul de la somme des carrés des écarts, en case G4, entrez :

= SOMMEPROD( F18 :F20 , F18 :F20 ) + SOMMEPROD( G12 :G15 , G12 :G15 ) + SOMMEPROD( G7 :G9 , G7 :G9 ) ↴

#### ◆ *Utilisation du solveur*

Dans le menu OUTILS, cliquez sur la rubrique Solveur pour provoquer le chargement de la macro-fonction SOLVEUR.XLA. Si le solveur n'est pas présent, provoquez son

chargement à partir de la rubrique MACROS COMPLÉMENTAIRES du même menu OUTILS.

Définissez la case G4 comme cellule à rendre minimale (cocher l'option Min).

Définissez les cases B2 à B4 comme cellules variables.

Adoptez les paramètres suivants de réglages (bouton OPTIONS) : précision  $10^{-10}$ , pourcentage d'erreur 0%, estimation quadratique, dérivée centrée et recherche par Newton.

Lancez le solveur et, après quelques itérations, vous obtenez les résultats suivants comparables à la solution donnée par la méthode des moindres carrés ; le solveur donne directement le point définitif M à la place du point approché de départ en cases B2 à B4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Point approché</b>						
2	X =	982 170,04	m				
3	Y =	1 155 830,09	m				
4	G0 =	350,3048	gon	Somme des carrés des écarts :		2753	
5	<b>Données d'intersection</b>						
6	Points	X (m)	Y (m)	Gobs (gon)	Gapp (gon)	Écarts (dmgon)	
7	67	983 695,71	1 158 247,39	235,8439	235,8420	19	
8	76	984 713,53	1 153 893,58	341,4276	341,4268	8	
9	86	979 465,39	1 153 480,45	54,4645	54,4643	2	
10	<b>Données de relèvement</b>						
11	Points	X (m)	Y (m)	Li	Gobs (gon)	Gapp (gon)	Écarts (dmgon)
12	65	980 546,82	1 157 468,79	0,0000	350,3048	350,3022	26
13	67	983 695,71	1 158 247,39	85,5349	35,8397	35,8420	24
14	73	984 729,43	1 155 546,12	156,7302	107,0350	107,0346	4
15	86	979 465,39	1 153 480,45	304,1589	254,4637	254,4643	7
16	<b>Données de multilatération</b>						
17	Points	X (m)	Y (m)	Dobs (m)	Dapp (m)	Écarts (mm)	Écarts (dmgon)
18	64	980 708,43	1 154 887,78	1739,109	1739,038	71	26
19	73	984 729,43	1 155 546,12	2575,160	2575,092	68	17
20	48	982 102,14	1 154 080,69	1750,690	1750,712	22	8

### Remarque

Les cases G18 à G20 servent à rendre homogènes à des angles les écarts dont on effectue la somme en case G4.

# 10 OPÉRATIONS ANNEXES DU CANEVAS D'ENSEMBLE

## 10.1 Station excentrée

### 10.1.1 Principe

La définition et le principe sont donnés au paragraphe 1.3.2.2.

### 10.1.2 Calcul des lectures corrigées

Soit le point R depuis lequel on ne peut viser le point J (fig. 1.83.). On utilise la station excentrée S pour obtenir la lecture  $L_{SJ}$ . On veut obtenir la lecture  $L'_{RJ}$  qui est la lecture que l'on aurait faite depuis R sur J (avec la même direction du zéro du limbe qu'en S). On note  $L'_{RJ}$  cette lecture pour la différencier de  $L_{RJ}$ , la lecture réduite à la référence utilisée en station en R généralement différente de celle utilisée en S.

#### 10.1.2.1 Corrections angulaires

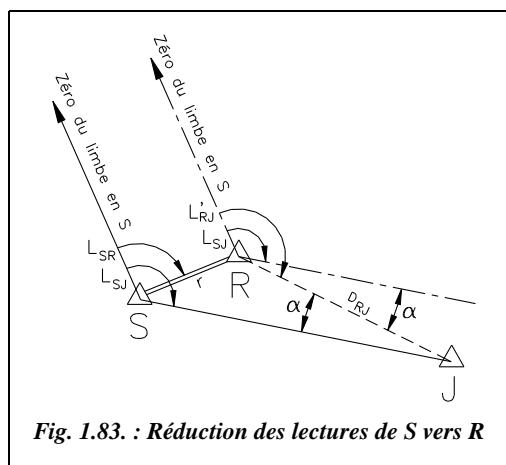


Fig. 1.83. : Réduction des lectures de S vers R

Si l'on mène depuis le point R une parallèle à la direction du zéro du limbe de la station excentrée S (fig. 1.83.), la lecture que l'on aurait dû faire depuis R sur le point J, notée  $L'_{RJ}$ , est obtenue en corrigeant de l'angle  $\alpha$  la lecture de S sur J ( $L_{SJ}$ ).

La distance d'excentrement  $r$  doit être connue au centimètre près (voir § 10.1.3.). On calcule  $\alpha$  par :

$$\sin \alpha = \frac{r}{D_{RJ}} \cdot \sin(L_{SJ} - L_{SR})$$

On en déduit la lecture corrigée :

$$L'_{RJ} = L_{SJ} + \alpha$$

$\alpha$  est donné avec son signe.

Ces calculs sont à effectuer pour chaque point J visé depuis S.

Cette formule est vraie quel que soit le cas de figure ; en effet, dans un autre cas de figure, on aurait eu  $\sin \alpha = \frac{r}{D_{RJ}} \cdot \sin(L_{SJ} - L_{SR})$  avec  $L'_{RJ} = L_{SJ} - \alpha$ , formules identiques aux précédentes.

Deux cas peuvent se présenter :

**1 - Le repère R est connu**, la distance  $D_{RJ}$  est alors calculée à partir des coordonnées :

$$D_{RJ} = \sqrt{(X_R - X_J)^2 + (Y_R - Y_J)^2}$$

**2 - Le repère R est inconnu** (cas du recouplement excentré) ; on détermine les coordonnées approchées de R ou de S suivant le nombre de visées (ici celles de S) et on en déduit les distances  $D_{SJ}$ . On en déduit :

$$D_{RJ} = \sqrt{r^2 + D_{SJ}^2 - 2r \cdot D_{SJ} \cdot \cos(L_{SJ} - L_{SR})}$$

On démontre au paragraphe 10.1.3. que connaître  $D_{RJ}$  au mètre près est suffisant ; donc déduire  $D_{RJ}$  des coordonnées approchées de R ou de S est correct.

#### 10.1.2.2 Réduction des lectures à la référence R

Deux cas doivent être envisagés :

**1 -** La référence au point R est choisie identique à celle en S (c'est en général le cas si on ne peut pas stationner R) ; les lectures corrigées sont alors déjà réduites à la référence en R.

**2 -** La référence choisie en R est différente de celle en S : il faut alors réduire les lectures corrigées à la même référence en utilisant les visées réciproques de R sur S et de S sur R, ou bien en utilisant une visée commune aux stations R et S. Par exemple, sur les figures 1.84-a. et 1.84-b., la référence en R est le point O, différente de la référence en S.

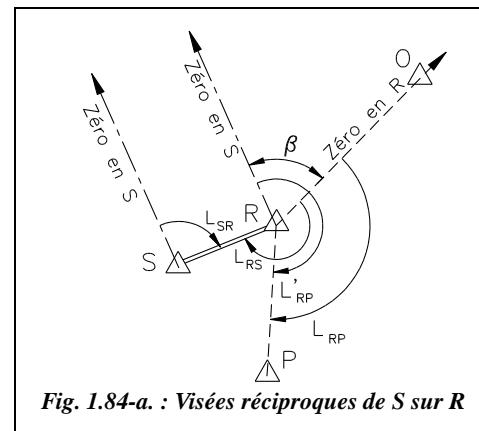
**2.a)** Si l'on dispose de visées réciproques du signal S sur R (fig. 1.84-a.) :

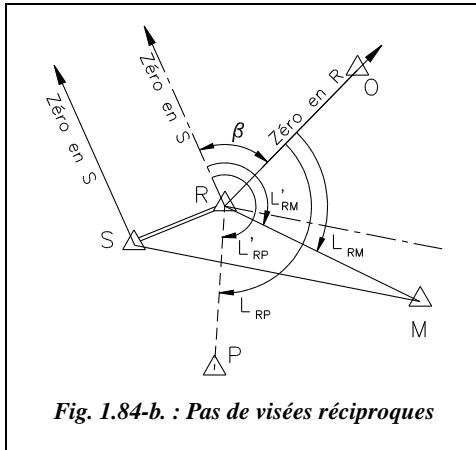
Pour obtenir la lecture  $L_{RP}$  (lecture sur P depuis R réduite à la référence en R qui est ici le point O), il faut retirer à la lecture corrigée  $L'_{RP}$  l'angle  $\beta$  qui a pour valeur :

$$\beta = L_{SR} - (L_{RS} \pm 200)$$

Finalement :

$$L_{RP} = L'_{RP} - \beta$$





2.b) Si l'on ne dispose pas de visées réciproques (fig. 1.84-b.) :

Il faut au moins un point commun visé depuis S et depuis R (ou bien un point connu en coordonnées visé depuis S, par exemple le point M de la figure 1.84-b.).

Pour obtenir la lecture  $L_{RP}$ , il faut retrancher à la lecture  $L'_{RM}$  l'angle  $\beta$  qui prend la valeur :

$$\beta = L'_{RM} - L_{RM}$$

donc :

$$L_{RP} = L'_{RM} - \beta$$

### 10.1.3 Précision requise sur les mesures de distance

Le cas le plus défavorable se produit lorsque  $L_{SJ} - L_{SR} = 100$  gon, ce qui implique que

$$\sin \alpha = \frac{r}{D_{RJ}}.$$

$\alpha$  étant faible, on peut le confondre avec son sinus :  $\alpha_{rad} \approx \frac{r}{D_{RJ}}$ .

Donc, en dérivant  $\alpha$  par rapport à  $r$  et  $D_{RJ}$  notée D, on obtient :  $d\alpha = \frac{dr}{D} - \frac{r \cdot dD}{D^2}$ .

**1** - Si l'on considère  $D$  exact ( $dD = 0$ ), alors l'écart type sur  $r$  est  $\sigma(r) = \sigma(\alpha_{rad}) \cdot D$ .

Fixons la précision angulaire à 6 dmgon (valeur usuelle pour le T2 au dmgon). Pour une distance  $D$  d'environ 3 000 m (canevas ordinaire), on calcule que  $r$  doit être connu à 2,8 cm près. Pour une distance  $D$  d'environ 1 500 m (canevas de précision), on calcule que  $r$  doit être connu à 1,4 cm près.

**2** - Si l'on considère  $r$  exact ( $dr = 0$ ), alors l'écart type sur  $D$  est  $\sigma(D) = \frac{\sigma(\alpha_{rad}) \cdot D^2}{r}$ .

La précision angulaire reste égale à 6 dmgon. La distance d'excentrement est fixée à une valeur faible  $r = 5$  m. Pour une distance  $D$  de 3 000 m en canevas ordinaire, on calcule que la distance  $D$  doit être connue à 8,5 m près. Pour une distance  $D$  de 1 500 m en canevas de précision, on calcule que la distance  $D$  doit être connue à 2,1 m près.

**En conclusion** : la précision du centimètre est nécessaire sur la mesure de la distance d'excentrement  $r$ , les distances de visée  $D_{RP}$  devant être connues au mètre près.

### 10.1.4 Premier exemple

On désire calculer les coordonnées d'une station excentrée 51 (S) qui servira de départ à une polygonale par un calcul de *G0moyen* de station s'appuyant sur les points 82 et 83 (fig. 1.85.).

Les coordonnées de 51 seront déduites du point connu 50 (R), non stationnable mais sur lequel on peut poser un miroir pour mesurer la distance d'excentrement SR, à savoir  $D_{SR} = 49,25$  m.

Les lectures effectuées en station au point 51 sont données ci-après.

Points	X (m)	Y (m)	L (gon)
83	462 780,07	3 181 355,89	0,0000
82	463 227,77	3 176 574,11	151,8280
50 (R)	462 003,65	3 178 885,95	267,3791

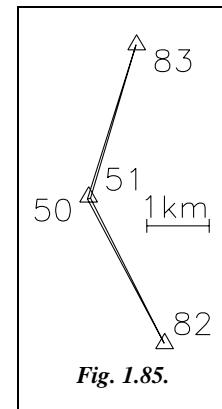


Fig. 1.85.

Les distances  $D_{RJ}$  sont déduites des coordonnées. Les lectures fictives  $L_{RJ}$  ne sont pas réduites à la référence 83 afin de conserver au point S et au point R le même *G0moyen* de station. Le tableau suivant détaille le calcul des lectures réduites  $L_{RP}$ .

Points J	$L_{SJ}$ (gon)	$D_{RJ}$ (m)	$L_{SJ} - L_{SR}$ (gon)	$\text{Alpha}$ (gon)	$L_{RP}$ (gon)
83	0,0000	2589,10	-267,3791	1,0555	1,0555
82	151,8280	2615,93	-115,5511	-1,1630	150,6650
50 (R)	267,3791	49,25			

Le calcul du *G0moyen* de station en R à partir des visées sur 82 et 83 est détaillé ci-après :

Points J	$D_{RJ}$ (km)	$G_{RJ}$ (gon)	$L_{RJ}$ (gon)	$G0j$ (gon)	$\text{Écarts}$ $ej$ (mgon)	Tolérance (mgon)	
						ordinaire	précision
83	2,60	19,3894	1,0555	18,3339	0,1	3,5	0,4
82	2,60	168,9986	150,6650	18,3337	-0,1	3,5	0,4
			$G0moyen :$	18,3338	gon		

Le calcul des coordonnées de S par rayonnement depuis R est :

$$G_{RS} = 18,3338 + 67,3791 = 85,7129 \text{ gon}$$

$$D_{RS} = 49,25 \text{ m}$$

Les coordonnées du signal S sont donc : S (462 051,67 m ; 3 178 896,91 m).

Pour vérifier, on calcule le  $G0moyen$  de station en S :

Points J	$D_{SJ}$ km	$G_{SJ}$ gon	$L_{SJ}$ gon	$G0i$ gon	Écarts $e_i$ (mgon)	Tolérance (mgon)	
						ordinaire	précision
<b>83</b>	2,60	18,3337	0,0000	18,3337	0,0	3,5	0,4
<b>82</b>	2,60	170,1618	151,8280	18,3338	0,0	3,5	0,4
			$G0moyen :$	18,3338	gon		

### 10.1.5 Deuxième exemple

Les points 312 et 310 n'étant pas visibles depuis R, on les vise depuis une station excentrée S (fig. 1.86-a.).

Calculer le tour d'horizon que l'on aurait fait en R.

Remarquez que l'on est dans le cas où la visée SR n'est pas réciproque.

Station	Point visé	Lectures (gon)	Distances (m)
500 (R)	<b>315 (P)</b>	112,0239	–
	<b>318</b>	357,1148	3617
	<b>316 (réf.)</b>	0,2336	2997
501 (S)	<b>310 (réf.)</b>	0,1871	2986
	<b>312</b>	138,2196	1012
	<b>315 (P)</b>	214,3871	2797
	<b>500 (R)</b>	278,1719	24,35

#### ◆ *création d'un tableau sur EXCEL*



Programmons la résolution précédente sur EXCEL : menu FICHIER / NOUVEAU. Entrer les textes de présentation et les données (A1-I10).

Excel 7

Entrer en case I4 la formule : = D4 – D\$6

Recopier la case I4 en I5 et I6 (EDITION / RECOPIER VERS LE BAS).

Entrer en E7 la formule suivante : = D7 – D\$10

Entrer en F7 : = RACINE(C7^2 + C\$10^2 – 2 \* C7 \* C\$10 \* COS(E7 \* PI() / 200))

Entrer en G7 la formule : = ASIN(C\$10 / F7 \* SIN(E7 \* PI() / 200)) \* 200 / PI()

Entrer en H7 la formule : = D7 + G7

Entrer en I7 : = SI (H7 – H\$9 + I\$4 < 0 , H7 - H\$9 + I\$4 + 400 , H7 - H\$9 + I\$4 )

Sélectionner la zone E7 à I10 puis menu EDITION / RECOPIER VERS LE BAS.

Vous devez obtenir le tableau suivant dans lequel la colonne I donne le tour d'horizon fictif en 500 réduit à zéro sur le point de référence 316 ; l'angle  $\beta$  vaut ici : 213,9180 – 111,7903 = 102,1277gon.

Le tableau EXCENT.XLS fourni sur le cédérom permet de réaliser ces calculs.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Station excentrée 501								
2	Station	Points P visés	Distance $D_j$ (m)	Lectures $L_j$ (gon)	$L_{sj} - L_{sr}$ (gon)	$D_{rj}$ (m)	Alpha (gon)	$L'_{rj}$ corr. $L_{rj}$ (gon)	$H_{rj}$ réduites $H_j$ (gon)
3	500 (R)	(P) 315		112,0239					111,7903
4		318	3617,00	357,1148					356,8812
5		(réf) 316	2997,00	0,2336					0,0000
6		(réf) 310	2986,00	0,1871	-277,9848	2994,34	0,4871	0,6742	298,5465
7	501 (S)	312	1012,00	138,2196	-139,9523	1026,49	-1,2225	136,9971	34,8694
8		(P) 315	2797,00	214,3871	-63,7848	2783,96	-0,4691	213,9180	111,7903
9		500	24,35	278,1719					
10									

#### ◆ résolution graphique



L'environnement de travail est réglé dans le menu FORMAT / CONTROLE DES UNITES : angles en grades, quatre chiffres significatifs, longueurs en unités décimales et avec une précision de deux chiffres, zéro au nord, sens de rotation horaire.

#### 1 - Report des lectures effectuées en 501 (S).

Ce sont les points 310, 312, 315 et 500 (fig. 1.86-b.).

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point @2986<0.1871 ↴ ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point @1012<138.2196 ↴ ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point @2797<214.3871 ↴ ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point @24.35<278.1719 ↴ ↴

Zoom ↴ Etendu ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point EXTrémité de... (point 315)

#### 2 - Report des lectures effectuées en 500 (R).

Ce sont les points 316 et 318 (voir fig. 1.86-b.)

Changement de repère : SCU ↴ 3points ↴ origine au point 500

(EXTrémité de... en Zoom transparent obtenu par 'Z ↴ ou bien menu VUE / ZOOM / FENETRE), axe des X sur le point 315 (EXTrémité de... après retour au zoom précédent par 'Z ↴ P ↴ ou bien menu VUE / ZOOM / PRECEDENT), axe des Y vers le point 312. SCU ↴ Z ↴ angle de rotation autour de Z : -312.0239 ↴ (cela positionne l'angle 112.0239 sur le point 315).

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point @3617<357.1148 ↴ ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point @2997<0.2336 ↴ ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point EXT de... (point 310) ↴ ↴

LIGNE ↴ du point 0,0 ↴ au point EXT de... (point 312) ↴ ↴

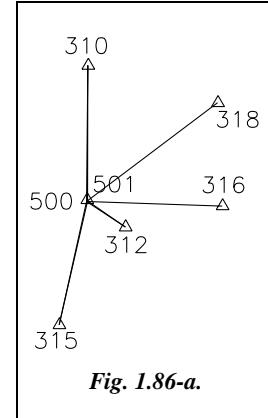
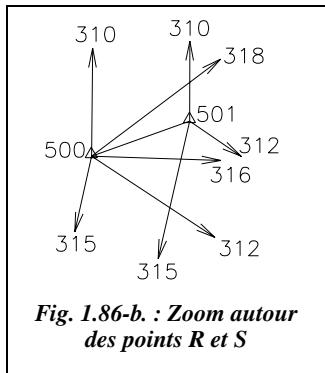


Fig. 1.86-a.

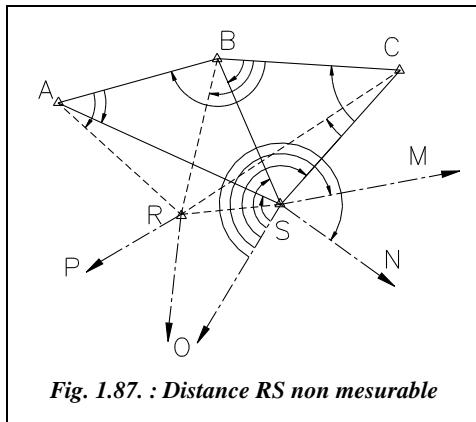


3 - Ramenez le zéro des angles sur le point 316.

$SCU \leftarrow Z \leftarrow$  angle de rotation 100.2336  $\leftarrow$ .

Lecture des angles réduits du tour d'horizon : en *Zoom* près du point 500 (fig. 1.86-b.), commande *LISTE* puis cliquez sur toutes les lignes partant de 500 vers les points et validez. Notez dans les renseignements fournis la valeur « angle dans le plan XY » qui correspond au gisement de la droite dans le repère local que l'on s'est fixé.

### 10.1.6 Cas particulier d'une distance d'excentrement non mesurable



C'est le cas le plus défavorable : par exemple, R est un clocher sur lequel il est impossible de poser un miroir.

On utilise des points intermédiaires (A, B et C, fig. 1.87.) répartis de manière homogène autour des points R et S et depuis lesquels on voit R et S ; puis on résoud tous les triangles.

Le déroulement de la manipulation et des calculs est le suivant :

- 1 - effectuez les lectures en S en y incluant les points A, B et C ;
- 2 - stationnez A, B et C en y relevant les angles sur S, R, A, B et C ;
- 3 - calculez les longueurs SA, SB et SC (résolution des triangles, avec vérification sur SB) ;
- 4 - calculez en repère local fictif le cheminement fermé S-A-B-C-S, la fermeture ne devant pas excéder 2 cm (la compensation s'effectue uniquement sur SA et SC). On en déduit la distance d'excentrement  $r$  et le gisement fictif des côtés SA, SB, SC ;
- 5 - calculez le gisement fictif du côté SR (avec vérification) puis calcul des angles CSR, BSR, ASR et déduction (avec vérification) de la lecture que l'on aurait dû faire de S sur R ;
- 6 - enfin, réduisez les observations en R comme étudié précédemment.

### Remarque

Cette méthode est très proche de celle du rabattement (§ 10.2.) mais s'en différencie par son objectif. Le rabattement vise à donner les coordonnées d'un point, alors que l'excentrement ne vise que la réduction des lectures angulaires de S vers R.

## 10.2 Rabattement au sol d'un point connu

Cette opération consiste à matérialiser au sol un (ou plusieurs) points nouveaux construits à partir d'un point connu. Ce point nouveau est accessible ou plus durable que le point connu (le cas de figure classique du rabattement est un point non stationnable comme un clocher, un château d'eau, un pylône, etc.) et permet par exemple le départ d'un cheminement. Le but de la manipulation est donc le calcul des coordonnées du point rabattu.

### 10.2.1 Le point connu est stationnable

On revient à une opération de rattachement (voir § 1.3.2.).

### 10.2.2 Le point connu est inaccessible

C'est le cas typique d'un clocher (point M, fig. 1.88-a.). Les deux méthodes suivantes sont généralement utilisées.

#### 10.2.2.1 Méthode du cadastre

La méthode est la suivante :

**1** - Construire deux bases AB et BC homogènes et formant avec le point M connu deux triangles sensiblement équilatéraux.

**2** - Viser un point connu éloigné P depuis l'un des trois points au sol (ici depuis A). De ce même point A ou depuis un autre point (B ou C), viser un autre point connu éloigné Q.

**3** - Résoudre les triangles BCM et ABM (vérification sur la distance BM calculée deux fois).

**4** - Résolution des triangles APM et BQM.

**5** - Calcul du gisement  $G_{MA}$  (vérification par double calcul : à partir de  $G_{MP}$  puis de  $G_{MQ}$ ).

**6** - Vérification par calcul du cheminement fermé M-A-B-C-M dont la fermeture planimétrique ne doit pas excéder 2 cm. La compensation se fait uniquement sur les côtés MA et MC (pour ne pas modifier les longueurs mesurées AB et BC supposées exactes).

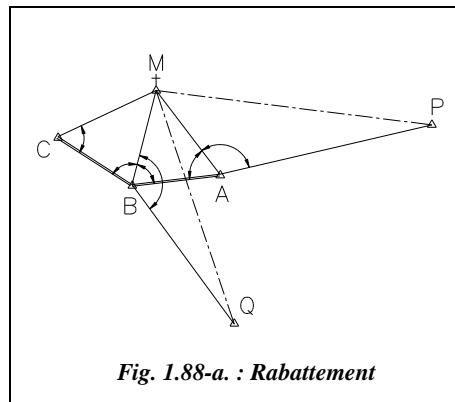
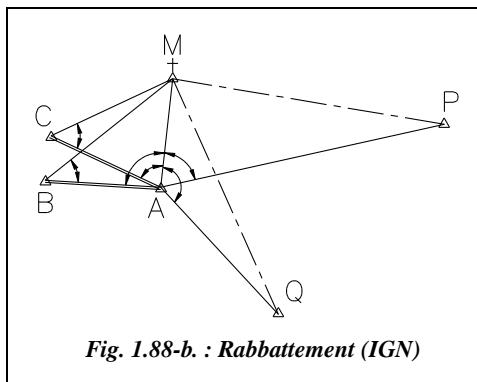


Fig. 1.88-a. : Rabattement

On obtient finalement trois points rabattus : A, B et C. A et B sont ici les plus précisément connus.

Si le point Q est visé depuis A, la démarche reste la même. Le point rabattu est plutôt le point A sur lequel on peut ajouter un contrôle final en calculant un *G0moyen* de station.

#### 10.2.2.2 Méthode de l'Institut Géographique National

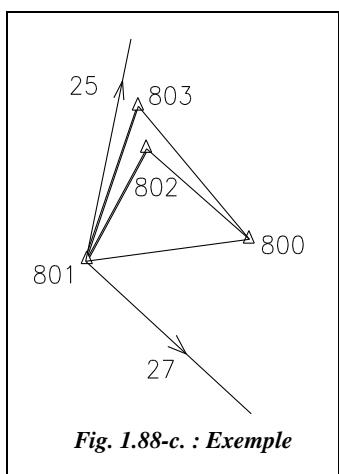


Cette méthode est une variante de la précédente. Elle est intéressante en cas de manque de place pour la construction des bases AB et BC.

Les bases AB et AC sont construites du même côté ; les triangles ne sont pas accolés comme précédemment. Les points P et Q sont visés depuis le même point A qui sera le point rabattu de M.

La vérification finale est un calcul de *G0moyen* de station au point A qui est obtenu par rayonnement depuis M.

#### 10.2.3 Exemple



Le point 800 est inaccessible. Il faut le rabattre au sol pour obtenir le départ d'un cheminement qui sera le point 801 depuis lequel deux autres points connus sont visibles (25 et 27). Deux bases sont construites pour cette manipulation : 801-802 et 801-803 (fig. 1.88-c.).

Les données sont :

Points	X (m)	Y (m)
<b>25</b>	793 403,28	3 314 851,82
<b>27</b>	794 591,35	3 311 524,47
<b>800</b>	793 061,66	3 312 886,49

Les observations ci-contre sont déjà réduites à la projection :

Station	Point visé	$H_z$ (gon)	$Dh$ (m)
801	25	8,4500	
	803	17,3286	98,30
	802	28,7574	78,02
	800	86,5591	
	27	138,0674	
802	800	0,1232	
	801	92,1532	78,03
803	800	0,0987	
	801	70,9983	98,30

◆ *La résolution numérique est détaillée dans les tableaux suivants.*

1 - Résolution des triangles 800-801-802 et 800-801-803 :

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
801-802	78,025	50,1683
800-801	109,19	92,0300
800-802	86,75	57,8017

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
801-803	98,30	59,8699
800-801	109,19	70,8996
800-803	107,75	69,2305

2 - Résolution des triangles 800-801-27 et 800-801-25 :

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
800-27	2048,18	51,5083
800-801	109,19	2,4566
801-27	2122,02	146,0350

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
800-25	1994,80	78,1091
800-801	109,19	3,2821
801-25	2028,96	118,6088

3 - Calcul du gisement 800-801 :

$$G_{800-25} = 10,9565 \text{ gon} \quad G_{800-801} = 10,9565 - 118,6088 (+ 400) = 292,3477 \text{ gon.}$$

$$G_{800-27} = 146,3128 \text{ gon} \quad G_{800-801} = 146,3128 + 146,0350 = 292,3478 \text{ gon.}$$

Les calculs précédents sont donnés avec vérification par double calcul la distance 800-801 (109,19 m) et le gisement 800-801 (292,3477 gon).

4 - Résolution du triangle 801-802-803 :

La somme des angles est correcte à 27 dmgon près.

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
801-803	98,30	151,9976
801-802	78,025	36,5709
802-803	25,64	11,4288
Contrôle :		199,9973

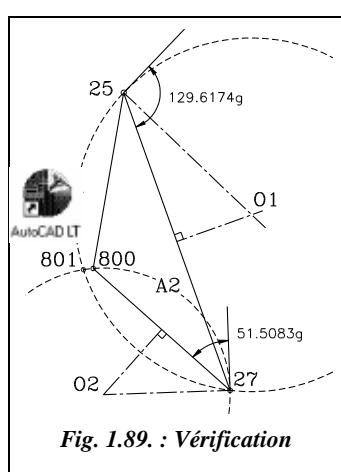
5 - Le tableau suivant détaille le calcul du cheminement fermé 800-801-802-803-800

Point	D <sub>h</sub> (m)	Angle Hg (gon)	G (gon)	ΔX (m)	ΔY(m)	X (m)	Y(m)
800						793 061,66	3 312 886,49
	109,19		292,3478	-108,40	-13,09	792 953,25	3 312 873,40
801						792 988,17	3 312 965,29
	98,30	400 - 69,2305	23,1173	34,92	91,89	792 993,55	3 312 940,22
803						793 061,66	3 312 886,49
	25,64	400 - 36,5709	186,5464	5,38	-25,07		
802							
	86,75	400 - 151,9976-92,0300	142,5188	68,11	-53,73		
800							
		400 - 50,1683	292,3505				
802							
Fermetures			0,0027	0,01	0,00		

La fermeture planimétrique est inférieure à 1 cm donc la manipulation semble correcte. On a choisi de compenser ce centimètre (en abscisse) sur le côté calculé le plus long, c'est-à-dire le côté 800-801.

6 - Calcul du *G<sub>0moyen</sub>* de station en 801 de coordonnées (792 953,25 m ; 3 312 873,40 m)

Pts	Distances m	Gisement gon	G <sub>0i</sub> gon	Écarts ei mgon	Tolérance en mgon		Écarts ri cm
					ordinaire	précision	
25	2028,96	14,2389	5,7889	0,0	7,4	1,5	0,0
800	109,20	92,3501	5,7910	2,1	7,4	1,5	0,4
27	2122,02	143,8561	5,7887	-0,2	7,4	1,5	0,7
Dm =	1420,06	G <sub>0moyen</sub> =	5,7889	Emq = 1,5	3,0	1,2	Rmq = 0,6



Le résultat final place la manipulation « à la limite » des tolérances du canevas de précision.

#### ◆ vérification graphique

La vérification graphique qui suit montre que le point 801 peut être calculé seul comme point relevé à partir des seules visées sur 800, 25 et 27. Comme il n'y a dans ce cas aucun contrôle des mesures, ce n'est pas une résolution graphique mais une vérification graphique.

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 10.1.4.

Placez les points d'appui comme suit : *LIGNE* du point 793403.28,314851.82 au point 793061.66,312886.49 au point 794591.35,311524.47

Pour la construction des arcs capables, consultez le chapitre 4, paragraphe 6.4. la construction graphique d'un point relevé. Deux arcs suffisent pour obtenir le point 801 (par exemple sur la figure 1.89., l'arc A1 issu de 25 et 27 et l'arc A2 issu de 27 et 800) car le troisième, issu de 25 et 800, passe aussi exactement par 801.

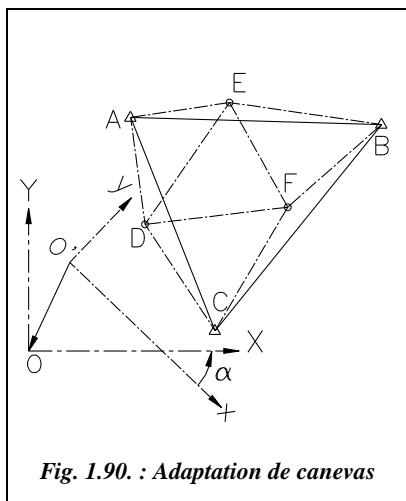
La commande *ID* *INTersection* des deux arcs donne les coordonnées du point 801.

Le résultat est : 801 (792 953.254 , 312 873.396).

### 10.3 Adaptation d'un canevas local à un canevas existant

Pour un chantier donné, on peut travailler dans un repère local. Tous les points calculés dans le repère local peuvent ensuite être recalculés dans le repère général (en système de coordonnées Lambert) à condition de **connaître au moins deux points dans les deux systèmes** (local et général). Le système général est conservé : c'est le système local qui est déformé.

Plus généralement, on peut ainsi adapter un canevas existant à un autre canevas existant par exemple lorsque l'on se situe en zone frontalière ou encore lorsque l'on est confronté à un système de coordonnées ancien. Ce type de transformation est aussi utilisé pour adapter au canevas existant un canevas de points levé par GPS.



Par exemple, sur la figure 1.90., est représenté un canevas existant dont les points A, B, C, D, E et F sont connus dans un repère local ( $O'$ ,  $x$ ,  $y$ ) ; Ces points doivent être exprimés dans le repère général ( $O$ ,  $X$ ,  $Y$ ). Les points A, B et C (points de calage) connus dans les deux systèmes permettront d'adapter le canevas local au canevas général.

La transformation des coordonnées doit comprendre :

- une translation de vecteur  $O'O$  pour que les deux systèmes aient la même origine.
- une rotation d'angle  $\alpha$  pour aligner les axes de coordonnées des deux repères.
- une adaptation d'échelle pour faire coïncider au mieux les deux canevas.

Cela signifie que si l'on désire travailler en repère local et pouvoir se rattacher plus tard au repère général, il faut établir un canevas partant d'au moins deux points du canevas d'ensemble. On retrouve le principe « aller de l'ensemble au détail ».

### 10.3.1 Transformation de Helmert à trois paramètres

C'est une des méthodes de calcul qui permet d'effectuer l'adaptation.

#### 10.3.1.1 Adaptation sur deux points A et B

Les points A et B sont connus dans les deux repères. Leurs coordonnées sont notées  $(X_A, Y_A)$ ,  $(x_A, y_A)$ ,  $(X_B, Y_B)$  et  $(x_B, y_B)$ .

Les coordonnées en repère général  $(X_p, Y_p)$  d'un point quelconque P connu en repère local  $(x_p, y_p)$  sont :

$$\begin{aligned} X_p &= X_A + a.(y_p - y_A) + b.(x_p - x_A) & p &= (y_B - y_A).(X_B - X_A) - (x_B - x_A).(Y_B - Y_A) \\ \text{avec } (a = \frac{p}{r} \text{ et } b = \frac{q}{r}) & & q &= (y_B - y_A).(Y_B - Y_A) + (x_B - x_A).(X_B - X_A) \\ Y_p &= Y_A - a.(x_p - x_A) + b.(y_p - y_A) & r &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

#### 10.3.1.2 Adaptation effectuée sur n points

On fait intervenir l'isobarycentre G du polygone délimité par les n points de base connus dans les deux systèmes (points A, B et C de la fig. 1.90.). Les coordonnées d'un point P deviennent :

$$\begin{aligned} X_p &= X_G + a.(y_p - y_G) + b.(x_p - x_G) \\ \text{avec : } x_G &= \frac{\sum x_i}{n}, y_G = \frac{\sum y_i}{n}, X_G = \frac{\sum X_i}{n}, Y_G = \frac{\sum Y_i}{n} \\ Y_p &= Y_G - a.(x_p - x_G) + b.(y_p - y_G) \text{ et } a = \frac{p}{r} \text{ et } b = \frac{q}{r} \end{aligned}$$

Les coefficients  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} p &= \sum(\Delta y_i \cdot \Delta X_i) - \sum(\Delta x_i \cdot \Delta Y_i) \text{ avec } \Delta x_i = x_i - x_G \text{ et } \Delta X_i = X_i - X_G \\ q &= \sum(\Delta y_i \cdot \Delta Y_i) + \sum(\Delta x_i \cdot \Delta X_i) \text{ avec } \Delta y_i = y_i - y_G \text{ et } \Delta Y_i = Y_i - Y_G \\ r &= \sum(\Delta x_i)^2 + \sum(\Delta y_i)^2 \end{aligned}$$

On vérifie que  $\sum(\Delta x_i) = \sum(\Delta y_i) = \sum(\Delta X_i) = \sum(\Delta Y_i) = 0$ , G étant le centre de gravité des n sommets.

Pour vérifier, on calcule à nouveau les coordonnées des points de base dans le système général à partir de leurs coordonnées dans le système local. Une moyenne quadratique des écarts de coordonnées d'un système à l'autre donne un ordre de grandeur de la précision de la transformation réalisée.

Si la transformation ne fait pas intervenir de mise à l'échelle, on peut calculer la distance de chaque point P au centre de gravité en système local et en système général : on doit retrouver la même valeur à quelques centimètres près. Si la transformation fait intervenir une mise à l'échelle, les calculs supposent une homothétie de centre G.

## 10.3.2 Exercices

### 10.3.2.1 Calage sur quatre points

Les points A, B, C et D sont connus en système Lambert et dans un système local.

Calculez les coordonnées en système général (Est, Nord ou X, Y) des points E et F.

Points	Coordonnées locales		Coordonnées Lambert	
	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)
<b>A</b>	2 751,75	2 729,08	981 844,58	3 155 171,74
<b>B</b>	3 115,61	2 552,80	982 208,31	3 155 161,55
<b>C</b>	2 734,81	2 360,07	981 966,96	3 154 862,66
<b>D</b>	3 037,41	2 326,88	982 227,64	3 154 947,12
<b>E</b>	2 906,78	2 685,77		
<b>F</b>	2 923,13	2 493,54		

#### ◆ résolution numérique sur tableur



Le tableau HELMERT.XLS fourni sur le cédérom permet d'effectuer ces calculs. Il calcule aussi un changement de repère par rotation et/ou translation. Les tableaux ci-dessous en sont extraits.

Centre de gravité				Calcul de $a$ et $b$ :	
$x = 2909,89$	$y = 2492,21$	$X = 982 061,87$	$Y = 3 155 035,77$	$a =$	-0,3694377
				$b =$	0,8207901
Points				Écarts en cm	
A	-158,14	236,87	-217,29	135,97	3,3
B	205,72	60,59	146,44	125,78	5,5
C	-175,09	-132,14	-94,92	-173,11	3,9
D	127,52	-165,33	165,77	-88,65	6,1
				Emq :	5,6

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont calculés au moyen des formules du paragraphe 10.3.1.

On en déduit les écarts (en cm) entre les coordonnées des quatre points de calage recalculées par les formules et les coordonnées initiales données en Lambert. L'écart moyen quadratique de 5,6 cm indique une corrélation correcte. On peut déduire de ces calculs les valeurs de paramètres plus significatives de cette transformation, à savoir :

- la longueur du vecteur de translation en G :  $\sqrt{(X_G - x_G)^2 + (Y_G - y_G)^2} = 990 963,24$  m.
- l'angle de rotation :  $G_{GA}(\text{Lambert}) - G_{GA}(\text{local}) = -26,9281$  gon.

- le facteur de mise à l'échelle (rapport de distances) :  $\frac{D_{GA} (\text{Lambert})}{D_{GA} (\text{Local})} = 0,900$ .

Le tableau suivant détaille le calcul de points nouveaux quelconques du canevas en système local à partir des paramètres déterminés auparavant.

Points du canevas local			Coord. Lambert		Distances GPi (m)		Facteur d'échelle	Écarts (cm)
Pts	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)	en local	Lambert		
<b>E</b>	2 906,78	2 685,77	981 987,80	3 155 193,49	193,58	174,25	0,900	1934
<b>F</b>	2 923,13	2 493,54	982 072,24	3 155 041,75	13,30	11,97	0,900	133

On constate que lorsqu'il y a mise à l'échelle, les distances en système local en en système général sont très différentes (dans un rapport de 0,9) et ceci d'autant plus que le point étudié est éloigné du point G. Cela s'explique dans certains cas par la différence d'ellipsoïde de référence entre les deux systèmes de projection utilisés.

### 10.3.2.2 Calage sur deux points

Reprenez les données de l'exemple précédent en enlevant les points C et D.

Que l'on utilise les formules simplifiées sur deux points A et B, ou les formules complètes faisant intervenir le barycentre G, on obtient dans les deux cas :

$$a = -0,3695599 \text{ et } b = 0,8206095.$$

$Emq = 0 \text{ cm}$  (ce qui est logique puisqu'il n'y a qu'une seule solution).

$$X_E = 981 987,80 \text{ m} \quad Y_E = 3 155 193,49 \text{ m}$$

$$X_F = 982 072,26 \text{ m} \quad Y_F = 3 155 041,79 \text{ m}$$

On note un écart de 4 cm sur le point F qui est plus éloigné des points A et B que E.

#### Remarques

Ce type de transformation est aussi utilisé pour l'opération de calibrage d'une tablette à digitaliser.

Il existe également des transformations à sept paramètres utilisées pour un travail dans l'espace à trois dimensions<sup>1</sup> (par exemple pour le passage d'un ellipsoïde à l'autre en coordonnées géocentriques, voir tome 1, chap. 2 § 3.4.6.).

### 10.3.3 Transformation à sept paramètres

Dans l'espace à trois dimensions, on utilise une transformation à sept paramètres (ou similitude euclidienne) : trois rotations, trois translations et une homothétie.

<sup>1</sup> Voir aussi l'article *Transformation de coordonnées* du numéro 8 de la revue XYZ.

On utilise souvent ce type de transformation dans le cadre d'un changement de système géocentrique (fig. 1.91.), en particulier lors de calculs GPS pour le passage des coordonnées WGS 84 de l'ellipsoïde IAGRS80 à Clarke 80. Dans ce cas précis, on utilise aussi ces transformations pour des adaptations de réseaux, par exemple, les formules de transformation de Molodensky permettent de passer en coordonnées géodésiques d'un système à un autre (voir tome 1, chap. 7, § 1.4.).

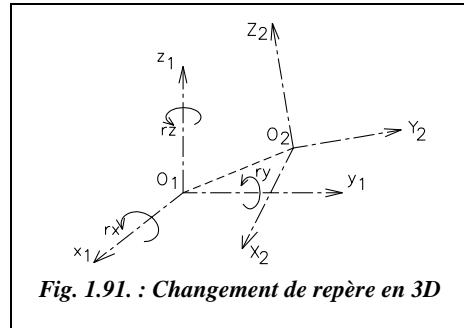


Fig. 1.91. : Changement de repère en 3D

#### 10.3.3.1 Équations de transformation

L'étude d'un changement de repère dans l'espace à trois dimensions est détaillée au paragraphe 7.2.8. du chapitre 5. À partir des résultats de cette étude et pour des angles de rotation petits, ce qui est toujours le cas dans le cadre d'une adaptation de réseaux, on obtient une matrice de rotation qui est de la forme :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & rz & -rz \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{bmatrix} \text{ car } \sin(rx) \approx rx, \cos(rx) \approx 1, \text{ etc.}$$

Les angles  $rx$ ,  $ry$ ,  $rz$  sont exprimés en radians et en sens positif trigonométrique.

Si l'on rajoute une homothétie de facteur  $k$  et une translation de vecteur  $(tx, ty, tz)$  connu dans le système d'arrivée  $S_2$ , on obtient la formule générale de passage d'un système géocentrique  $S_1$  vers un système  $S_2$  donnée ci-après.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{S_2} = \begin{pmatrix} k & rz & -ry \\ -rz & k & rx \\ ry & -rx & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{S_1} - \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$$

Connaissant les sept paramètres, on peut ainsi déterminer les coordonnées dans le système 2 de tout point du système 1. Le problème est souvent de déterminer ces paramètres en fonction de points communs aux deux systèmes.

#### 10.3.3.2 Recherche des paramètres

Les inconnues du calcul sont les **paramètres de la transformation** : trois rotations, trois translations et un facteur d'homothétie (sept inconnues). Si l'on connaît les coordonnées d'un point dans les deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , on peut déduire trois équations de la formule précédente. Donc trois points suffisent à déterminer les sept inconnues (à la rigueur un

point connu en X, Y et Z et deux points connus en X et Y). On est donc amené à résoudre un système de  $3.n$  équations,  $n$  étant le nombre de points connus en X, Y et Z dans les deux systèmes. Cette résolution s'effectue habituellement par les moindres carrés.

**1** - On exprime la différence entre les coordonnées dans les deux systèmes ; en posant  $k = 1 + d$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ etc. \\ X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}_{S_2} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ etc. \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}_{S_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & -z_1 & y_1 \\ 0 & -1 & 0 & y_1 & z_1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & -1 & z_1 & -y_1 & x_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & x_n & 0 & -z_n & y_n \\ 0 & -1 & 0 & y_n & z_n & 0 & -x_n \\ 0 & 0 & -1 & z_n & -y_n & x_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ d \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

La grande matrice centrale à sept colonnes et  $3.n$  lignes, est notée M.

**2** - On fait tendre la somme des carrés de ces différences vers 0. Si l'on note P le vecteur des paramètres inconnus, P vérifie l'équation  $(P + M^T \cdot M)^{-1} \cdot M^T \cdot K = 0$ .  $M^T$  est la transposée de M et  $M^{-1}$  l'inverse de M. On en déduit les paramètres de transformation.



Nous proposons une méthode de résolution plus originale faisant appel au solveur d'Excel. Elle consiste à calculer directement les carrés des écarts ( $X_i - x_i$  ;  $Y_i - y_i$  ;  $Z_i - z_i$ ) en fonction de paramètres de transformation approchés et à minimiser la somme des carrés des écarts en jouant sur les paramètres. Le solveur calcule les paramètres exacts par itérations (voir un exercice similaire au paragraphe 9.5.).

#### Ci-dessous est donné le détail des calculs du tableau de la page suivante

On se place dans le cas d'une transformation par rotation suivie de translation.

Les paramètres sont entrés en lignes 2, 3 et 4. Les points d'appui connus dans les deux systèmes sont entrés dans les cases A9 à D13 et F9 à I13. Dans les cases B18 à D22, les coordonnées dans le système 2 des points du système 1 sont recalculées à partir des paramètres de transformation (formule du paragraphe 10.3.3.1.).

Dans les cases J18 à J22, on calcule la distance entre les points donnés dans le système 2 et les points recalculés.

En case J24, on calcule la somme des carrés des distances et, au moyen du solveur d'Excel, on fait tendre cette somme vers 0 en faisant varier les paramètres (cases C2, C3, C4, G2, G3, G4 et J3). Le résultat de ce calcul itératif est donné dans le tableau ci-après. On peut même obtenir une idée de la précision de cette transformation en calculant un écart moyen quadratique sur les écarts en distance (case J25) ; il est ici de 62 mm.

Attention : les angles de rotation doivent être petits, exprimés en radians et en sens positif trigonométrique dans les calculs.

**Remarque**

Les angles de rotation étant importants, on obtient sur cet exemple des écarts allant jusqu'à 30 cm sur certains points si on utilise les formules complètes données au chapitre 5, paragraphe 7.2.8. à la place des formules approchées du paragraphe 10.3.3.1.

Une fois les sept paramètres de transformation calculés, on peut déterminer les coordonnées de n'importe quel point du système  $S_1$  dans le système  $S_2$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
<b>1 (1) Valeurs approchées des 7 paramètres :</b>										
<b>2 Rotation :</b>										
2	$rx =$	0,9546	gon			$tx =$	11,381	m		
3	$ry =$	1,0019	gon			$ty =$	32,550	m	$k =$	1,025
4	$rz =$	-0,4720	gon			$tz =$	-4,396	m		
5										
<b>6 (2) Coordonnées des points anciens connus dans les 2 systèmes (origine et destination) :</b>										
<b>7 Points anciens connus en système d'origine :</b>										
8	Points	X (m)	Y (m)	Z (m)		Points	X' (m)	Y' (m)	Z' (m)	
9	A	151,120	455,320	120,720		A'	138,250	437,100	123,650	
10	B	87,150	421,360	124,100		B'	72,870	401,850	126,680	
11	C	335,650	472,310	110,490		C'	327,450	455,740	115,860	
12	D	605,050	12,310	105,410		D'	607,050	-13,860	121,780	
13	E	165,560	374,940	129,870		E'	153,480	354,930	134,500	
14										
<b>15 (3) Points dans le système destination calculées à partir des paramètres de transformation :</b>										
<b>16 Coord. calculées :</b>										
17	Points	X' (m)	Y' (m)	Z' (m)		Points	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	Dist.
18	A'	138,244	437,094	123,687		A'	6	6	37	38
19	B'	72,872	401,860	126,654		B'	2	10	26	28
20	C'	327,427	455,724	115,850		C'	23	16	10	30
21	D'	607,058	-13,865	121,781		D'	8	5	1	10
22	E'	153,498	354,947	134,498		E'	18	17	2	25
23							<b>Écarts en mm</b>			
24	<b>Matrice rotation + homothétie :</b>					<b>Somme carrés des écarts :</b>			3817,7	
25		1,0250	-0,0074	-0,0157					Emq (mm) :	61,8
26		0,0074	1,0250	0,0150						
27		0,0157	-0,0150	1,0250						

**Attention** : la transformation inverse (du système 2 vers le système 1) ne s'obtient pas en prenant les signes opposés des translations et des rotations et l'inverse de k. En effet,

les angles de rotations et les translation définis dans le système 1 sont différents dans le système 2. À titre d'exercice, vérifiez que la transformation inverse donne les paramètres suivants (avec  $Emq = 6$  cm) :

$$\begin{array}{lll} rx = -0,9027 \text{ gon} & tx = -11,370 \text{ m} & k = 0,975 \\ ry = -0,9585 \text{ gon} & ty = -31,825 \text{ m} & \\ rz = 0,4481 \text{ gon} & tz = 4,007 \text{ m} & \end{array}$$

## 11 REMARQUES CONCERNANT LES TOLÉRANCES LÉGALES

L'arrêté du 21 janvier 1980 complété de l'instruction du 28 janvier fixant les tolérances applicables aux levers à grande échelle entrepris par les services publics peut être considéré comme obsolète aujourd'hui. En effet les travaux préliminaires à l'élaboration de ce texte de loi ont duré environ 10 ans et ont donc débuté il y a près de 30 ans maintenant.

Des progrès technologiques importants sont apparus en topographie depuis cette époque :

- l'apparition des distancemètres faciles d'emploi, fiables et précis ;
- l'informatisation progressive des processus de mesure, induisant une augmentation du rendement et de la précision ;
- l'apparition du GPS qui s'est fortement développé depuis quelques années.

L'écart type sur la distance entre deux points géodésiques est de l'ordre de  $10^{-5} \cdot D$  soit 3 cm entre deux points voisins distants de 3 km. Avec les distancemètres actuels ordinaires, l'écart type « constructeur » est de  $\pm (3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$ , soit 9 mm sur la mesure de distance entre ces deux points.

De même, lorsqu'on utilise des récepteurs GPS pour observer des canevas, on ne peut plus se référer à l'arrêté de 1980 qui ne fait intervenir que des mesures angulaires et/ou de distances. De plus, la réfection de la NTF (Nouvelle Triangulation de la France) et son remplacement par le RGF (Réseau Géodésique Français) conduiront à une homogénéité du réseau qui n'existe pas en 1980 et à une plus grande précision (de  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  en relatif).