3

DIVISION DE SURFACES

Les opérations de bornage de terrain entraînant des modificatifs du parcellaire cadastral, les projets d'aménagements fonciers, de lotissements, les opérations de délimitation, de mitoyenneté et cadastrales demandent au géomètre de calculer des surfaces, de les diviser ou d'en redresser les limites.

1 SURFACES DE POLYGONES QUELCONQUES

1.1 Mesures sur le terrain

Les formules de calcul de la surface d'un triangle sont détaillées dans le chapitre 5, paragraphe 3. Le cas du quadrilatère inscriptible est étudié au chapitre 5, paragraphe 4.

Plusieurs autres exemples sont traités au chapitre 5, paragraphe 5. : surfaces calculées à partir des coordonnées cartésiennes ou polaires, par la formule de Sarron, etc. et au chapitre 3 du tome 1, paragraphe 4.4. : exemple de mesure de surface horizontale.

Pour un polygone quelconque de n côtés (n = 4 sur la figure 3.1.), la surface peut se calculer par une décomposition en triangles.

La décomposition sera fonction des données dont on dispose, par exemple (fig. 3.1.) :

- Si l'on connaît les côtés a, b, c, d et e :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-e)(p-d)} + \sqrt{p'(p'-b)(p'-c)(p'-e)}$$

avec $p = (a + d + e)/2$ *et* $p' = (b + c + e)/2$

- Si l'on mesure la diagonale a et les hauteurs h et h' : $S = a(h + h')/2$.

- Si l'on mesure les longueurs a, b, c et les hauteurs h et h' :

$$S = (a \cdot h/2) + (h + h') \cdot b/2 + (c \cdot h'/2) = [(a + b)h + (b + c)h']/2$$

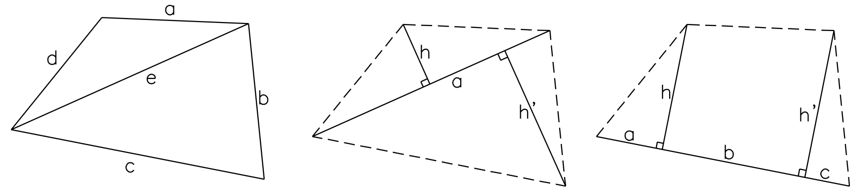

Fig. 3.1. : Décomposition d'un polygone en triangles

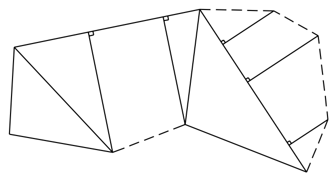

Fig. 3.2. : Découpage d'un polygone quelconque

À partir de ces considérations, tout polygone peut être décomposé en figures élémentaires, comme sur la figure 3.2. par exemple. Il revient à l'opérateur de choisir le meilleur découpage en fonction des cotes les plus accessibles sur le terrain, (en traits continus sur la figure 3.2.).

1.2 Mesures sur plan

1.2.1 Mesures sur support papier

Pour des estimations, des avant-projets, des documents cadastraux, etc., la mesure d'une surface sur un plan existant peut être suffisante. Il faut garder à l'esprit qu'en raison du jeu dimensionnel du papier et des imprécisions de retranscription sur calque, la valeur obtenue n'est qu'indicative.

Un appareil tel que le planimètre polaire permet de mesurer une surface directement sur un plan en parcourant son contour. La précision obtenue peut être de 1/3 000, soit 3 m^2 pour une surface de 10 000 m^2.

Une autre solution est de digitaliser le plan et d'utiliser les fonctions de calcul comme la commande *AIRE* d'AutoCAD. Un exemple complet de digitalisation a été traité au chapitre 10 du tome 1, paragraphe 1.6.

1.2.2 Mesures sur support informatique

L'avantage du support informatique est de conserver intactes les données d'un plan ; ainsi, la précision de la surface obtenue n'est tributaire que de la précision du lever de détails. Sur AutoCAD, la commande *AIRE* permet d'obtenir rapidement une surface délimitée par des arcs de cercle et des droites (voir l'exemple ci-après) :

La zone hachurée (fig.3.3.) représente une surface à exproprier du fait du passage d'une route d'une emprise de 30 m. La route est constituée de deux alignements raccordés par un arc de cercle de rayon 150 m ; le point S est connu. Les coordonnées des points sont les suivantes :

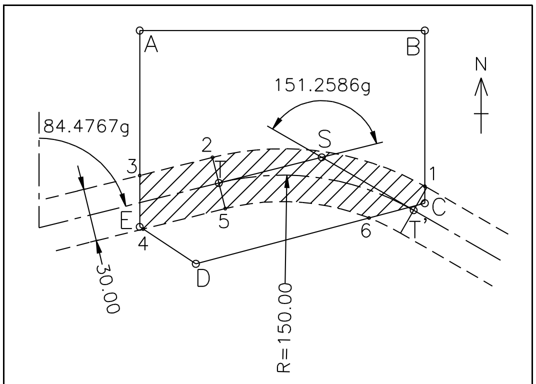

Fig. 3.3. : Exemple de calcul d'une surface

Pts	*E* (m)	*N* (m)
A	1756,042	3056,046
B	1918,345	3056,046
C	1918,345	2957,903
D	1788,018	2923,480
E	1756,042	2944,488
S	1859,692	2984,002

◆ *Calcul graphique de la surface à exproprier*

AutoCAD LT

L'environnement de travail est défini dans le menu FORMAT / CONTROLE DES UNITES) : angles en grades, zéro au nord, sens horaire, quatre chiffres après la virgule, longueurs à trois décimales.

Dessin de la parcelle ABCDE : *LIGNE*↵ du point *1756.042,30560.046*↵ au point *1918.345,3056.046*↵ au point *1918.345,2957.903*↵ au point *1788.018,2923.48*↵ au point *1756.042,2944.488*↵ au point *Cl*ore↵

Dessin de l'emprise de la route : *LIGNE*↵ du point *1859.692,2984,002*↵ au point *@150<284.4767*↵ *LIGNE*↵ du point S (*EXT*rémité de …) au point *@150<133.2181*↵ *CERCLE*↵ option *TTR*↵, 1re zone de tangence : cliquez vers le point T, 2e zone de tangence : cliquez vers le point T′, rayon : *150*↵. Construction de la largeur de la route par décalage de 15 m de part et d'autre : commande *DECALER*↵ par *15*↵

Mesure de la surface hachurée : *POLYLIGNE*↵ du point 1 (*INT*ersection de ...) au point, mode *A*rc↵ *R*ayon↵ *165*↵, point final : point 2 (*EXT*rémité de ...) au point, mode *LI*gne↵, point 3 (*INT*ersection de ...) au point (passer ici en zoom transparent '*Z*↵ autour du point E), point E (*EXT*rémité de ...) au point 4 (*INT*ersection de ...) au point (revenir au zoom précédent par '*Z*↵ *P*↵), point 5 (*EXT*rémité de...) au point, mode *A*rc↵, *S*econd point↵ : donner un point sur l'arc 5-6 avec l'accrochage *PRO*che de ..., point final : point 6 (*INT*ersection de ...) au point, mode *LI*gne↵, point C (*EXT*rémité de ...) au point *C*lore↵

AIRE↵, option *O*bjet↵, *D*ernier↵ : le logiciel affiche la surface : *S* = 4 674,6853 m^2 et le périmètre : *P* = 373,18 m.

1.3 Détermination graphique

L'objectif est de transformer graphiquement un polygone quelconque en un triangle de même superficie.

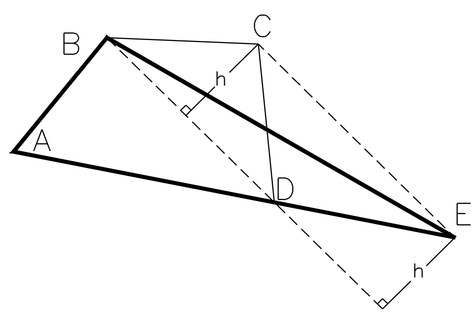

Fig. 3.4. : Transformation d'un polygone en triangle

Cela permet par exemple d'obtenir une valeur approchée d'une surface délimitée par un polygone quelconque donnée sur un support papier, par la simple construction et la mesure de la base et de la hauteur du triangle. C'est également très utile pour le redressement de limites, traité au paragraphe 3.

Par exemple, le polygone ABCD donné sur la figure 3.4. est de même surface que le triangle ABE construit ainsi : on mène une parallèle à BD passant par C ; cela donne le point E ; le triangle BDE est de même surface que le triangle BCD car ils ont la même base BD et la même hauteur puisque CE est parallèle à BD.

La surface du polygone est donc : $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDE} = S_{ABE}$.

On peut remarquer, sur la figure 3.5., des constructions équivalentes pour des polygones à cinq, six ou sept côtés.

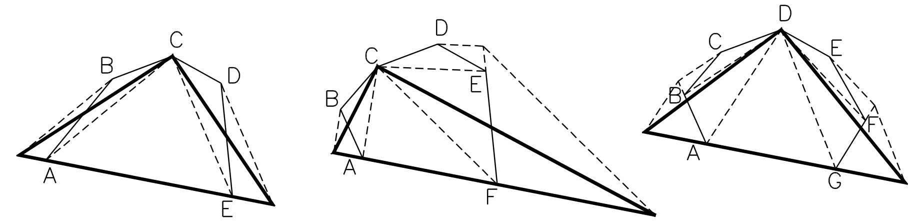

Fig. 3.5. : Transformation graphique de polygones en triangles

2 DIVISION DE SURFACES

Tous les cas de figure ne pouvant être envisagés, nous n'étudierons que certains d'entre eux, les plus fréquents.

2.1 Limites divisoires passant par un sommet du polygone

2.1.1 Cas du triangle

L'objectif est de diviser en deux surfaces S_1 et S_2 le triangle ABC de surface totale S (fig. 3.6-a.) par une ligne passant par B ; on peut calculer la hauteur h commune aux deux triangles à partir de la connaissance des points A, B et C :

$$h = 2 \cdot \frac{S_1 + S_2}{AC}.$$

On positionne ensuite le point A′ ainsi :

$$AA' = 2S_1 / h$$

Une autre solution est de remarquer que les surfaces des triangles sont proportionnelles à leur base ; on arrive directement à la même expression :

$$AA' = AC \frac{S_1}{S_1 + S_2}.$$

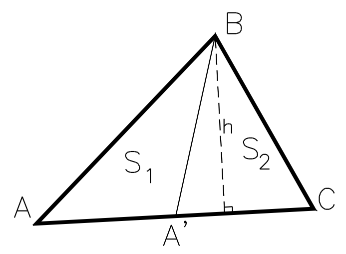

Fig. 3.6-a. : Division passant par un sommet

Application

Considérons les points A(341,65 ; 54,77), B(687,96 ; 199,03) et C(658,28 ; 80,86). Divisez le triangle ABC en deux surfaces S_1 et $S_2 = S_1 / 3$, la ligne de partage passant par B et la surface la plus grande touchant le point A.

◆ ***Construction graphique***

Construction du triangle

POLYLIGNE↵ du point *658.28,80.86*↵ au point *687.96,199.03*↵ au point *341.65,54.77*↵ au point *C*lore↵

Mesure de sa surface et calcul de S_1 et S_2 :

AIRE↵ option *O*bjet↵, cliquez sur le contour du triangle...

Résultat : S_{totale} = 18 320,907950 m^2.

Donc S_1 = 13 740,680963 m^2 et S_2 = 4 580,226988 m^2.

Construction graphique de A′: on place sur une droite quelconque deux segments proportionnels à S_1 et S_2 : le segment Aa′ est proportionnel à S_1 et le segment a′c est proportionnel à S_2, ce qui revient à dire que Ac est proportionnel à S_{totale}, (fig. 3.6-b.).

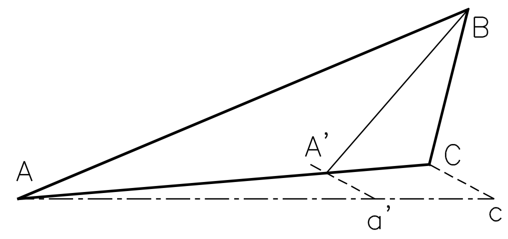

Fig. 3.6.-b. : Construction graphique

LIGNE↵ du point A (*EXT*rémité de...) au point *@270<100*↵ au point *@90<100*↵.
LIGNE↵ du point C (*EXT*rémité de..) au point c (*EXT*rémité de...).
COPIER↵ le segment Cc du point c (*EXT*rémité de ...) au point a’ (*EXT*rémité de ...).
LIGNE↵ du point B (*EXT*rémité de ...) au point A′ (*INT*ersection de ...).

Contrôlez avec la commande *AIRE*↵ que les surfaces S_1 et S_2 sont correctes et mesurez la cote AA′ avec la commande *DISTANCE*↵. Résultat : AA′ = 238,277 m.

2.1.2 Polygone quelconque

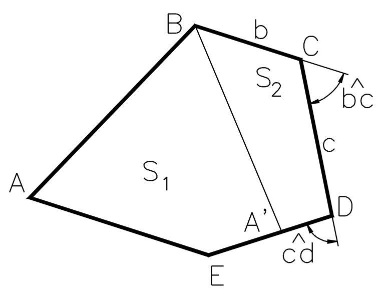

Fig. 3.7. : Polygone quelconque

On cherche à diviser en deux surfaces S_1 et S_2 le polygone ABCDE de surface totale S (fig. 3.7.). La limite passe par B.

On revient au cas du triangle (§ 2.1.1.) en calculant les surfaces des triangles BCD, BDE et BAE. Ces calculs permettent de positionner le point divisoire A′ : par exemple, si $S_{BCD} < S_2$ et $S_{BCD} + S_{BDE} > S_2$ alors A′ est sur DE.

On divise ensuite le triangle BED en deux surfaces $S_1' = S_1 - S_{ABE}$ et $S_2' = S_2 - S_{BCD}$.

On peut aussi utiliser la formule de Sarron (voir chap. 5, § 5.3.). Il faut alors mesurer ou calculer à partir des coordonnées les angles dirigés $\widehat{bc}$ et $\widehat{cd}$, ainsi que les côtés b et c. On en déduit DA′ en résolvant l’équation suivante :

$$2S_2 = bc \,.\, \sin\widehat{bc} + b \,.\, DA' \,.\, \sin(\widehat{bc} + \widehat{cd}) + c \,.\, DA' \,.\, \sin\widehat{cd}$$

2.2 Limites divisoires passant par un point quelconque

On cherche à diviser en trois surfaces S_1, S_2 et S_3 le polygone ABCDE de surface S (fig. 3.8.) ; la limite devant passer par un point P situé sur AB.

La longueur AP étant donnée, on peut calculer AA′ en fonction de S_1, de l'angle α (à calculer ou mesurer) et de la longueur AP.

On est ensuite ramené à la division du polygone PBCDEA′ en deux surfaces S_2 et S_3 par une limite passant par un sommet (§ 2.1.2.).

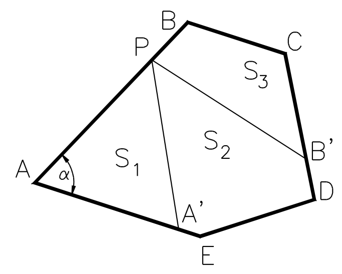

Fig. 3.8. : Limite divisoire quelconque

Si S_1 est telle que A′ se trouve sur DE, on calcule la surface du triangle PAE puis on positionne A′ sur DE à partir de la connaissance de PE, de l'angle PED et de la surface $S_1' = S_1 - S_{APE}$.

2.3 Limites partageant un triangle en trois surfaces

2.3.1 Les limites passent par chacun des sommets

On cherche à déterminer la position du point I tel que les limites IA, IB et IC partagent le triangle ABC en trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 (fig. 3.9.).

La construction peut être purement graphique : on détermine les coefficients de proportionnalité k_1, k_2 et k_3 tels que :

$$k_1 = S_1 / (S_1 + S_2 + S_3)$$
$$k_2 = S_2 / (S_1 + S_2 + S_3)$$
$$k_3 = S_3 / (S_1 + S_2 + S_3)$$

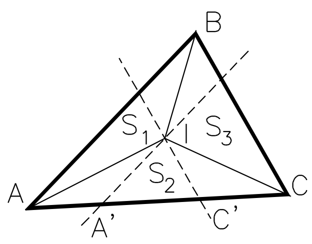

Fig. 3.9. : Triangle séparé en trois surfaces

On en déduit les points A′ et C′:

$$AA' = k_1 . AC \text{ et } CC' = k_3 . AC$$

Les droites parallèles à AB et BC passant par A′ et C′ se coupent en I puisque les surfaces $S_{BAA'}$ et $S_{BCC'}$ sont respectivement égales aux surfaces S_{AIB} *et* S_{BIC} .

Analytiquement, en s'inspirant de la construction précédente, on calcule la position des points A′ et C′ puis on détermine l'intersection des droites A′I et C ′I, dont on connaît le gisement, à partir des coordonnées de A, B et C.

Exercice

Soit le triangle défini par les points suivants : A (601,190 ; 711,961), B (723,757 ; 840,549), C (791,169 ; 722,166). Trouvez le point I divisant ce triangle en trois surfaces S_1 = 3 270 m^2, S_2 = 4 388 m^2 et $S_3 = S - S_1 - S_2$. Le triangle étudié est celui de la figure 3.9. ; sa surface totale est S = 11 589,111709 m^2.

Réponse

On obtient k_1 = 0,2821614 et k_3 = 0,3392073. Donc AA′ = 0,2821614 × 190,252 = 53,682 m et CC′ = 0,3392073 × 190,252 = 64,535 m. On déduit les coordonnées des points A′ (654,795 ; 714,840) et C′ (726,727 ; 718,704), connaissant le gisement G_{AC} = 96,5836 gon. On trouve les coordonnées de I par intersection des droites AI′ et CI′ (par les formules de Delambre) dont on connaît les coordonnées d'un point et le gisement : celles de A et de C et les gisements $G_{AI'} = G_{AB}$ = 48,4741 gon et $G_{CI'} = G_{CB}$ = 367,0457 gon. Les coordonnées du point I sont (701,202 ; 763,528).

◆ ***Construction graphique***

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.2.2.

Construction du triangle : *LIGNE*↵ du point *601.190,711.961*↵ au point *723.757,840.549*↵ au point *791.169,722.166*↵ au point *C*lore↵ (voir fig. 3.9.).

Positionnement graphique de A′ et C′ : la construction suivante permet d'éviter le calcul des coefficients *ki* en utilisant des cercles de rayons proportionnels aux surfaces S_1, $S_1 + S_2$ et $S_1 + S_2 + S_3$.

CERCLE↵ de centre A (*EXT*rémité de...) de rayon *32.70*↵

CERCLE↵ de centre A de rayon 76.58↵

CERCLE↵ de centre A de rayon 115.89111709↵

ECHELLE↵, choix des objets : les trois cercles précédents, point de base : A, option *R*éférence↵, longueur de référence de A au point d'intersection du dernier cercle tracé et de la ligne AC, nouvelle longueur : donnez le point C (*EXT*rémité de ...). Les points A′ et C′ sont situés à l'intersection des premier et deuxième cercles tracés avec la droite AC.

Positionnement des droites A′I et C′I : *SCU*↵ option *O*bjet↵, cliquez sur la ligne AC vers le point A. *COPIER*↵ la droite AB du point A (EXTrémité de...) au point *@53.686,0*↵. *COPIER*↵ la droite BC du point B (EXTrémité de...) au point *@125.705,0*↵. Le point I est à l'intersection des droites ; lire ses coordonnées par *ID*↵. Lire les surfaces IAB, IAC et IBC par la commande *AIRE*↵ : donnez les trois sommets de chaque surface, l'une après l'autre, puis validez.

2.3.2 Les limites sont perpendiculaires aux côtés

On cherche à diviser le triangle ABC d'une surface totale S en trois surfaces S_1, S_2 et S_3, les limites divisoires étant perpendiculaires aux côtés (fig. 3.10.).

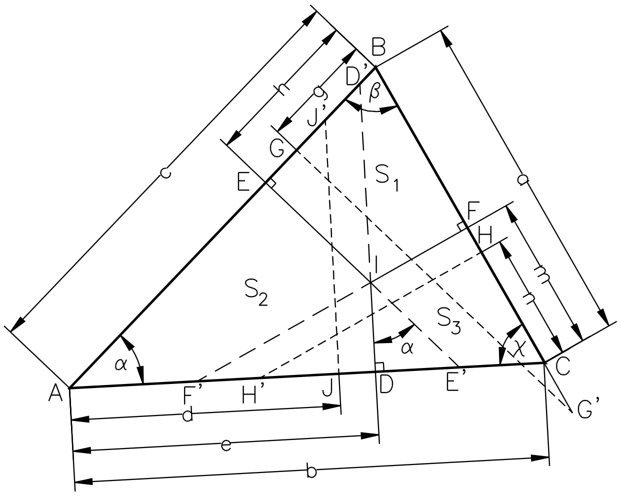

Fig. 3.10. : Partage en trois superficies avec limites perpendiculaires aux côtés

Le procédé de résolution est le suivant : on calcule la position des points G, H et J proches des points définitifs cherchés E, F et D que l'on déterminera par approximations successives.

Soit la droite JJ′ parallèle à DD′ et positionnée telle que $S_{AJJ'} = S_{AEID} = S_2$.

On peut écrire dans le triangle AJJ′ : $S_{AJJ'} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{AJ}\cdot\dfrac{\mathrm{AJ}}{\cos\alpha}\sin\alpha = S_2$.

Donc AJ = $d = \sqrt{\dfrac{2S_2}{\tan\alpha}}$, de même BG = $g = \sqrt{\dfrac{2S_1}{\tan\beta}}$ et CH = $n = \sqrt{\dfrac{2S_3}{\tan\chi}}$.

Dans le triangle ADD′, on a :

$2.S_{AEID} = 2.(S_{ADD'} - S_{ID'E}) = e^2 . \tan\alpha - \mathrm{IE}^2 . \tan\alpha = d^2 . \tan\alpha$ donc IE = $\sqrt{e^2 - d^2}$.

De même ID = $\sqrt{m^2 - n^2}$ et IF = $\sqrt{h^2 - g^2}$.

On peut aussi écrire que :

$2.S_{AEID} = 2.(S_{AEE'} - S_{IDE'}) = (c - h)^2 . \tan\alpha - \mathrm{ID}^2 . \tan\alpha = d^2 . \tan\alpha.$

Donc ID = $\sqrt{(c-h)^2 - d^2}$, de même IE = $\sqrt{(a-m)^2 - g^2}$ et IF = $\sqrt{(b-e)^2 - n^2}$.

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\text{ID} = \sqrt{(c-h)^2 - d^2} = \sqrt{m^2 - n^2} \quad \text{avec } n = \sqrt{\frac{2S_3}{\tan\chi}}$$

$$\text{IE} = \sqrt{(a-m)^2 - g^2} = \sqrt{e^2 - d^2} \quad \text{avec } d = \sqrt{\frac{2S_2}{\tan\alpha}}$$

$$\text{IF} = \sqrt{(b-e)^2 - n^2} = \sqrt{h^2 - g^2} \quad \text{avec } g = \sqrt{\frac{2S_1}{\tan\beta}}$$

La résolution est donc effectuée par approximations successives : on se fixe une valeur h_0 pour h ; on en déduit m dans la formule donnant ID. On en déduit ensuite e dans la formule donnant IE puis on retrouve une nouvelle valeur h_1 de h dans la formule donnant IF. On recommence le calcul avec une nouvelle valeur de h qui est la moyenne entre h_0 et h_1 jusqu'à ce que la valeur obtenue en fin de calcul soit identique à celle prise en début de calcul.

Application

Soit le triangle défini par les points A (627,170 ; 2230,490), B (749,737 ; 2359,078) et C (817,148 ; 2240,695). La surface du triangle est S = 11 589,047415 m².

La surface S_1 doit être de 3 500 m², S_2 de 5 500 m² et S_3 de 2 589,047415 m².

Réponses

On calcule a = 136,2306 m, b = 190,2519 m et c = 177,6444 m.

On calcule α, β et χ par différences de gisements : α = 48,1095 gon, β = 81,4280 gon et χ = 70,4625 gon. On en déduit que n = 50,9034 m, d = 108,0440 m et g = 45,8484 m. On fixe une valeur h_0 de départ pour h, on en déduit m puis e puis h_1. on recommence le calcul avec h_2 qui est la demi-somme de h_0 et h_1 :

h_0 = 60 m →	m = 68,9772 m →	e = 118,7201 m →	h_1 = 68,0273 m
$h_2 = (h_0 + h_1)/2$ = 64,01m	m = 61,8905 m	e = 122,8735 m	h_3 = 63,6456 m
$h_4 = (h_2 + h_3)/2$ = 63,828m	m = 62,2240 m	e = 122,6720 m	h_5 = 63,8589 m
$h_6 = (h_4 + h_5)/2$ = 63,844m	m = 62,1947 m	e = 122,6896 m	h_7 = 63,8402 m

En utilisant un tableur, on arrive à h = 63,842244 m.

On peut donc considérer que $h \approx$ 63,842 m. On en déduit m = 62,198 m et e = 122,688 m. Donc ID = 35,741 m, IE = 58,127 m et IF = 44,427 m.

D'où les coordonnées de I à partir de D, E ou F : I (747,764 m ; 2272,761 m), la figure 3.10. donne la position finale du point I.

Vérification : le calcul des surfaces donne S_1 = 3 499,97 m^2, S_2 = 5 500,02 m^2 et S_3 = 2 589,06 m^2.

Autre calcul : partage de S_{ABC} en trois parties égales ; vérifiez que l'on trouve I (725,682 m ; 2 270,578 m).

2.4 Division d'un quadrilatère en quatre surfaces égales

On cherche à partager le quadrilatère ABCD (fig. 3.11.) en quatre parties égales, les limites divisoires coupant chaque côté en son milieu.

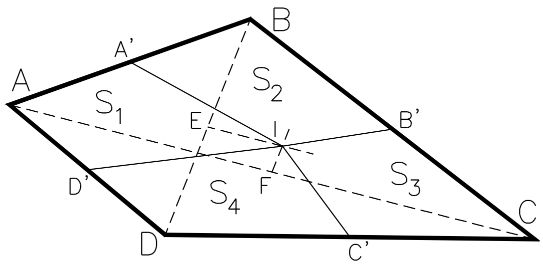

Fig. 3.11. Quadrilatère divisé en quatre surfaces égales

La construction graphique consiste à tracer A′ milieu de AB, B′ milieu de BC, C′ milieu de CD et D′ milieu de DA ; puis à tracer la parallèle à BD passant par F, milieu de AC et la parallèle à AC passant par E, milieu de BD.

Les droites issues du point d'intersection I de ces deux parallèles reliant les points A′, B′, C′ et D′ partagent la surface en quatre parties égales.

La justification de cette construction est la suivante : la surface du triangle AEB est égale à la moitié de celle de ABD puisque E est milieu de BD : $S_{AED} = S_{ABD} / 2$.

De même, $S_{A'EB} = S_{AEB} / 2 = S_{ABD} / 4$. On peut aussi montrer que $S_{BEB'} = S_{BEC} / 2 = S_{BDC} / 4$.

Donc $S_{A'EB} + S_{BEB'} = S_{A'BB'E} = (S_{ABD} + S_{BDC}) / 4 = S / 4$ (S étant la surface totale délimitée par le quadrilatère).

La surface $S_{A'BB'E}$ peut se transformer en $S_{A'BB} + S_{A'B'E}$ et $S_{A'B'E} = S_{A'B'I}$ (ces deux triangles ayant la même base et la même hauteur). Donc, finalement, $S_{A'BB'I} = S / 4$.

On peut mener le même raisonnement pour les surfaces $S_{AA'ID'}$, $S_{D'IC'D}$ et $S_{IB'CC'}$.

Analytiquement, en s'inspirant de la résolution graphique précédente, on calcule les coordonnées de E et F puis les gisements des droites BD et AC. On en déduit les coordonnées de I par intersection (formules de Delambre).

Exemple

Découpez le quadrilatère ABCD en quatre parties égales. Les coordonnées des sommets sont : A (249,590 ; 320,833), B (402,682 ; 375,463), C (583,491 ; 235,104), D (348,567 ; 237,984). Ce quadrilatère est celui de la figure 3.11.

◆ ***Résolution graphique***

AutoCAD LT

Dessin du quadrilatère : *LIGNE*↵ du point *249.590,320.833*↵ au point *402.682,375.463*↵ au point *583.491,235.104*↵ au point *348.567,237.984*↵ au point *C*lore↵

Construction du point I : *LIGNE*↵ du point A au point C (*EXT*rémité de...) puis *LIGNE*↵ du point B au point D. *COPIER*↵ la ligne AC du point A au point *MIL*ieu de BD. *COPIER*↵ la ligne BD du point B au point *MIL*ieu de AC. Lire les coordonnées de I par *ID*↵ *INT*ersection de...

Résultat : I (423.065 , 294.543).

Pour contrôler les surfaces, passez en mode d'accrochage permanent intersection (menu OPTIONS / ACCROCHAGE AUX OBJETS ou touche F3) et utilisez la commande *AIRE*↵. Résultat : $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 6317{,}95$ m^2.

2.5 Limites divisoires parallèles à un côté

2.5.1 Cas du triangle

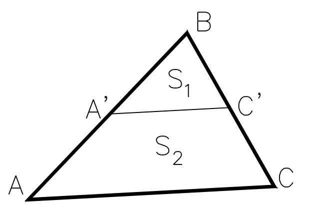

Fig. 3.12-a. : Limite divisoire parallèle à un côté

On cherche à diviser le triangle ABC (fig. 3.12-a.) en deux surfaces S_1 et S_2, la ligne de division étant parallèle au côté AC.

Les triangles BA′C′ et BAC étant semblables, on peut écrire que :

$$k_1 = \frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{BC'^2}{BC^2} = \frac{BA'^2}{BA^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}$$

On en déduit la position de A′ et de C′ :

$$\boxed{BA' = BA\sqrt{k_1} \text{ et } BC' = BC\sqrt{k_1}}$$

◆ ***construction graphique***

On note S la surface totale $S = S_1 + S_2$. Sur une droite quelconque BB′, on reporte deux longueurs proportionnelles à S_1 et S : Bd = $k \cdot S$ et Be = $k \cdot S_1$ (fig. 3.12-b.).

La parallèle à Cd passant par le point e coupe BC en e′. On élève la perpendiculaire à BC passant par e′, elle coupe en f le cercle de diamètre BC. La distance Bf est rabattue sur BC pour donner le point C′ de passage de la limite cherchée, A′C′ étant parallèle à AC.

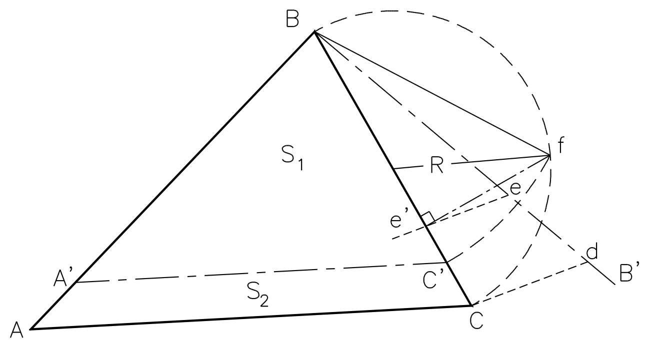

Fig. 3.12-b. : Résolution graphique

La construction précédente se justifie comme suit :

BC′ = Bf puisque C′ et f sont sur le même cercle de centre B ; dans le triangle rectangle Be′f on peut écrire : $Bf^2 = BC'^2 = Be'^2 + e'f^2$.

Le théorème de Thalès permet d'écrire que $\dfrac{Be}{Bd} = \dfrac{Be'}{BC} = \dfrac{S_1}{S}$ d'où $Be' = BC \cdot \dfrac{S_1}{S}$.

On note R = BC/2.

$e'f^2 = R^2 - (Be' - R)^2 = - Be'^2 + BC^2 \cdot \dfrac{S_1}{S}$ d'où $BC'^2 = BC^2 \cdot \dfrac{S_1}{S}$.

Le point C′ est donc bien un point de la droite de partage cherchée.

◆ ***Application***

Considérons le triangle donné à l'exercice du paragraphe 2.3.2. On demande de la partager de telle manière que S_1 = 8 244 m^2, la limite étant parallèle au côté AC.

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.2.2.

Dessin du triangle : voir le paragraphe 2.3.2.

Droite BB′: un coefficient de 1/75 donne une construction proche de la figure 3.12-b. *LIGNE*↵ du point B (*EXT*rémité de ...) au point *@109.92<145*↵ au point *@44.60063213<150*↵ au point C (*EXT*rémité de ...).

Construction de C′ : *COPIER*↵ le segment dC du point d vers le point e (*EXT* de ...).
CERCLE↵ de centre *MIL*ieu de BC et de rayon point C (*EXT*rémité de ...).
LIGNE↵ du point (point quelconque extérieur au cercle) au point *PER*pendiculaire à BC.
DEPLACER↵ cette dernière ligne de son *EXT*rémité vers le point e′ (*INT*ersection de ...).
CERCLE↵ de centre B et de rayon Bf (donnez le point f par *INT*ersection de ...).

On obtient le point C′. Pour obtenir la droite A′C′, *COPIER*↵ la droite AC depuis le point C (*EXT*rémité de...) vers le point C′ (*EXT*rémité de...). Les cotes CC′ et AA′ s'obtiennent avec la commande *DISTANCE*↵.

Résultats : AA′ = 27,815 m et CC′ = 21,331 m. BA′ = 149,829 m et BC′ = 114,900 m. Contrôlez ensuite la surface S_1.

2.5.2 Cas du quadrilatère

Considérons un quadrilatère ABCD à diviser en deux surfaces S_1 et S_2, la limite divisoire étant parallèle au côté AD (fig. 3.13.). On peut revenir au cas du triangle (§ 2.5.1.) en prolongeant les côtés AB et CD jusqu'à obtenir le point E et le triangle ADE. On calcule alors la surface $S'_2 = S_2 + S_{EBC}$ et on positionne A′ et B′ avec :

$$\boxed{AA' = AE\sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S'_2}} \quad \text{et} \quad DD' = DE\sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S'_2}}}$$

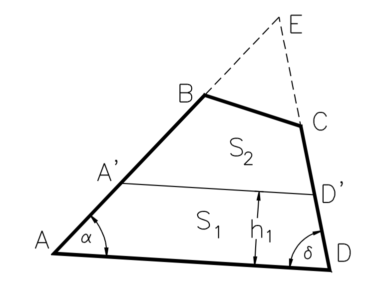

Fig. 3.13. : Cas du quadrilatère

Si l'on ne désire pas calculer le point E, on peut calculer ainsi la longueur du coté A′D′ :

$$2.S_{AED} = \frac{AD^2}{\cot\alpha + \cot\delta}$$

$$2.S_{A'ED'} = 2.(S_{AED} - S_1) = \frac{A'D'^2}{\cot\alpha + \cot\delta}$$

Finalement, on obtient : $A'D' = \sqrt{AD^2 - 2S_1(\cot\alpha + \cot\delta)}$

On en déduit la hauteur h_1 par : $2.S_1 = h_1.(A'D' + AD)$

D'où les cotes d'implantation AA′ et DD′: $AA' = h_1/\sin\alpha \quad DD' = h_1/\sin\delta$

2.5.3 Polygone quelconque

On revient au cas du quadrilatère traité au paragraphe précédent.

Par exemple, pour le polygone de la figure 3.14., on calcule la surface S_{BCD} que l'on retranche à S_2 pour obtenir $S'_2 = S_{A'BDE'}$ et l'on revient au cas d'un quadrilatère ABDE à partager en S_1 et S'_2.

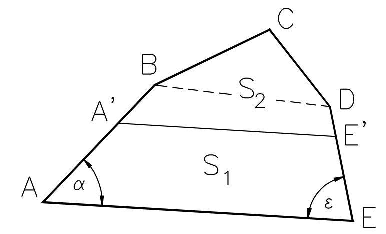

Fig. 3.14. : Polygone quelconque

Si la limite divisoire est telle que l'on ne peut pas définir directement le triangle AED (comme au paragraphe 2.5.2.), on retranche et/ou on ajoute des superficies partielles de manière à revenir au cas du quadrilatère.

Par exemple, pour le polygone ABCDEF de la figure 3.15., on retranche $S_{BC'C}$ à S_2 et on ajoute $S_{EE'F}$ à S_1 pour travailler dans le quadrilatère AC′DE′.

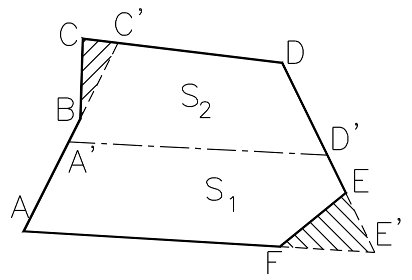

Fig. 3.15. : Polygone quelconque

2.5.4 Application

Parfois le partage n'est pas réalisé sur les surfaces mais sur la valeur du terrain (en Francs par mètre carré).

Par exemple, considérons le trapèze ABCD (fig. 3.16.) partagé par la droite (Δ) en deux zones de valeurs différentes : ABB′D′ de valeur v_1 en F/m² et B′CDD′ de valeur v_2 en F/m². On cherche à diviser la parcelle ABCD en deux parcelles de valeur V et V' en F (V correspond à une surface inconnue S_1 et V' à S_2) ; la division est parallèle à AD (ou BC).

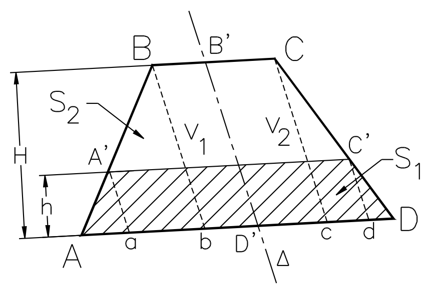

Fig. 3.16. : Exercice

La valeur en Francs d'une bande de terrain d'un mètre de largeur centrée sur le côté AD est la suivante : $V_{AD} = v_1 \,.\, 1 \,.\, AD' + v_2 \,.\, 1 \,.\, D'D = v_1 \,.\, AD' + v_2 \,.\, D'D$.

De même pour le côté BC : $V_{BC} = v_1 \,.\, 1 \,.\, BB' + v_2 \,.\, 1 \,.\, B'C = v_1 \,.\, BB' + v_2 \,.\, B'C$.

La valeur de la parcelle AA′C′D est $V = (V_{AD} + V_{A'C'})h/2$ d'où $h = 2V/(V_{AD} + V_{A'C'})$ (1).

De même, la valeur de la parcelle A′BCC′ est : $V' = (V_{BC} + V_{A'C'}).(H - h)/2$.

La valeur totale de la parcelle ABCD de hauteur H est donc :
$V_T = (V_{AD} + V_{BC}).H/2 = V + V'$

Soit a, b, c et d les projections de A′, B, C et C′ sur la base AD parallèlement à la direction (Δ). Dans les triangles semblables (AA′a et ABb) ou (CcD et C′dD), on peut écrire :

$$\frac{h}{H} = \frac{\text{Aa}}{\text{Ab}} = \frac{\text{Dd}}{\text{Dc}} \text{ d'où } \frac{h}{H} = \frac{v_1\text{Aa}}{v_1\text{Ab}} = \frac{v_2\text{Dd}}{v_2\text{Dc}} = \frac{v_1\text{Aa} + v_2\text{Dd}}{v_1\text{Ab} + v_2\text{Dc}} = \frac{V_{AD} - V_{A'C'}}{V_{AD} - V_{BC}}$$

Donc $h = H\dfrac{V_{AD} - V_{A'C'}}{V_{AD} - V_{BC}}$ (2)

Des équations (1) et (2), on déduit : $\boxed{V_{A'C'} = \sqrt{V_{AD}^2 - \dfrac{2V(V_{AD} - V_{BC})}{H}}}$

Application

$v_1 = 50$ F/m² et $v_2 = 15$ F/m².

AD′ = 107,66 m, D′D = 82,59 m, BB′ = 32,38 m, B′C = 42,17 m et H = 101,76 m.

Réponse

V_{AD} = 6 621,85 F et V_{BC} = 2 251,55 F ; la valeur totale de la parcelle est de 451 478,59 F.

On cherche à la partager en une parcelle valant 350 000 F et une parcelle valant le complément, soit 101 478,59 F. Donc $V_{A'C'}$ = 3 712,94 FF et h = 67,73 m.

Les surfaces après division sont respectivement :

S_1 = 10 277,75 m² (5 595,00 m² à 50 F/m² et 4 682,75 m² à 15 F/m²).

S_2 = 3 195,28 m² (1 530,24 m² à 50 F/m² et 1 665,04 m² à 15 F/m²).

2.6 Limites divisoires parallèles à une direction donnée

On désire partager le quadrilatère ABCD (fig. 3.17.) en deux surfaces S_1 et S_2, la séparation étant parallèle à la direction (Δ). Cela revient à positionner les points A′ et B′.

En menant une parallèle à (Δ) passant par le point C, on peut revenir au cas du paragraphe 2.5. c'est-à-dire une limite parallèle à un côté :

On calcule la surface $S_{CDD'}$ et on en déduit que $S'_2 = S_2 - S_{CDD'}$.

On procède ensuite comme indiqué au paragraphe 2.5.2. pour le quadrilatère ABCD′ à partager en S_1 et S'_2, la limite étant parallèle au côté CD′.

Ce raisonnement est valable dans le cas d'un triangle et d'un polygone quelconque.

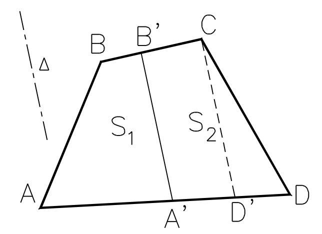

Fig. 3.17. : Division parallèle à une direction

2.7 Limites divisoires perpendiculaires à un côté

On cherche à séparer le quadrilatère ABCD (fig. 3.18.) en deux surfaces S_1 et S_2, la séparation A′B′ étant perpendiculaire au côté AD. On cherche donc à positionner les points A′ et B′.

En menant une perpendiculaire à AD passant par C, on revient à nouveau au cas du paragraphe 2.5. (limite parallèle à un côté) : on calcule la surface $S_{CDD'}$ et on en déduit une surface $S'_2 = S_2 - S_{CDD'}$.

On procède ensuite comme indiqué au paragraphe 2.5.2. pour le quadrilatère ABCD′ à partager en S_1 et S'_2, la limite étant parallèle au côté CD′.

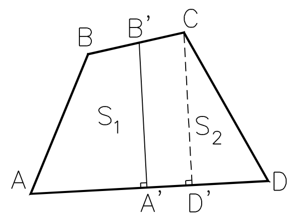

Fig. 3.18. : Division perpendiculaire à un côté

2.8 Limites divisoires dans un îlot

Soit l'îlot (fig. 3.19.) limité par les droites AE et AE′ formant entre elles l'angle α. On cherche à le diviser en lots successifs de surfaces données S, S_0, S_1, S_2, etc., les limites étant parallèles entre elles et perpendiculaires aux alignements AE et AE′.

- **Premier lot** : le pan coupé ABB′

Sa surface est $S = \frac{1}{2} \,.\, AB \,.\, AB' \,.\, \sin\alpha.$

On impose : $\boxed{AB = AB' = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}}$

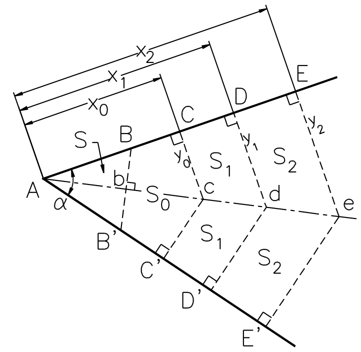

Fig. 3.19. : Limites divisoires d'un îlot

- **Deuxième lot** : le lot d'angle BCcC′B′

On note AC = AC′ = x_0 et Cc = C′c = y_0.

Sa surface est $S_0 = S_{ACcC'} - S$.

Or $S_{ACcC'} = x_0 \,.\, y_0 = x_0^2 \,.\, \tan(\alpha/2)$.

Donc
$$\boxed{x_0 = \sqrt{\frac{S + S_0}{\tan(\alpha/2)}} \quad \text{et} \quad y_0 = x_0 \cdot \tan(\alpha/2)}$$

- **Lots suivants** : les lots cCDd, dDEe, etc.

On montre de même que pour x_1, x_2, etc. :

$$\boxed{x_i = \sqrt{\frac{S + S_0 + 2\sum_{j=1}^{j=i} S_j}{\tan(\alpha/2)}} \quad \text{et} \quad y_i = x_i \cdot \tan(\alpha/2)}$$

2.9 Limites avec cotes partielles proportionnelles aux côtés

2.9.1 Cas du quadrilatère

On cherche à partager le quadrilatère ABCD (fig. 3.20.) en deux surfaces S_1 et S_2 telles que $\frac{AA'}{AB} = \frac{DD'}{DC}$ ou $\frac{BA'}{BA} = \frac{CD'}{CD}$. Cela présente l'avantage de conserver la forme de la parcelle.

Les cotes partielles sont AA′, A′B, CD′ et DD′. On cherche donc à positionner le point A′ sur AB et le point D′ sur CD. Cela revient par exemple à calculer les distances BA′ = a et CD′ = b.

Pour résoudre ce problème, on prolonge les côtés AB et CD jusqu'à obtenir le triangle AED dans lequel on calcule la surface S_{BEC}, l'angle α et les côtés EB et EC.

Pour obtenir les cotes a et b, on écrit $\frac{a}{BA} = \frac{b}{CD}$ donc $a = \frac{BA}{CD} b$.

On en déduit $2.(S_1 + S_{BEC}) = (EB + a).(EC + b).\sin\alpha = \left(EB + b\,\frac{BA}{CD}\right).(EC + b).\sin\alpha$.
On résout l'équation du second degré en b :

$$\boxed{\frac{BA}{CD} b^2 + \left(EB + \frac{BA \cdot EC}{CD}\right) b + EB \cdot EC - 2\frac{S_{EBC} + S_1}{\sin\alpha} = 0}$$

On peut généraliser ces équations à un découpage en n surfaces en remplaçant le numérateur ($S_{BEC} + S_1$) par ($S_{EBC} + \Sigma S_i$). On obtient alors a et b toujours par rapport aux points B et C.

Si les côtés AB et CD sont parallèles distants d'une distance h, on a $S_1 = h.(a + b)/2$ et toujours $a = b$.BA/CD.

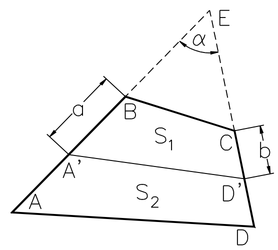

Fig. 3.20. : Côtés a et b proportionnel à AB etCD

Exercice

Partagez le triangle du paragraphe 2.4. en deux surfaces telles que $S_1 = S_2/3$; la limite divisoire coupe les côtés AD et BC et la surface S_1 est du coté du point A.

Résultats

Les cotes cherchées sont b = CD′ = 58,178 m et a = AA′ = 32,807 m. Avec ces cotes, on obtient : S_1 = 6320,25 m^2 et S_2 = 18951,55 m^2.

2.9.2 Polygone quelconque

Dans ce problème, on ne peut pas facilement adapter la solution du paragraphe 2.9.1., valable pour un quadrilatère. Elle mènerait à un système d'équations long et difficile à résoudre. C'est pourquoi nous détaillons une autre méthode qui mène plus rapidement au résultat.

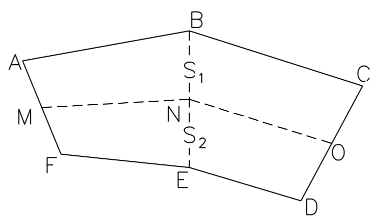

Fig. 3.21. : Polygone quelconque

Soit à partager la surface ABCDEF (fig. 3.21.) en deux surfaces de valeur S_1 et S_2, les limites étant telles que $\frac{AM}{AF} = \frac{BN}{BE} = \frac{CO}{CD}$.

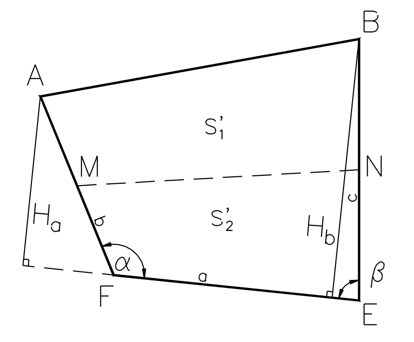

Fig. 3.22. : Quadrilatère

Considérons tout d'abord le quadrilatère ABEF (fig. 3.22.) à séparer en deux surfaces S'_1 et S'_2. On note EF = a, AF = b, et BE = c.

On peut calculer les hauteurs H_a et H_b par :

$$H_a = b.\sin\alpha$$
$$H_b = c.\sin\beta$$

On utilise ensuite un trapèze rectangle (fig. 3.23.) de même surface que le quadrilatère ABEF et partagé également en S'_1 et S'_2.

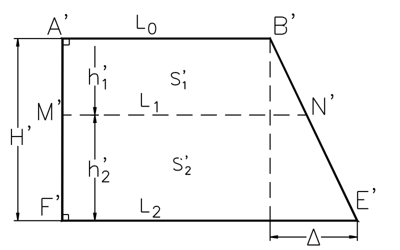

Fig. 3.23. : Trapèze rectangle équivalent

On fixe la hauteur du trapèze à H' = 100 m. Ses bases sont L_0 et L_n ; on note $\Delta = L_n - L_0$ leur différence dont on conserve le signe. On fixe arbitrairement l'une des bases du trapèze, par exemple :

$$L_n = a.(H_a + H_b)/(2.\mathrm{H}')$$

On en déduit l'autre base :

$$2.S = H'.(L_0 + Ln) \text{ d'où } L_0 = \frac{S}{50} - L_n$$

et $\Delta = L_n - L_0$.

On calcule ensuite la hauteur h'_i et la base L_i correspondant à chaque surface S'_i ; ici $n = 2$ surfaces : cela revient à faire le partage cherché sur le quadrilatère rectangle. En appliquant le théorème de Thalès et la surface du trapèze A′B′N′M′, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h'_1}{H'} = \dfrac{L_1 - L_0}{\Delta} \\ 2S'_1 = h'_1(L_1 + L_0) \end{array}\right\} \text{ d'où } L_1 = \sqrt{L_0^2 + 2S'_i\,\frac{\Delta}{H'}}$$

On peut généraliser cette formule comme suit : $\boxed{L_i = \sqrt{L_{i-1}^2 + 2S'_i\,\frac{\Delta}{H'}}.}$

On contrôle en fin de calcul que l'on retrouve la valeur connue de L_n (énième côté).

On en déduit les hauteurs h'_i $\boxed{h_i' = \dfrac{2S'_i}{L_i + L_{i-1}}.}$

On contrôle que $\sum h'_i = H'$.

On calcule enfin les cotes réelles d'implantation (ici AM noté b_1, BN noté c_1) :

On utilise les proportions $\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{h'_1}{H'}$, de manière générale : $\boxed{\frac{b_i}{b} = \frac{c_i}{c} = \frac{h'_i}{H'}.}$

On contrôle finalement que : $\sum b_i = b$ et $\sum c_i = c$.

Cette méthode de calcul présente l'avantage de pouvoir être programmée.

2.9.3 Application

Soit le polygone ABCDEFG (fig. 3.24.) dont les sommets sont donnés ci-après :

Point	x (m)	y (m)
A	454,864	269,110
B	516,266	280,153
C	556,651	274,339
D	580,122	259,908
E	557,404	217,577
F	516,266	229,847
G	468,987	234,755

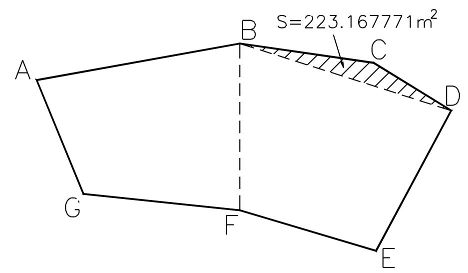

Fig. 3.24. : Exercice

La surface totale est $S = 5\ 161{,}343800$ m^2.

On cherche à partager cette surface en trois surfaces $S_1 = 2\ 500$ m^2, $S_2 = 1\ 500$ m^2 et $S_3 = 1\ 161{,}3438$ m^2. Les cotes partielles seront proportionnelles aux côtés AG, BF et DE ; la surface S_1 est située vers le point B.

Calculs

On commence par revenir au cas de deux quadrilatères adjacents (ABFG et BDEF) en retranchant la surface BCD à S_1. La nouvelle valeur de S_1 est $S'_1 = 2\ 276{,}832229$ m^2. On travaille ensuite dans le polygone ABDEFG de surface totale $S' = 4\ 938{,}176029$ m^2.

Quad.	S (m^2)	a (m)	b (m)	c (m)	α (gon) β (gon)	H_a (m) H_b (m)	L_n (m)	L_0 (m)	Δ (m)
ABFG	2321,924792	47,533	37,145	50,306	131,415 93,415	32,714 50,037	19,667	26,772	–7,105
BDEF	2616,251237	42,929	50,306	48,042	118,453 112,904	48,207 47,058	20,448	31,877	–11,428
Total :	4938,176029						40,115	58,648	–18,533

La dernière ligne du tableau précédent donne donc les cotes L_n, L_0 et Δ du quadrilatère rectangle de hauteur H′ = 100 m et de même surface que ABDEFG. On contrôle que : (40,115 + 58.648).100/2 = 4 938,15 m^2 ≈ S′ (aux arrondis près).

Si **(m²)**	***Li*** **(m)**	***h'i*** **(m)**
2276,832229	50,948	41,550
1500,000000	45,163	31,214
1161,343800	40,115	27,237
Vérif.		100,000

ABFG	***bi*** **(m)**	***ci*** **(m)**
S_1	15,434	20,902
S_2	11,594	15,702
S_3	10,117	13,702
Vérif.	37,145	50,306

BDEF	***bi*** **(m)**	***ci*** **(m)**
S_1	20,902	19,961
S_2	15,702	14,996
S_3	13,702	13,085
Vérif.	50,306	48,042

Excel 7

Les calculs ayant été effectués sur tableur, le recours à la compensation n'est pas nécessaire puisqu'il n'y a pas d'arrondis intermédiaires.

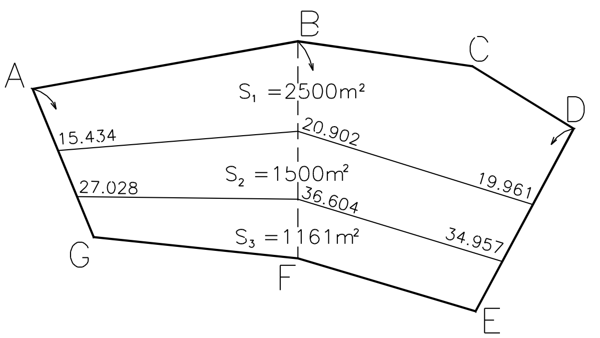

Fig. 3.25. : Découpage final

3 REDRESSEMENT DE LIMITES

Cette opération consiste à substituer à une limite existante généralement complexe (par exemple EFGH, figure 3.26.) une nouvelle limite rectiligne E'H' avec conservation des surfaces S_1 et S_2.

Les données sont soit une distance imposée (par exemple la cote *d*, figure 3.26.), soit une direction imposée pour la nouvelle limite (par exemple parallèle à une façade).

Le redressement peut être fait graphiquement ou analytiquement, en appliquant par exemple la formule de Sarron, ou par résolution de triangles.

3.1 Résolution de triangles

3.1.1 La cote *d* est imposée

On cherche à redresser EFHG en E′H′ (fig. 3.26.), la cote d = H′H étant imposée. On cherche à positionner E′ donc à déterminer la cote E′E. La surface S_2 est conservée : $S_{CDH'E'} = S_2$

On peut calculer la surface du triangle CDH′ et en déduire celle du triangle CE′H′ :

$$S_{CE'H'} = S_2 - S_{CDH'}$$

On en déduit que $\boxed{CE' = \dfrac{2S_{CH'E'}}{CH' \cdot \sin(\gamma - \gamma_0)}}$

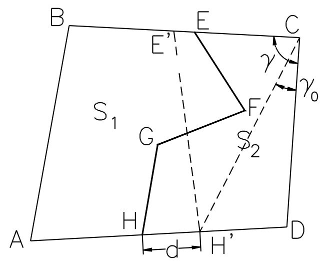

Fig. 3.26. : Redressement de la limite EFGH

γ est l'angle BCD calculé ou mesuré, γ_0 est calculé.

3.1.2 Limite parallèle à une façade

La limite redressée doit être parallèle à AB (fig. 3.27.). On cherche donc la distance d entre la façade de référence et la nouvelle limite E'H'.

Le calcul est identique à celui étudié au paragraphe 2.5.2., à savoir :

$$E'H' = \sqrt{AB^2 - 2S_1(\operatorname{cotan}\alpha + \operatorname{cotan}\beta)}$$

$$d = \frac{2S_1}{AB + E'H'} \quad \text{et} \quad AH' = \frac{d}{\sin\alpha}$$

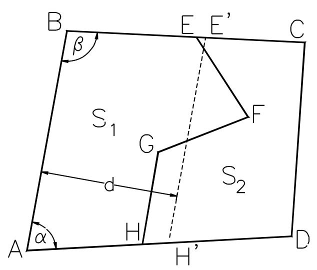

Fig. 3.27. : Nouvelle limite E′H′

3.1.3 Exemple

Les données ci-contre correspondent à la figure 3.27. Calculer d pour redresser la limite EFGH en E′H′ parallèle à AB.

Points	*x* (m)	*y* (m)
A	524,814	1423,533
B	557,044	1602,230
C	749,436	1592,815
D	738,805	1435,140
E	661,845	1597,101
F	703,639	1532,090
G	630,861	1503,523
H	618,127	1428,594

Réponse

S_1 = 19 595,4779 m^2.
α = 85,1903 gon et β = 108,2471 gon.

AB = 181,580 m. E′H′ = 169,682 m donc d = 111.572 m et AH′ = 114,660 m.

La surface S_1 effective, c'est-à-dire implantée à partir de AH′ est 19 595,50 m^2.

3.2 Formule de Sarron

La démonstration de la formule de Sarron est donnée au chapitre 5, paragraphe 5.3.

3.2.1 Cote imposée

On cherche à redresser la limite EFGH en E′H′, la cote e = HH′ ou a = EE′ étant imposée (fig. 3.28.). Les surfaces S_1 et S_2 sont conservées. On note :

EF = b, FG = c, GH = d.

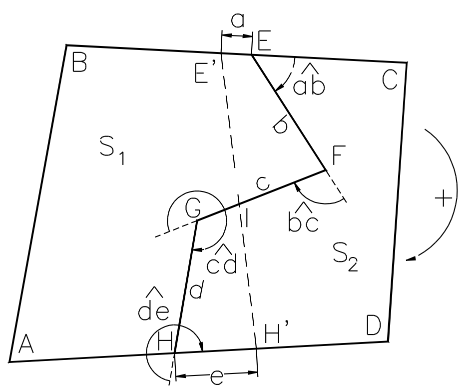

Fig. 3.28. : Application de la formule de Sarron

On choisit un sens de calcul qui donne les angles orientés $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ et $\widehat{de}$ à calculer, ou à déduire des observations.

On applique la formule de Sarron en remarquant que :

$$S_{E'EFI} + S_{IGHH'} = 0$$

Notons que la surface IGHH′ est négative puisqu'elle est parcourue dans le sens trigonométrique.

$$\begin{aligned}\text{Donc : } 0 = {} & ab.\sin(\widehat{ab})+ac.\sin(\widehat{ab}+\widehat{bc})+ad.\sin(\widehat{ab}+\widehat{bc}+\widehat{cd})+ae.\sin(\widehat{ab}+\widehat{bc}+\widehat{cd}+\widehat{de})\\ & +bc.\sin(\widehat{bc})+bd.\sin(\widehat{bc}+\widehat{cd})+be.\sin(\widehat{bc}+\widehat{cd}+\widehat{de})\\ & +cd.\sin(\widehat{cd})+ce.\sin(\widehat{cd}+\widehat{de})\\ & +de.\sin(\widehat{de})\end{aligned}$$

On obtient finalement une équation dans laquelle on peut isoler a ou e.

Remarque

Cette méthode qui nécessite des calculs plus longs que la précédente (§ 3.1.), est à réserver aux cas où les données sont les angles orientés et les côtés du polygone ; c'est le cas dans un lever par polygonation.

Exemple

On impose a = 17,331 m ; on cherche donc e. Les données sont les suivantes :
$\widehat{ab}$ = 60,5143 gon ; $\widehat{bc}$ = 112,5605 gon ; $\widehat{cd}$ = 334,5291 gon ; $\widehat{de}$ = 285,8336 gon
b = 77,286 m ; c = 78,184 m ; d = 76,003 m.

Réponse

***e* = 46,216 m** ce qui donne, aux arrondis près, S_1 = 19 595,50 m².

Autre exemple : a = 50 m donne e = 77,863 m.

3.2.2 Limite parallèle à une façade

Dans ce cas, on exprime a et e en fonction de la distance h (figure 3.29.). Le paramètre à calculer devient h.

On écrit : $a = \dfrac{h}{\sin\beta} - \mathrm{BE}$

et : $e = \dfrac{h}{\sin\alpha} - \mathrm{AH}$

On écrit enfin la formule de Sarron dans laquelle la seule inconnue est h.

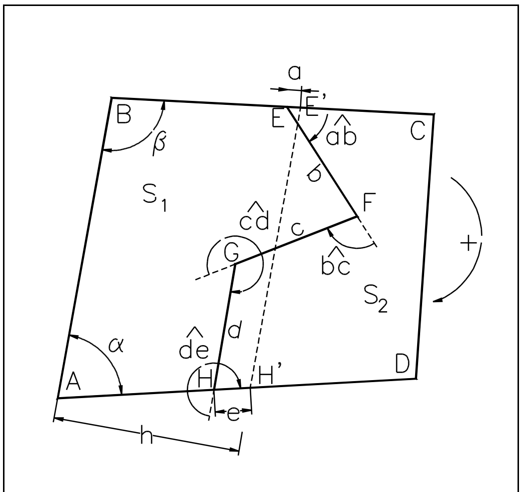

Fig. 3.29. : Application de la formule de Sarron

Remarque

Le calcul des coordonnées des sommets puis la résolution par calcul des surfaces des triangles (comme au paragraphe 3.1.) est au moins aussi rapide que l'application de Sarron.

Application

Les données sont celles du paragraphe 3.2.1 et résultats sont identiques à ceux du paragraphe 3.1.3.

3.3 Résolution graphique

Le principe de ces constructions est traité au paragraphe 1.3.

3.3.1 Cote imposée

Dans le cas où la cote *a* ou *e* est imposée, la solution graphique est simple, rapide et précise. La figure 3.30. montre deux exemples de construction pour des limites simples à redresser.

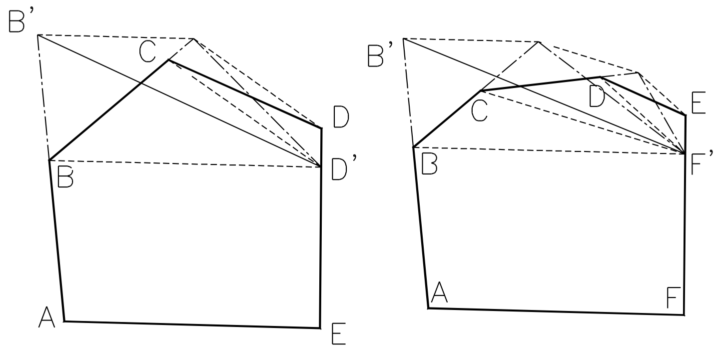

Fig. 3.30. : Construction graphique

Dans le premier cas, il s'agit de redresser la limite BCD en D′B′, le point D′ étant imposé. Dans le second cas, il s'agit de redresser la limite BCDE en F′B′, le point F′ étant imposé.

Application

Retrouvez graphiquement la solution du deuxième exemple du paragraphe 3.2.1. (*a* imposé, *a* = 50 m).

◆ ***Construction graphique***

- **Construction du polygone ABCD et de la limite EFGH**

LIGNE↵ du point *524.814,1423.533*↵ au point *557.044,1602.23*↵ au point *749.436,1592.815*↵ au point *738.805,1435.14*↵ au point *C*lore↵

LIGNE↵ du point *661.845,1597.101*↵ au point *703.639,1532.09*↵ au point *630.861,1503.523*↵ au point *618.127,1428.594*↵

- **Positionnement de E′ à 50 m de E**

CERCLE↵ de centre E (*EXT*rémité de...) et de rayon *50*↵.

- **Rayons E′F, E′G et E′H**

LIGNE↵ de *INT*ersection à *EXT*rémité de... On peut alors effacer le cercle centré en E′.

- **Points F′, G′ et H′**

COPIER↵ le segment E′F de E′ vers E puis *CHNFREIN*↵ avec le segment GF, on obtient le point F′ (fig. 3.31.).

COPIER↵ le segment E′G de E′ vers F′ puis *CHNFREIN*↵ avec le segment GH, on obtient le point G′.

COPIER↵ le segment E′H de E′ vers G′ puis *PROLONGE*↵ jusqu'à la droite AD pour obtenir le point H′.

Résultats : lire la cote HH′ (ou AH′) avec la commande *DISTANCE*↵ et vérifier avec la commande *AIRE*↵ que la surface ABE′H′ est bien égale à la surface ABEFGH (passez en accrochage permanent *EXT*rémité).

HH′ = 77,863 m.

S = 19 595,4779 m^2.

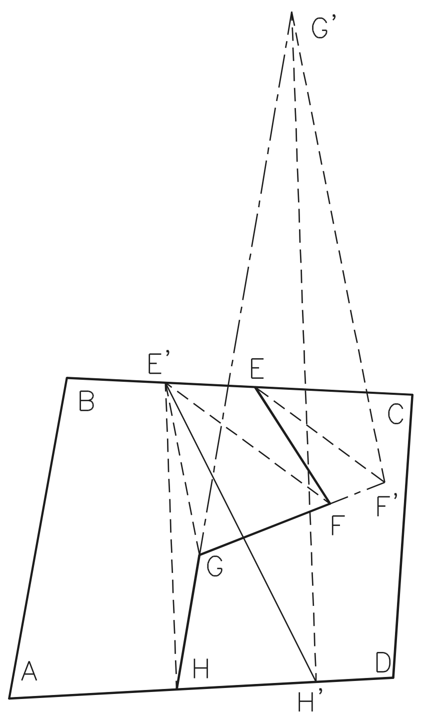

Fig. 3.31. Exercice

3.3.2 Limite parallèle à une direction donnée

Dans ce cas, pour une solution graphique, on peut procéder par approximations successives : positionnez à vue une droite parallèle à la direction imposée puis déplacez cette droite jusqu'à obtenir la surface cherchée.